现代数学手册

· 经典数学卷

Modern Mathematics Handbook

《现代数学手册》编纂委员会

· 华中科技大学出版社 ·

现代数学手册

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

经典数学卷

《现代数学手册》编纂委员会





· 华中科技大学出版社 ·
（华中理工大学出版社）
中国·武汉

《现代数学手册》编纂委员会

前　言

在人类开始跨入21世纪的历史时期，人们已普遍地看到了一种历史现象，即数学问题的多样性与数学应用的广泛性及深入性，已经成为现代科技发展的重要特征。可以预期，伴随着计算机科技在新世纪里的不断发展，此特征今后还将以更高的水平显示出来。

在中国，“科学技术是第一生产力”（邓小平名言）已逐渐成为人们信奉的朴实真理。国家富强显然要以第一生产力即科技的发达为必要条件。但是，如果没有近、现代发展起来的数学各分支学科作工具，当然也就不会有现代科技。因此“国家富强必须要依靠数学发达”这句经典名言（拿破仑（Napoleon）名言），自然也是一条不容置疑的客观真理。

基于上述认识，在华中理工大学出版社的倡议与委托下，我们通过集体协作，努力编纂了这部《现代数学手册》巨著，其目的正是怀着对我国将在新世纪里能尽快成为富强国家的热切希望，而欲为科技界提供一份力所能及的奉献。具体说来，这部工具性巨著服务的读者（或使用者）对象，包括广大科学工作者、工程技术人员、经济管理工作者、高等院校的教师和学生等。

那么，作为数学工具书，这部巨型手册要求具备哪些特点呢？在编写过程中，出版社负责人和我们达成了一项共识，即手册应具备科学性、先进性、实用性、规范性与简明性。200余位撰稿人与审稿人（来自中国科学院、北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、浙江大学、北京师范大学、厦门大学、上海交通大学、西安交通大学、中国科技大学、南开大学、武汉大学、华中理工大学、大连理工大学、南京航空航天大学、陕西师范大学等40多所高校与研究所）按照这些特点和要求付出了

艰辛的劳动。我们要感谢他们的通力合作与努力，使本手册基本上体现了上述所希冀的特点或特色。

为了读者选购和使用方便，本手册分5卷出版，分别名为"经典数学卷"、"近代数学卷"、"计算机数学卷"、"随机数学卷"和"经济数学卷"。需要指出的是，各个分支(篇目)的归属是相对的，这里考虑了各分卷篇幅大小的平衡问题。例如，"蒙特卡罗法"这一篇也可归入"计算机数学卷"。

我们要感谢诸分卷主编为精心组稿、编稿、审稿付出的精力和时间。特别要对中国科学院两位老院士钱伟长先生与吴文俊先生，以及杨叔子院士乐愿担任本手册的顾问而致以诚挚的谢忱。最后，还要对华中理工大学出版社具有远见卓识的负责人和埋头苦干的编辑人员与我们在本手册的生产全过程中的互相配合和精诚合作，深表谢忱。

《现代数学手册》编纂委员会

主编　徐利治

1999年12月于武汉

现代数学手册

篇目录

经典数学卷

近代数学卷

计算机数学卷

随机数学卷

经济数学卷

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

CONTENTS

CLASSICAL MATHEMATICS

MODERN MATHEMATICS

COMPUTER MATHEMATICS

STOCHASTIC MATHEMATICS

ECONOMIC MATHEMATICS

目　录

·经典数学卷·

第1篇

微积分

编　者　陆传务　胡适耕
审校者　肖伊莘

目　录

引　言

近代数学的伟大变革是从引进变量开始的，而微积分学的创建正是变量数学的第一个重大成就．微积分学的出现不仅整个地更新了数学的面貌，而且显著地促进了近代科学技术的发展．没有微积分这一强大的新数学工具，力学、物理学、天文学等领域的近代理论的形成是不可能的．微积分学的伟大开创者牛顿（Newton）、莱布尼兹（Leibniz）等人的名字，不仅与数学联系在一起，而且与整个近代科学联系在一起．

微积分学为研究变量提供了一个方法系统，其基本内容是微分与积分这两种互相关联的运算．微分与积分分别源于有重大现实意义的速率问题与求积（面积、体积等）问题，且都建立在极限概念的基础上．微分学研究变量的局部性质，而积分学则处理变量在一定范围内的“求和”，因而是一整体问题．自然、局部与整体的对立与联系，充分体现于微分与积分的相互关系中．

微积分学已成为经典数学的重要部分，在它的基础上成长出一系列重要学科，如微分方程、复变函数、实变函数、变分法等．微积分学的理论与方法，已广泛应用于自然科学、工程技术乃至社会科学的多个部门．对微积分学的一定程度的掌握，不仅是对科技工作者的数学训练中的必备要素，而且也愈来愈成为对工程师、经济学家及许多社会工作者的基本要求．

1　极限与连续性

1.1　函　数

1.1.1　n 维空间

(1) 空间 $\mathbf{R}^n$　n 个实数的有序组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 之全体称为 n 维欧几里得（Euclid）空间，记作 $\mathbf{R}^n$．$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为点，记作 $\boldsymbol{x}$ 或大写字母 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{A}$ 等．$\mathbf{R}^1$ 就是实直线，也写作 $\mathbf{R}$ 或 $(-\infty, +\infty)$；$\mathbf{R}^2$ 就是实平面；$\mathbf{R}^3$ 可解释为通常的空间．

(2) 线性运算　任给 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$，$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$，设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，定义

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \cdots, \alpha x_n + \beta y_n).$$

令

$$L = \{(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

称 L 为从点 $\boldsymbol{x}$ 到点 $\boldsymbol{y}$ 的线段，记作 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$．

(3) 距离　任给 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,称

$$|\boldsymbol{x}|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$$

为点 $\boldsymbol{x}$ 的模.任给 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^n$,称 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$ 为点 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的距离,记作 $|\boldsymbol{AB}|$.

(4) 球　任给 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^n, r>0$,令

$$N(\boldsymbol{P},r)=\{\boldsymbol{Q}\in\mathbf{R}^n\mid|\boldsymbol{PQ}|<r\}.$$

称 $N(\boldsymbol{P},r)$ 为以 $\boldsymbol{P}$ 为心、以 r 为半径的 n 维球,或称它为点 $\boldsymbol{P}$ 的 r 邻域.

1.1.2　区域

设 $D(\subset\mathbf{R}^n)$ 是一非空集合.

(1) 内部　若 $\boldsymbol{P}\in D$,且存在 $r>0$,使 $N(\boldsymbol{P},r)\subset D$,则称 $\boldsymbol{P}$ 为 D 的内点;D 的全体内点构成 D 的内部.

(2) 边界　若 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^n$,对任给 $r>0$,$N(\boldsymbol{P},r)$ 中同时含有 D 中的点与不在 D 中的点,则称 $\boldsymbol{P}$ 为 D 的边界点;D 的全体边界点构成 D 的边界,记作 ∂D.

(3) 区域　若 D 只含内点,且其中任两点可用 D 内的折线(相继连接的有限条线段之并)连接,则称 D 为开区域;开区域连同其边界一起构成闭区域.习惯上,开区域连同其部分边界也构成区域.一维区域就是区间.

(4) 有界性　若 D 包含在某个球内,则说 D 有界;否则说 D 无界.

若说到区域 D 而未加限定,则 D 可以是开区域或闭区域,亦可非开非闭;可以有界亦可无界.区域通常用不等式表示.

例1　给定 $\mathbf{R}^2$ 中的3个集合:

$$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant1\};$$
$$E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x>0,y>0\};$$
$$F=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid 0\leqslant x<1,y>0\}.$$

则 D 是有界闭区域;E 是无界开区域;F 是非开非闭的无界区域.

1.1.3　函数

(1) 一般定义　设 X,Y 是两个非空集.若对每个 $x\in X$,按某个法则 f 有唯一的 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 为定义于 X 上而取值于 Y 中的函数,或称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作 $f: X\to Y$.以 $f(x)$ 记 x 所对应的 y,称它为 f 在 x 所取的值.称 X 为 f 的定义域,称 $\{f(x): x\in X\}$ 为 f 的值域.

(2) n 元实函数　若 $D\subset\mathbf{R}^n$(D 通常是某个区域),则称任何函数 $f: D\to\mathbf{R}$ 为 n 元实函数,记作 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,也缩写成 $y=f(\boldsymbol{x})$ 或 $y=f(\boldsymbol{P})$,其中 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 f 的自变量;称 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的集合

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n))\mid(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$$

为 f 的图形,当 $n=1$ 或 2 时,它通常是一曲线或曲面.

(3) 向量值函数　设 $I\subset\mathbf{R}$ 是一区间.设 $x(t),y(t),z(t)$ 是定义于 I 上的3个实函数.令

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\},\quad t\in I,$$

称 $\boldsymbol{r}(t)$ 为定义于 I 上的一个向量值函数.因此,给出一个向量值函数 $\boldsymbol{r}(t)$,相当于给出一组实函数:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in I.$$

以上函数组常用来表示空间曲线.

(4) 向量场　设 $D\subset\mathbf{R}^3$ 是一区域.设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 是定义于 D 上的 3 个实函数,令

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\},$$

称 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 为定义于 D 上的一个**向量场**.因此,给出向量场 $\boldsymbol{F}$,相当于给出三元函数组:

$$u=P(x,y,z),\quad v=Q(x,y,z),\quad w=R(x,y,z).$$

习惯上,将 $\boldsymbol{F}$ 写成 $\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$.

1.1.4 复合函数与反函数

(1) 复合函数　给定函数 $f:X\to Y$ 与 $g:D\to Z$.若 f 的值域含于 D,则 $g(f(x))$ 是一个定义于 X 上的函数,称它为 g 与 f 的复合函数,记作 $g\circ f$.

(2) 反函数　设函数 $y=f(x)$ 以 X 为定义域,以 Y 为值域.若 $\forall x_1,x_2\in X$,当 $x_1\neq x_2$ 时 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则存在唯一的函数 $g:Y\to X$,满足

$$g(f(x))=x,\quad f(g(y))=y,\quad x\in X,y\in Y.$$

称此函数 g 为 f 的反函数,记作 $g(y)=f^{-1}(y)$.

例 2　设 $F(x,y)=(x+y,y/x),f(F(x,y))=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$.

解　令 $x+y=u,y/x=v$,则可解出

$$x=\frac{u}{v+1},\quad y=\frac{uv}{v+1}.$$

于是

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{v+1}\right)^2-\left(\frac{uv}{v+1}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$

换回字母 x,y,得

$$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{(1+y)}.$$

1.1.5 函数的初等性质

设 f 是定义于 D 上的实函数.

(1) 有界性　若存在 $M\in\mathbf{R}$,使得 $\forall x\in D:f(x)\leqslant M$(或 $f(x)\geqslant M$),则说 f 在 D 上有上界(或有下界).若 f 在 D 上同时有上界与下界,则说 f 有界.

(2) 奇偶性　若 $f(-x)\equiv-f(x)$,则称 f 为奇函数;若 $f(-x)\equiv f(x)$,则称 f 为偶函数.

(3) 齐次性　若 $f(tx)\equiv t^m f(x)(t>0,x\in D)$,则称 f 为 m 次齐次函数.当 $m=0$ 时就称为齐次函数.

(4) 周期性 设 $D\subset\mathbf{R}$.若存在 $T>0$,使得 $f(x+T)\equiv f(x)(x\in D)$,则称 f 为以 T 为周期的周期函数.

(5) 单调性 设 $D\subset\mathbf{R}$ 是一区间.若 $\forall x,y\in D$,当 $x<y$ 时 $f(x)\leqslant f(y)$ $(f(x)<f(y))$,则称 f 为单调增(严格单调增)函数.而称 $-f(x)$ 为单调减(严格单调减)函数.

1.1.6 初等函数

最基本的初等函数是指数函数 e^x,正弦函数 $\sin x$ 及其反函数 $\ln x$,$\arcsin x$.由这些函数生成以下初等函数:

余弦 $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})\quad(|x|<\infty)$;

正切 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad(x\neq n\pi+\frac{\pi}{2},n=0,\pm1,\cdots)$;

余切 $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}\quad(x\neq n\pi,n=0,\pm1,\cdots)$;

双曲正弦 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad(|x|<\infty)$;

双曲余弦 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad(|x|<\infty)$;

双曲正切 $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}\quad(|x|<\infty)$;

双曲余切 $\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}\quad(x\neq0)$;

幂函数 $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}\quad(x>0)$;

反余弦 $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x\quad(|x|\leqslant1)$;

反正切 $\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\quad(|x|<\infty)$;

反余切 $\text{arccot}\,x=\frac{\pi}{2}-\arctan x\quad(|x|<\infty)$;

反双曲正弦 $\text{arsinh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\quad(|x|<\infty)$;

反双曲余弦 $\text{arcosh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\quad(x>1)$;

反双曲正切 $\text{artanh}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(|x|<1)$.

习惯上,以上所列函数皆称为基本初等函数.由基本初等函数经有限次四则运算与复合而得之函数称为初等函数.

1.2 极 限

1.2.1 极限的描述

微积分学中用到的极限主要有如下6种:

1° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$0<|x_0x|<\delta$时$|f(x)-l|<\varepsilon$.对一元函数可写成:$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$0<|x-a|<\delta$时$|f(x)-l|<\varepsilon$.

2° $\lim\limits_{x\in D,x\to x_0}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$x\in D$,$0<|x_0x|<\delta$时$|f(x)-l|<\varepsilon$.

3° 单边极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$0<x-a<\delta$时,$|f(x)-l|<\varepsilon$.当以上极限存在时记作$f(a^+)$;同样可定义$f(a^-)$.

4° $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists A>0$,当$|x|>A$时$|f(x)-l|<\varepsilon$.一般地,$\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists A>0$,当$|x|>A$时,$|f(x)-l|<\varepsilon$.

5° $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x>A:|f(x)-l|<\varepsilon$,当以上极限存在时,记作$f(+\infty)$;同样可定义$f(-\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)$.

6° 序列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$(或写作$x_n\to l$)$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N$时$|x_n-l|<\varepsilon$.

上述每种极限都可推广到$l=\pm\infty$的情况.例如,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty\Leftrightarrow\forall A>0,\exists N>0,\forall n>N$时$x_n>A$;$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n)=+\infty$.

约定以$\lim f(x)$或$\lim u$表示极限1°~6°中任一种.若$\lim u=l\neq\pm\infty$,则称u(在给定极限过程中)收敛于l;若$\lim u=\pm\infty$,则称u发散于$\pm\infty$;若$\lim u$不存在,则称u发散(且没有极限).

1.2.2 极限的性质

(1) 唯一性 若$\lim u=l$,$\lim u=k$,则$l=k$.

(2) 有界性 若当$x\to a$时$f(x)$收敛,则$\exists\delta>0$,$f(x)$在$0<|x-a|<\delta$内有界;若$x\to+\infty$时$f(x)$收敛,则$\exists A>0$,$f(x)$在$(A,+\infty)$内有界.对其他情况有类似结论.

(3) 运算性质 若u,v收敛,则

$$\lim(u\pm v)=\lim u\pm\lim v;$$

$$\lim uv=\lim u\lim v;$$

$$\lim\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\lim u}{\lim v}(\lim v\neq 0).$$

(4) 复合函数的极限 若$\lim u=a$,则$\lim f(u)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$,只要右端极限存在.

(5) 比较性质 设$x_n\to a,y_n\to b(n\to\infty)$.若当$n$充分大时$x_n\leqslant y_n$,则$a\leqslant b$.若$a<b$,则当$n$充分大时$x_n<y_n$.由此推出"极限的保号性":

1° 若当n充分大时$x_n\geqslant 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$.

2° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$，则当 n 充分大时 $x_n > 0$.

对其他类型极限有类似结论.

1.2.3 收敛判别法

(1) **柯西(Cauchy)收敛准则** 序列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall m, n > N: |x_m - x_n| < \varepsilon$；当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 收敛的充要条件是 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in (a-\delta, a+\delta)$，当 $x, y \neq a$ 时 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 对其他情况有类似结论.

(2) **单调有界收敛原理** 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调，则当 $x \to a^+$ 时 $f(x)$ 收敛的充要条件是 $f(x)$ 在区间 $(a, c)(a < c < b)$ 上有界. 对极限 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 有类似结论.

(3) **挤压原理** 若 $u \leqslant v \leqslant w$，$\lim u = \lim w$，则 $\lim v = \lim u$.

(4) 函数极限与序列极限 当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 收敛于 l 的充要条件是对任何趋于 $+\infty$ 的序列 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 收敛于 l. 对其他类型的函数极限有类似结论.

例 3 设 $f(x)$ 是增函数，$f(a) = a$，$x_0 < a$，$x_n = f(x_{n-1})(n \geqslant 1)$. 若 $x_0 \leqslant f(x_0)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛.

证 已知 $x_0 \leqslant x_1$. 若 $x_{n-1} \leqslant x_n$，则 $x_n = f(x_{n-1}) \leqslant f(x_n) = x_{n+1}$，这就归纳地证得 $\{x_n\}$ 单调增. 已知 $x_0 < a$. 若 $x_n \leqslant a$，则 $x_{n+1} = f(x_n) \leqslant f(a) = a$，这又归纳地证得 $\{x_n\}$ 有界. 因此 $\{x_n\}$ 收敛.

例 4 设 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$，证明 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 发散.

证 令 $x_n = (n\pi)^{-1}$，$y_n = \left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)^{-1}$，则当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to 0$，$y_n \to 0$，$f(x_n) = 0$，$f(y_n) = 1$，因而 $f(x_n) \to 0$，$f(y_n) \to 1$，可见 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 不存在.

1.2.4 无穷小量与无穷大量

(1) 定义 若 $\lim u = 0$，则称 u 为(给定极限过程中的)无穷小量；若 $u \neq 0$，$\dfrac{1}{u}$ 为无穷小量，则称 u 为(给定极限过程中的)无穷大量.

(2) o 记号与 O 记号 若 $\lim \dfrac{u}{v} = 0$，则记作 $u = o(v)$；若 $\lim \dfrac{u}{v} = l$，$0 < |l| < \infty$，则记作 $u = O(v)$. 由此有：u 是无穷小量 $\Leftrightarrow u = o(1)$；$\lim u = l \Leftrightarrow u = l + o(1)$.

(3) 无穷小量的阶 设 u, v 是同一极限过程中的无穷小量. 若 $u = o(v)$(或 $u = O(v)$)，则称 u 是比 v 的高阶(或同阶)无穷小量. 若 $u = O(v^k)(k > 0)$，则称 u 是 v 的 k 阶无穷小量.

(4) 等价无穷小量 若 u, v 是同一极限过程中的无穷小量，$\lim \dfrac{u}{v} = 1$，则称 u 与 v 是等价无穷小量，记作 $u \sim v$. 若 $u \sim v$，则在极限计算中 u 与 v 可按以下方

式互相替换：

$$\lim uw = \lim vw;\quad \lim \frac{w}{u} = \lim \frac{w}{v}.$$

(5) 无穷小量的运算　有限个无穷小量之和(或积)是无穷小量；无穷小量与有界量之积是无穷小量.

例 5　从极限式可转化出无穷小量的等价式：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow e^x - 1 \sim x;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \ln(1+x) \sim x;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \Rightarrow (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

1.2.5 上极限与下极限

(1) 定义　对一序列$\{x_n\}$,令

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n} x_k;$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)$$

(二者必定存在,且$-\infty \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leqslant +\infty$),分别称为当$n\to\infty$时$x_n$的**上极限与下极限**.关于其他极限过程的上、下极限可类似定义.下面以$\overline{\lim} u$与$\underline{\lim} u$泛指相对于任何极限过程的上、下极限.

(2) 运算性质　在同一极限过程中下列式子成立：

$$\underline{\lim}(u+v) \geqslant \underline{\lim} u + \underline{\lim} v;$$

$$\overline{\lim}(u+v) \leqslant \overline{\lim} u + \overline{\lim} v;$$

$$\underline{\lim} uv \geqslant \underline{\lim} u\ \underline{\lim} v\quad (u,v\geqslant 0);$$

$$\overline{\lim} uv \leqslant \overline{\lim} u\ \overline{\lim} v\quad (u,v\geqslant 0);$$

$$\overline{\lim} u^{-1} = (\underline{\lim} u)^{-1}\quad (u>0).$$

若$\lim u$存在,则上面的不等式成为等式.

(3) 比较性质　若$u\leqslant v$,则

$$\underline{\lim} u \leqslant \underline{\lim} v;\quad \overline{\lim} u \leqslant \overline{\lim} v.$$

若$a\leqslant u\leqslant b$, a,b为常数,则

$$a \leqslant \underline{\lim} u \leqslant \overline{\lim} u \leqslant b.$$

(4) 与极限的关系　$\lim u$ 存在 $\Leftrightarrow \underline{\lim} u = \overline{\lim} u (=\lim u)$;

$$\lim u = l \Leftrightarrow \overline{\lim} |u-l| \leqslant 0.$$

例 6　施笃兹(Stolz)定理：设$b_n < b_{n+1} (n\geqslant 1)$, $b_n\to+\infty$, $\dfrac{(a_{n+1}-a_n)}{(b_{n+1}-b_n)}\to l$,

证明$\frac{a_n}{b_n} \to l$.

证 令 $a_0 = b_0 = 0, x_n = a_n - a_{n-1}, y_n = b_n - b_{n-1}(n \geqslant 1)$,则$\frac{x_n}{y_n} \to l$.可设 $l = 0$(否则以 $x_n - l y_n$ 代x_n),令 $z_n = \sup\limits_{k \geqslant n}\left|\frac{x_k}{y_k}\right|$,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|a_m|}{b_n} + \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|x_{m+1}| + \cdots + |x_n|}{b_n}$$
$$\leqslant 0 + \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{z_m(y_{m+1} + \cdots + y_n)}{b_n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{z_m(b_n - b_m)}{b_n} = z_m,$$

于是$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 0$,因此$\frac{a_n}{b_n} \to l = 0$.

1.3 连 续 性

1.3.1 连续函数概念

(1) 一元实函数的连续性 设$f(x)$是区间I上的实函数,$x_0 \in I$.若$f(x_0^+) = f(x_0)$(或$f(x_0^-) = f(x_0)$),则称f在x_0右连续(或左连续).若x_0是I的内点,f在x_0左、右连续,则称f在x_0连续.若f在I上每点连续(在端点只要求左或右连续),则称f在I上连续.若f在x_0不连续,则称x_0为f的间断点.若$f(x_0^\pm)$存在但x_0是间断点,则称x_0为第一类间断点;其他间断点称为第二类间断点.

(2) 多元函数的连续性 设$f(P)$是区域$D(\subset \mathbf{R}^n)$上的实函数,$P_0 \in D$.若$\lim\limits_{P\in D, P\to P_0} f(P) = f(P_0)$,则称$f$在$P_0$连续.若$f$在$D$上每点连续,则称$f$在$D$上连续.若$f$在$P_0$不连续,则称$P_0$为$f$的间断点.若$\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = l$存在且有限,但$l \neq f(P_0)$或$f(P_0)$无定义,则称$P_0$为可去间断点.

(3) 向量值函数的连续性 设$\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$是区间$I$上的向量值函数.若$x(t), y(t), z(t)$皆在$I$上连续,则称$\boldsymbol{r}(t)$在$I$上连续,且确定一条空间连续曲线.

(4) 向量场的连续性 设$\boldsymbol{F} = \{P, Q, R\}$是区域$D(\subset \mathbf{R}^3)$上的向量场.若$P, Q, R$皆在$D$上连续,则称$\boldsymbol{F}$在$D$上连续.

1.3.2 连续函数的运算

连续函数的和、差、积、商(分母不为零)与复合函数是连续函数;严格单调的连续函数的反函数是连续函数.

可直接验明基本初等函数在其有定义的区间内连续.于是,由连续函数的运算

性质得出结论:初等函数在其有定义的区间(或区域)内连续.

例 7　设 f,g 是 D 上的连续函数,$\varphi = \max\{f,g\}$.证明 φ 是连续函数.

证　显然 $h(x) = |x|$ 连续.因可验证

$$\varphi = \frac{1}{2}[f + g + h\circ(f-g)],$$

故由连续函数的运算性质得出 φ 连续.

1.3.3　连续函数的性质

设 f 是区域 $D(\subset \mathbf{R}^n)$ 上的连续实函数.

(1) **介值定理**　若 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\in D$,$f(\boldsymbol{P}) \leqslant r \leqslant f(\boldsymbol{Q})$,则存在 $\boldsymbol{A}\in D$,使 $f(\boldsymbol{A}) = r$.因此,f 的值域是一个区间.

(2) **最值定理**　若 D 是有界闭区域,则 f 在 D 上达到最大值 M 与最小值 m,即存在 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in D$,使得 $\forall \boldsymbol{P}\in D$,有 $m = f(\boldsymbol{A}) \leqslant f(\boldsymbol{P}) \leqslant f(\boldsymbol{B}) = M$.因此,$f$ 在 D 上有界,且其值域为 $[m,M]$.

(3) **一致连续性定理**　若 D 是有界闭区域,则 f 在 D 上一致连续,即 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,当 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\in D$,$|\boldsymbol{PQ}| < \delta$ 时 $|f(\boldsymbol{P}) - f(\boldsymbol{Q})| < \varepsilon$.

例 8　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$a \leqslant f(x) \leqslant b\,(a \leqslant x \leqslant b)$,证明方程 $f(x) = x$ 在 $[a,b]$ 上有解.

证　令 $g(x) = f(x) - x$,则 $g(b) \leqslant 0 \leqslant g(a)$,于是由介值定理有 $\xi\in[a,b]$,使 $g(\xi) = 0$,即 $f(\xi) = \xi$.

例 9　设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续,$f(a^+) = f(b^-) = +\infty$,证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内达到最小值.

证　任取 $c\in(a,b)$.由 $f(a^+) = f(b^-) = +\infty$ 推出,$\exists \alpha\in(a,c)$,$\beta\in(c,b)$,$\forall x\in(a,\alpha)\cup(\beta,b)$,有 $f(x) > f(c)$.由最值定理,有 $\xi\in[\alpha,\beta]$,使 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的最小值.因 $f(\xi) \leqslant f(c)$,故 $f(\xi)$ 亦必为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的最小值.

2　微　分　学

2.1　导数与微分

2.1.1　导数

(1) 一元函数的导数　设 $y = f(x)$ 是定义于区间 I 上的实函数,$x_0\in I$.令

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

三者分别称为 $f(x)$ 在 x_0 的**导数**、**右导数**与**左导数**. $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_{+}(x_0)$ 与 $f'_{-}(x_0)$ 皆存在且相等. 若 $f'(x_0)$ 存在且有限,则称 $f(x)$ 在 x_0 可导. 若 f 在 I 上每点可导,则称 f 在 I 上可导. $f'(x)$ 也写作 y' 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(2) **偏导数**　设 $u = f(x,y)$, $f(x,y)$ 对 x(将 y 看作常量)的导数称为 f 对 x 的**偏导数**,记作 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 或 f_x, u_x. 类似地可定义 f 对 y 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 或 f_y, u_y. 同理也可定义 n 元函数的偏导数.

(3) **向量值函数的导数**　设 $\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ 与 $\boldsymbol{F} = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$ 分别为一元与二元向量值函数. 令

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\};$$

$$\boldsymbol{F}_u = \{x_u, y_u, z_u\}, \quad \boldsymbol{F}_v = \{x_v, y_v, z_v\}.$$

三者分别称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导数、$\boldsymbol{F}$ 对 u 的偏导数与 $\boldsymbol{F}$ 对 v 的偏导数,这些导数皆为向量.

(4) **高阶导数**　若 $f'(x)$ 之导数存在,则称之为 f 的二阶导数,记作 $f''(x)$. 一般地,称 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 之导数为 f 的 $n+1$ 阶导数. n 阶导数等价地记为 $f^{(n)}$ 或 $y^{(n)}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$. 多元函数的高阶偏导数类似地依次定义. 例如,对 $u = f(x,y)$ 有

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

$$f_{xxy} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right].$$

若偏导数存在且连续,则它与求导顺序无关. 例如,若 u_{xy}, u_{yx} 存在且连续,则 $u_{xy} = u_{yx}$.

(5) **C^r 函数**　若 f 有所有直到 r 阶为止的连续(偏)导数,则称 f 为 **C^r 函数**,或说 f 为 r 次连续可微. 称 C^1 函数为**连续可微函数**.

2.1.2　微分

(1) **一元函数的微分**　设 $y = f(x)$ 在区间 I 上定义, $x_0 \in I$. 若存在常数 A, 使当 $\Delta x \to 0$ 时有

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x),$$

则称 f 在 x_0 可微,并称 $A\Delta x$ 为 f 在 x_0 的**微分**,记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x_0)$. f 在 x_0 可微的充要条件是 f 在 x_0 可导,且当 f 在 x_0 可导时 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$. 令 $y = x$ 得 $\mathrm{d}x = \Delta x$,因此

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x \quad 或 \quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

(2) 多元函数的微分 设 $u=f(\boldsymbol{P})$ 在区域 $D(\subset \mathbf{R}^n)$ 上定义，$\boldsymbol{P}_0\in D$. 若存在常数 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$，使当 $\rho=|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}|\to 0$ 时有

$$\Delta u = f(\boldsymbol{P})-f(\boldsymbol{P}_0)=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i+o(\rho),$$

其中 $(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0$，则称 f 在 $\boldsymbol{P}_0$ 可微，并称 $\sum A_i\Delta x_i$ 为 f 在 $\boldsymbol{P}_0$ 的微分或**全微分**，记作 $\mathrm{d}u$ 或 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{P}_0)$. 若 f 在 $\boldsymbol{P}_0$ 可微，则 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{P}_0)}{\partial x_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 必存在，且

$$\mathrm{d}u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{P}_0)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i,\quad \mathrm{d}x_i=\Delta x_i.$$

C^1 函数必定可微.

(3) 向量值函数的微分 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ 与 $\boldsymbol{F}=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$ 的微分分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\},$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{F}_v\mathrm{d}v=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\},$$

只要以上等式的右端存在，则 $\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{F}$ 的微分就存在.

2.1.3 微分规则

微分规则如下：

1° 线性规则

$$\Big(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i\Big)'=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f'_i,\quad \Big(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i\Big)^{(n)}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i^{(n)};$$

$$\mathrm{d}\Big(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i\Big)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathrm{d}u_i\quad(\alpha_i\text{ 是常数}).$$

2° 积规则(**莱布尼兹规则**)

$$(fg)'=f'g+fg',$$

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)};$$

$$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v.$$

3° 商规则

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}\quad(g\neq 0);$$

$$\mathrm{d}\Big(\frac{u}{v}\Big)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\quad(v\neq 0).$$

4° 链规则

$$\frac{\partial}{\partial x}f(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x};$$

$$\mathrm{d}f(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i.$$

取 $n = 1$，且设 $u(x)$ 是一元函数，得

$$[f(u(x))]' = f'(u(x))u'(x).$$

以上规则的条件是等式右端有意义，对链规则还要求 f 可微. 注意求导规则与求微分的规则互成对应，习惯上二者统称为微分规则.

2.1.4 隐函数的微分法

(1) 雅可比(Jacobi)矩阵与雅可比行列式　给定函数组

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i = 1,2,\cdots,m.$$

令

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}; \tag{2-1}$$

当 $m = n$ 时，令

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \det \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}. \tag{2-2}$$

二者分别称为所给函数组的雅可比矩阵与雅可比行列式.

(2) **隐函数定理**　设 $F_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)(1 \leqslant i \leqslant m)$ 是连续可微函数，$F_i(x_1^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, \cdots, y_m^0) = 0(1 \leqslant i \leqslant m)$，在点$(x_1^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, \cdots, y_m^0)$处

$$\frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_m)} \neq 0.$$

则在点$(x_1^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, \cdots, y_m^0)$邻近，方程组

$$F_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

有唯一组解 $y_i = y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)(1 \leqslant i \leqslant m)$，$y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 连续可微，且

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = -\left[\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}\right]^{-1} \frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)},$$

这相当于

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = -\frac{D(F_1, \cdots, F_i, \cdots, F_m)}{D(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)} \Big/ \frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_m)}$$
$$(i = 1,2,\cdots,m, \ j = 1,2,\cdots,n). \tag{2-3}$$

特别，取 $m = n = 1$ 得

$$y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -F_x/F_y, \tag{2-4}$$

其中 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y)$ 确定的隐函数.

(3) 反函数的微分法　设 $y_i = y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是连续可微函数，在点$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$处

$$\frac{D(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)} \neq 0,$$

$$y_i^0 = y_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0) \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

则在$(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_1^0,\cdots,y_n^0)$邻近函数

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mapsto (y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

有反函数 $x_i = x_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)(1 \leqslant i \leqslant n)$,它满足

$$x_i^0 = x_i(y_1^0,y_2^0,\cdots,y_n^0),$$

且

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)} = \left[\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right]^{-1}.$$

特别地,对于一元函数 $y = f(x)$,当 $f'(x) \neq 0$ 时,存在反函数 $x = \varphi(y)$,其导数为

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))} \quad 或 \quad \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}. \tag{2-5}$$

(4) 由参数表示的函数的微分法　设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 表示,$x'(t),y'(t)$ 存在且 $x'(t) \neq 0$,则

$$y_x' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'}. \tag{2-6}$$

2.1.5 梯度与方向导数

设 $u = f(x,y,z)$ 定义于区域 D 上.

(1) 梯度　若偏导数 f_x,f_y,f_z 存在,则称向量

$$\mathbf{grad}\,u = \{f_x,f_y,f_z\}$$

为 f 的**梯度**.

(2) 方向导数　设 $\boldsymbol{P}_0 \in D$, $\boldsymbol{n}$ 是一非零向量,l 是从点 $\boldsymbol{P}_0$ 出发沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的射线,$\boldsymbol{P}$ 为 l 上一点,$\rho = |\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}|$,则定义 f 在点 $\boldsymbol{P}_0$ 沿 $\boldsymbol{n}$ 的**方向导数**为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{P}_0)}{\partial n} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(\boldsymbol{P}) - f(\boldsymbol{P}_0)}{\rho}.$$

若 f 在 $\boldsymbol{P}_0$ 可微,则 $\partial f(\boldsymbol{P}_0)/\partial n$ 必存在,且

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{P}_0)}{\partial n} = \mathbf{grad}\,f(\boldsymbol{P}_0)\cdot\boldsymbol{n}^0 = f_x(\boldsymbol{P}_0)\cos\alpha + f_y(\boldsymbol{P}_0)\cos\beta + f_z(\boldsymbol{P}_0)\cos\gamma, \tag{2-7}$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是$\boldsymbol{n}$ 的方向余弦,$\boldsymbol{n}^0 = \{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

2.2 中 值 定 理

2.2.1 罗尔定理

罗尔(Rolle)定理　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微,$f(a) = f(b)$,

则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) \neq 0$

罗尔定理中的 ξ 称为"中值". 罗尔定理常被用来证明某些含中值的等式.

例 1 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，$g'(x) \neq 0 (a < x < b)$. 证明存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 令 $F(x) = [f(x) - f(a)][g(b) - g(x)]$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，$F(a) = F(b) = 0$. 于是由罗尔定理有 $\xi \in (a,b)$，使得

$$F'(\xi) = f'(\xi)[g(b) - g(\xi)] - [f(\xi) - f(a)]g'(\xi) = 0.$$

由条件 $g'(x) \neq 0 (a < x < b)$ 推出 $g'(\xi) \neq 0, g(b) \neq g(\xi)$. 于是由上式推出要证的等式.

其次，由罗尔定理推出：若 $f(x)$ 可微，则方程 $f(x) = 0$ 的两根之间必有方程 $f'(x) = 0$ 的根.

例如，设 $f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$. 因 $f(1) = f(2) = f(3) = 0$，故由罗尔定理知，方程 $f'(x) = 0$ 在区间 $(1,2)$ 与 $(2,3)$ 内各有一根.

2.2.2 拉格朗日中值定理

(1) 一元函数的**拉格朗日(Lagrange) 中值定理** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \tag{2-8}$$

此等式可改写成如下等价形式：

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a), \tag{2-9}$$

其中 $0 < \theta < 1$. (2-8) 式与 (2-9) 式皆称为微分中值公式，它们亦可用于 $a > b$ 的情况.

(2) 多元函数的**拉格朗日中值定理** 设 $\boldsymbol{A}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $\boldsymbol{B}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中两点，f 在包含线段 $\boldsymbol{AB}$ 的某区域内定义且在 $\boldsymbol{AB}$ 上每点可微，则存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$f(\boldsymbol{B}) - f(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{A} + \theta(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}))}{\partial x_i}(b_i - a_i). \tag{2-10}$$

在 (2-10) 式中令 $n = 1$，恰好得出公式 (2-9). (2-10) 式也称为微分中值公式.

(3) 函数为常数的条件 由 (2-9) 式或 (2-10) 式可推出，区间（或区域）上的可微函数 f 为常数的充要条件是 $f' \equiv 0$（或 $\mathbf{grad}\, f \equiv 0$）. 这又可推出，区间（或区域）上的可微函数 f, g 相差一常数的充要条件是 $f' \equiv g'$（或 $\mathbf{grad}\, f \equiv \mathbf{grad}\, g$）.

拉格朗日中值定理常用来证明不等式与恒等式.

例 2 证明 $|\arctan x - \arctan y| \leqslant |x - y|$.

证 令 $f(t) = \arctan t$，则依 (2-9) 式有

$$|\arctan x - \arctan y| = |f'(\xi)(x-y)| = \frac{|x-y|}{1+\xi^2} \leqslant |x-y|.$$

例 3　证明$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$

证　令 $f(x) = \ln x$,则依(2-9)式有

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = f(n+1) - f(n) = f'(n+\theta) = \frac{1}{n+\theta},$$

其中 $0 < \theta < 1$.由此可直接看出所要证不等式成立.

例 4　证明 $\arctan x = \frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$.

证　令 $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$,则 $f(x)$ 在$(-1,1)$内可微,且易直接验知 $f'(x) \equiv 0$.于是 $f(x) \equiv f(0) = 0$,此即所要证.

2.2.3　柯西中值定理

柯西中值定理　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在$[a,b]$上连续、在(a,b)内可微,$g'(x) \neq 0 (a < x < b)$,则存在 $\xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{2-11}$$

通常称(2-11)式为柯西中值公式.

柯西中值公式亦被用于证明某些不等式.

例 5　证明 $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{\pi}$ $(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$.

证　利用公式(2-11)及不等式 $2x/\pi \leqslant \sin x \leqslant x$ 得

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\cos x - 1}{x^2 - 0} = \frac{-\sin\xi}{2\xi} \leqslant -\frac{1}{\pi},$$

其中 $0 < \xi < x \leqslant \pi/2$.由此得出所要证不等式.

2.2.4　洛必达法则

洛必达(L'Hospital)法则　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间(a,b)内可微且 $g'(x) \neq 0$,当 $x \to a^+$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为无穷小量或均为无穷大量,则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{2-12}$$

只要上式右端极限存在(有限或无限).若将(2-12)式中的 $x \to a^+$ 换成 $x \to a^-$ 或 $x \to a$, $x \to \pm\infty$,且其他条件亦作相应改变,则结论仍成立.

例 6　求 $l = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x - 1 - x\ln x}{(x-1)\ln x}$.

解　相继两次应用洛必达法则:

$$l = \lim_{x\to 1}\frac{-\ln x}{\ln x + 1 - x^{-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{-x^{-1}}{x^{-1} + x^{-2}} = -\frac{1}{2}.$$

例 7　求 $l = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln(1+x)}$.

解　取对数后计算极限:

$$\ln l = \lim_{x\to 0^+} \ln x \ln(1+x) = \lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = 0,$$

故得

$$l = e^0 = 1.$$

2.3 泰勒公式

2.3.1 一元函数的泰勒公式

(1) 泰勒(Taylor)公式 设$f(x)$在包含点a的某区间I上定义,且在$x = a$处n次可微.令

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{2-12}$$

则

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \ (x \in I),$$

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \ (x \in I). \tag{2-13}$$

称(2-13)式为$f(x)$在$x = a$的**n阶泰勒公式**,而$T_n(x)$与$R_n(x)$分别称为$f(x)$在$x = a$的n阶泰勒多项式与n阶余项.当$x \to a$时$R_n(x) = o(|x-a|^n)$.(2-13)式的有效应用取决于$R_n(x)$的更精细的表达式.

(2) 余项的各种形式

拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1}; \tag{2-14}$$

柯西余项

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}; \tag{2-15}$$

积分余项

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t, \tag{2-16}$$

其中$x \in I, 0 < \theta < 1$,(2-14)式与(2-15)式中的θ不必相同.三者分别称为余项的拉格朗日形式、柯西形式与积分形式.前两个公式要求f在I上n次连续可微,在I内部$n+1$次可微;(2-16)式要求f在I上$n+1$次连续可微.若取$a = 0$,则公式(2-14) ~ (2-16)简化为

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x);$$

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}f^{(n+1)}(\theta x);$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 零阶泰勒公式 在(2-13)式中取$n = 0$,而$R_n(x)$用拉格朗日形式,得到

$$f(x) = f(a) + f'(a+\theta(x-a))(x-a).$$

其中 $x \in I, 0 < \theta < 1$. 这正是微分中值公式(2-9). 可见, 泰勒公式可看作微分中值公式的高阶形式.

2.3.2 多元函数的泰勒公式

设 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在区域 $D(\subset \mathbf{R}^n)$ 上 $m+1$ 次连续可微. $\boldsymbol{a} \in D$. 则当连结 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ 的线段含于 D 时下式成立

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^\alpha + \\ &\quad \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^\alpha \\ &= T_m(\boldsymbol{x}) + R_m(\boldsymbol{x}), 0 < \theta < 1, \end{aligned} \tag{2-17}$$

其中

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}_+^n,$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!;$$

$$\partial^\alpha f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}};$$

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^\alpha = (x_1 - a_1)^{\alpha_1}(x_2 - a_2)^{\alpha_2} \cdots (x_n - a_n)^{\alpha_n}.$$

(2-17) 式中的 $T_m(\boldsymbol{x})$ 与 $R_m(\boldsymbol{x})$ 分别称为 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 的 m 阶泰勒多项式与 m 阶余项. 取 $m = 0$ 得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))}{\partial x_i}(x_i - a_i),$$

这正是微分中值公式(2-10).

2.3.3 某些初等函数的泰勒公式

(1) $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\theta x} \quad (|x| < \infty).$

(2) $\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x \quad (|x| < \infty).$

(3) $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x \quad (|x| < \infty).$

(4) $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{k!}x^k + \frac{x^{n+1}}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n) \cdot (1-\theta)^n(1+\theta x)^{\alpha-n-1} \quad (|x| < 1),$

其中 $0 < \theta < 1, \alpha \neq 0, 1, 2, \cdots$.

(5) $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n).$

利用以上基本展开式进行适当组合与变形, 可得出更多的初等函数的泰勒公式, 甚至可得出某些多元函数的泰勒公式.

例 8 求 $\tan x$ 在 $x=0$ 的 3 阶泰勒公式.

解 利用 $\sin x, \cos x$ 与 $(1-x)^{-1}$ 的泰勒公式,有

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}\\&=\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\left[1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right]\\&=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3).\end{aligned}$$

例 9 求 $u=\ln(1+x)\ln(1+y)$ 在点 $(0,0)$ 的 3 阶泰勒公式.

解 利用 $\ln(1+x)$ 的泰勒公式,有

$$\begin{aligned}u &= \left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right]\\&=xy-\frac{x^2y}{2}-\frac{xy^2}{2}+o(\rho^3),\end{aligned}$$

其中

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

2.3.4 泰勒公式的应用

(1) 分离无穷小主部 若求得 $f(x)$ 在 $x=0$ 的泰勒公式 $f(x)=\alpha x^n+o(x^n)$, $\alpha\neq 0$,则当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小量.称 αx^n 为无穷小量 $f(x)$ 的主部.

(2) 计算极限 若求得泰勒公式 $f(x)=\alpha x^m+o(x^m)$, $g(x)=\beta x^n+o(x^n)$, $\alpha\beta\neq 0$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^m+o(x^m)}{\beta x^n+o(x^n)}=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta} & (m=n);\\ 0 & (m>n).\end{cases}$$

(3) 近似计算 由泰勒公式得出近似公式

$$f(x)\approx T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

其误差由适当的余项公式(2-14) ~ (2-16)估计.

例 10 求 $l=\lim\limits_{x\to 0}x^{-4}(\cos x-e^{-x^2/2})$ 的值.

解 由泰勒公式有

$$\begin{aligned}\cos x-e^{-x^2/2}&=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right]\\&=-\frac{x^4}{12}+o(x^4).\end{aligned}$$

于是

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left[-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\right]=-\frac{1}{12}.$$

例 11 求 $\sin 20°$ 的近似值.

解 由 $\sin x$ 的泰勒公式有

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cos\theta x \quad (0 < \theta < 1).$$

以 $x = 20° = \pi/9$ 代入得

$$\sin 20° \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \approx 0.34198;$$

$$\left| R_3\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| = \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 \cos\frac{\theta\pi}{9} < \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 \approx 0.000043.$$

3 微分学的应用

3.1 函数的动态

3.1.1 单调性

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可微,则

1° $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增(或单调减)的充要条件是在 (a,b) 内 $f'(x) \geqslant 0$(或 $f'(x) \leqslant 0$).

2° $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增(或严格单调减)的充要条件是在 (a,b) 内 $f'(x) \geqslant 0$(或 $f'(x) \leqslant 0$),且使 $f'(x) = 0$ 的点 x 不充满 (a,b) 的任何子区间.

上述结论常用来证明不等式.

例 1 证明 $x^{\alpha}y^{\beta} \leqslant \alpha x + \beta y \ (x,y > 0, 0 < \alpha = 1 - \beta < 1)$.

证 不妨设 $x \geqslant y$($x < y$ 时同样可证).令 $f(x) = \alpha x + \beta y - x^{\alpha}y^{\beta}$,则

$$f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} = \alpha\left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta}\right] \geqslant 0,$$

因此 $f(x)$ 在区间 $[y, +\infty)$ 上单调增,从而 $f(x) \geqslant f(y)$.可验证 $f(y) = 0$,故 $f(x) \geqslant 0$,此即所要证.

3.1.2 一元凸函数

设 $f(x)$ 定义于区间 I 上.

(1) 定义 若对任给 $x, y \in I, x \neq y, 0 < \lambda < 1$,有

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \tag{3-1}$$

则称 f 为**凸函数**,而称 $-f$ 为凹函数.若(3-1)式中仅 $<$ 号成立,则称 f 为严格凸函数,而称 $-f$ 为严格凹函数.

(2) 凸性条件 若 $f(x)$ 在 I 上可微,则 $f(x)$ 是凸(或严格凸)函数的充要条件是 $f'(x)$ 是单调增(或严格单调增)函数.若 $f(x)$ 在 I 上两次可微,则 $f(x)$ 是凸函数的充要条件是 $f''(x) \geqslant 0(x \in I)$;$f(x)$ 是严格凸函数的充要条件是 $f'(x) \geqslant$

$0(x \in I)$，且使 $f''(x)=0$ 的点 x 不充满 I 的任何子区间.

例 2 证明 $(x+y)\ln\frac{x+y}{2} \leqslant x\ln x + y\ln y\ (x,y>0)$.

证 令 $f(x)=x\ln x$，则 $f''(x)=\frac{1}{x}>0\ (x>0)$，因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凸函数，于是由(3-1)式有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x)+f(y)],$$

此即所要证不等式.

3.1.3 多元凸函数

设 $f(\boldsymbol{P})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 定义于区域 $D(\subset \mathbf{R}^n)$ 上.

(1) 凸集　若 $\forall \boldsymbol{P},\boldsymbol{Q} \in D$，线段 $\boldsymbol{PQ}$ 含于 D，则称 D 为凸集.

(2) 凸函数　设 D 是凸集，若对任给 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q} \in D$，$\boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{Q}$，$0<\lambda<1$，有

$$f((1-\lambda)\boldsymbol{P}+\lambda(\boldsymbol{Q}) \leqslant (1-\lambda)f(\boldsymbol{P})+\lambda f(\boldsymbol{Q}), \tag{3-2}$$

则称 f 为**凸函数**，而称 $-f$ 为凹函数. 若(3-2)式中仅"<"号成立，则称 f 为严格凸函数，而称 $-f$ 为严格凹函数.

(3) 凸性条件　设 f 在凸区域 D 上二次可微. 则 f 为凸函数的充要条件是：黑塞(Hesse)矩阵

$$\boldsymbol{H}=\left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{P})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,2,\cdots,n}$$

处处半正定. 若 $\boldsymbol{H}$ 在 D 上处处正定，则 f 严格凸.

例 3 研究函数 $f(x,y)=x+\frac{2}{xy}\ (x,y>0)$ 的凸性.

解 $f(x,y)$ 的黑塞矩阵为

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} \frac{4}{x^3y} & \frac{2}{x^2y^2} \\ \frac{2}{x^2y^2} & \frac{4}{xy^3} \end{bmatrix}=\frac{2}{x^2y^2}\begin{bmatrix} \frac{2y}{x} & 1 \\ 1 & \frac{2x}{y} \end{bmatrix}.$$

易验证 $\boldsymbol{H}$ 在 $x,y>0$ 时处处正定，故 $f(x,y)$ 为严格凸函数.

3.2 极　　值

3.2.1 自由极值

设 $f(\boldsymbol{P})$ 定义于区域 $D(\subset \mathbf{R}^n)$ 上，$\boldsymbol{P}_0 \in D$.

(1) 定义　若存在 $\boldsymbol{P}_0$ 的邻域 $N \subset D$，使得 $\forall \boldsymbol{P} \in N$：$f(\boldsymbol{P}) \geqslant f(\boldsymbol{P}_0)$(或 $f(\boldsymbol{P}) \leqslant f(\boldsymbol{P}_0)$)，则称 $\boldsymbol{P}_0$ 为 f 的极小值点(或极大值点)，称 $f(\boldsymbol{P}_0)$ 为极小值(或极大值). 极小值与极大值统称**极值**或**自由极值**；极小值点与极大值点统称为极值点.

(2) 极值的必要条件　若 $f(\boldsymbol{P})$ 在极值点 $\boldsymbol{P}_0$ 可微，则 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{P}_0)=0$(对一元函数

f 是 $f'(\boldsymbol{P}_0)=0$).

(3) 二阶充分条件　若 $f(\boldsymbol{P})$ 二次连续可微,$\mathrm{d}f(\boldsymbol{P}_0)=0$,黑塞矩阵 $\boldsymbol{H}$ 在 $\boldsymbol{P}_0$ 处正定(负定),则 $f(\boldsymbol{P}_0)$ 是极小值(极大值).对于一元函数 $f(x)$,若 $f(x)$ 两次可微,$f'(x_0)=0, f''(x_0)>0(f''(x_0)<0)$,则 $f(x_0)$ 是极小值(极大值).

(4) 高阶充分条件　设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 次可微,$f^{(k)}(x_0)=0(1\leqslant k<n)$,$f^{(n)}(x_0)>0$,则当 n 为偶数时 $f(x_0)$ 是极小值,当 n 为奇数时 $f(x_0)$ 非极值.

3.2.2　最大值与最小值

(1) 设 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数,仅在 (a,b) 内有有限个点 $x_1, x_2,\cdots,x_k$ 处 f' 为零(称这种点为驻点)或 f 不可微(以上点合称为受检点),则 f 在 $[a,b]$ 上的最大值 $y_{\max}$ 与最小值 $y_{\min}$ 分别为

$$y_{\max}=\max\{f(x_1),\cdots,f(x_k),f(a),f(b)\};$$
$$y_{\min}=\min\{f(x_1),\cdots,f(x_k),f(a),f(b)\}.$$

(2) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续,有唯一受检点 x_0,且 $f(x_0)\leqslant f(a^+),f(b^-)$(当 $a=-\infty$ 时 $f(a^+)$ 代以 $f(-\infty)$,$b=+\infty$ 时仿此),则 $f(x_0)=\min\limits_{a<x<b}f(x)$;若 $f(x_0)\geqslant f(a^+),f(b^-)$,则 $f(x_0)=\max\limits_{a<x<b}f(x)$.

(3) 设 $y=f(\boldsymbol{P})$ 是有界闭区域 $D(\subset\mathbf{R}^n)$ 上的连续函数,它在 D 内部的受检点(意义如(1))为 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_k$,在边界 ∂D 上的最大值与最小值分别为 M_0 与 m_0,则 f 在 D 上的最大值 $y_{\max}$ 与最小值 $y_{\min}$ 为

$$y_{\max}=\max\{f(\boldsymbol{P}_1),f(\boldsymbol{P}_2),\cdots,f(\boldsymbol{P}_k),M_0\};$$
$$y_{\min}=\min\{f(\boldsymbol{P}_1),f(\boldsymbol{P}_2),\cdots,f(\boldsymbol{P}_k),m_0\}.$$

(4) 设 $y=f(\boldsymbol{P})$ 在有界闭区域 $D(\subset\mathbf{R}^n)$ 上连续,在 D 内部有唯一受检点 $\boldsymbol{P}_0$.若 $\forall\boldsymbol{P}\in\partial D: f(\boldsymbol{P})\geqslant f(\boldsymbol{P}_0)$(或 $f(\boldsymbol{P})\leqslant f(\boldsymbol{P}_0)$),则 $f(\boldsymbol{P}_0)=y_{\min}$(或 $f(\boldsymbol{P}_0)=y_{\max}$).

按以上方法求最大值与最小值,皆不必对驻点使用充分条件.

例4　求 $y=x^x$ 在 $(0,1)$ 内的最小值 $y_{\min}$.

解　y 在 $(0,1)$ 内可微,且 $y'=x^x(\ln x+1)$,可见 $x_0=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 是唯一驻点.因

$y(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=0.6922\cdots$,

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to1^-}x^x=1>y(\frac{1}{\mathrm{e}}),$$

故

$$y_{\min}=y(\frac{1}{\mathrm{e}}).$$

若求出 $y''=x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}$,则看出 $y''(\dfrac{1}{\mathrm{e}})>0$,即 $y(\dfrac{1}{\mathrm{e}})$ 为极小值的充分条件满足.

例5　求 $z=\mathrm{e}^{xy}(x^2+y^2-1)$ 在 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant1\}$ 上的最大

值 z_{max} 与最小值 z_{min}.

解 z 在 D 上可微. 由方程组

$$\begin{cases} z_x = e^{xy}[y(x^2+y^2-1)+2x] = 0, \\ z_y = e^{xy}[x(x^2+y^2-1)+2y] = 0 \end{cases}$$

解出 z 在 D 内部的唯一驻点 $(0,0)$. 因 $z(0,0) = -1$, 在 ∂D 上 $z = 0$, 故 $z_{max} = 0$, $z_{min} = -1$.

若求出

$$z_{xx} = e^{xy}[y^2(x^2+y^2-1)+4xy+2],$$
$$z_{xy} = e^{xy}[xy(x^2+y^2-1)+3(x^2+y^2)-1],$$
$$z_{yy} = e^{xy}[x^2(x^2+y^2-1)+4xy+2],$$

则看出 z 在点 $(0,0)$ 处的黑塞矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 正定, 即 $z(0,0)$ 为极小值的充分条件满足.

3.2.3 条件极值

(1) 定义 设 $f, g_1, g_2, \cdots, g_m$ 是区域 $D(\subset \mathbf{R}^n)$ 上的函数, $M = \{P \in D \mid g_i(P) = 0 (1 \leqslant i \leqslant m)\}$, $P_0 \in M$. 若 $\forall P \in M$, 有 $f(P) \geqslant f(P_0)$, 则称 P_0 为**条件极值问题**

$$\min f(P), g_i(P) = 0, i = 1,2,\cdots,m \tag{3-3}$$

的最优点或最优解, 称 $f(P_0)$ 为 f 在条件 $g_i(P) = 0 (1 \leqslant i \leqslant m)$ 之下的最小值. f 与 $g_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ 分别称为问题(3-3)的目标函数与约束函数.

(2) 拉格朗日乘数法 令

$$L = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i,$$

称 L 为问题(3-3)的拉格朗日函数, 称 $\lambda_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ 为**拉格朗日乘数**. 设 f, g_i 可微, 形成方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m). \end{cases} \tag{3-4}$$

若 $(\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n}, \overline{\lambda_1}, \cdots, \overline{\lambda_m})$ 是方程组(3-4)的解, 则点 $\overline{P} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})$ 可能为问题(3-3)的最优点. 在具体问题中, $\overline{P}$ 是否为最优点通常可由问题的实际意义决定.

例 6 求抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = x - 2$ 之间的最短距离 d_{min}.

解 由解析几何知, 任一点 (x, y) 到直线 $y = x - 2$ 的距离为 $d = |x - y - 2| / \sqrt{2}$. 于是问题归于解

$$\min(x-y-2)^2, \quad x^2 - y = 0.$$

令 $L = (x-y-2)^2 + \lambda(x^2 - y)$, 解方程组

$$\begin{cases} L_x = 2(x - y - 2) + 2\lambda x = 0, \\ L_y = -2(x - y - 2) - \lambda = 0, \\ L_\lambda = x^2 - y = 0, \end{cases}$$

得

$$\bar{x} = \frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{1}{4}, \quad \lambda = \frac{7}{2}.$$

由问题的几何意义知 $d_{\min}$ 必定达到，它就是

$$d_{\min} = \frac{|\bar{x} - \bar{y} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

3.2.4 关于和与积的极值原理

和(积)的极值原理 当有定和(积)的 n 个正数彼此相等时积最大(和最小). 许多条件极值问题可借此原理而获解决，无需直接运用拉格朗日乘数法.

例 7 求周长一定而面积最大的三角形.

解 设三角形三边长为 a, b, c，因 $a + b + c = 2s = \text{const}$. 由平面几何知，三角形之面积为

$$\sigma = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

因 $(s-a)+(s-b)+(s-c) = s = \text{const}$，故仅当 $s-a = s-b = s-c$ 即 $a = b = c$ 时 $(s-a)(s-b)(s-c)$ 取最大，从而 σ 亦取最大. 于是所求三角形为正三角形.

3.3 几何应用

3.3.1 平面曲线的切线与法线

设平面曲线 L 由参数方程 $x = x(t), y = y(t)$ 或方程 $F(x,y) = 0$ 给定，$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), F(x_0, y_0) = 0$.

(1) 切线方程 L 在点 (x_0, y_0) 的切线为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)}$$

或

$$F_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)(y - y_0) = 0.$$

(2) 法线方程 L 在点 (x_0, y_0) 的法线为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) = 0$$

或

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0,y_0)} + \frac{y - y_0}{F_y(x_0,y_0)} = 0.$$

3.3.2　空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 L 由参数方程

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\ (t \in I)$$

或方程组

$$F(x,y,z) = 0,\quad G(x,y,z) = 0$$

给定，$\boldsymbol{r}(t) = \{x(t),y(t),z(t)\}$，$\boldsymbol{r}(t_0) = \{x_0,y_0,z_0\}$，$P_0 = (x_0,y_0,z_0)$，$F(P_0) = G(P_0) = 0$.

(1) 切向量与切线方程　令 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}'(t)$(或 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{grad}F \times \mathbf{grad}G$). 当 $\boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}$ 时任何与 $\boldsymbol{\tau}$ 共线的向量称为 L 的切向量. 若 $\boldsymbol{r}'(t)$ 连续且不为零，则称 L 为光滑曲线. L 在点 P_0 的切线为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

或

$$\frac{x - x_0}{F_yG_z - F_zG_y} = \frac{y - y_0}{F_zG_x - F_xG_z} = \frac{z - z_0}{F_xG_y - F_yG_x},$$

其中各偏导数在点 P_0 计算.

(2) 法平面方程　L 在点 P_0 的法平面为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

或

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F_x(P_0) & F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ G_x(P_0) & G_y(P_0) & G_z(P_0) \end{vmatrix} = 0.$$

3.3.3　曲面的切平面与法线

设曲面 S 由参数方程

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v) \in D$$

或方程 $F(x,y,z) = 0$ 给定，$\boldsymbol{r}(u,v) = \{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$，$\boldsymbol{r}(u_0,v_0) = \{x_0,y_0,z_0\}$，$P_0 = (x_0,y_0,z_0)$，$F(P_0) = 0$.

(1) 法向量与切平面　令 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$(或 $\boldsymbol{n} = \mathbf{grad}F$). 当 $\boldsymbol{n} \neq \mathbf{0}$ 时称任何与 $\boldsymbol{n}$ 共线的向量为 S 的法向量. S 在点 P_0 的切平面为

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0$$

或

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

(2) 法线方程　S 在点 P_0 的法线为

$$\frac{x-x_0}{y_uz_v-y_vz_u}=\frac{y-y_0}{z_ux_v-z_vx_u}=\frac{z-z_0}{x_uy_v-x_vy_u},$$

或

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}.$$

3.3.4 曲率

(1) 若空间曲线 L 由方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 给定,则

曲率 $$K=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3};$$

曲率半径 $$R=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}.$$

(2) 若平面曲线 L 由方程 $x=x(t),y=y(t)$ 给定,则

曲率 $$K=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}};$$

曲率半径 $$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y''-x''y'|}.$$

(3) 若平面曲线 L 由方程 $y=y(x)$ 给定,则

曲率 $$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}};$$

曲率半径 $$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|};$$

曲率中心 $$\left(x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},y+\frac{1+y'^2}{y''}\right).$$

4 定积分与重积分

4.1 不定积分

4.1.1 原函数与不定积分

(1) 原函数　若在区间 I 上 $F'(x)=f(x)$,则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的原函数. 连续函数必有原函数.

(2) 不定积分　若 $f(x)$ 有一个原函数 $F(x)$,则当 C 遍取一切实数时,$F(x)+C$ 给出 $f(x)$ 的所有原函数,称它为 $f(x)$ 的**不定积分**,记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

其中的 $f(x)$,x 与 C 分别称为被积函数、积分变量与积分常数. 求不定积分的方法

称为积分法.

4.1.2 基本积分法

由不定积分的定义有公式

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x) \quad 或 \quad \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C. \tag{4-1}$$

这表明积分与微分互为逆运算,因此每个微分规则(见2.1.3节)自然地转化为对应的积分规则,即所谓基本积分法.下面所述的积分法分别由微分的线性规则、链规则与积规则推出来.

1° 分项积分法

$$\int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\mathrm{d}x.$$

2° 换元法

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

3° 分部积分法

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \ (u, v \text{ 是 } x \text{ 的函数}).$$

若$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$,则由换元法有

$$\int f(u(x))\mathrm{d}u(x) = F(u(x)) + C.$$

在这种形式下使用的换元法又称为“凑微分法”.

例1 求 $I = \int \tan^2 x\mathrm{d}x$.

解 因 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$,故用分项积分法得

$$I = \int \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C.$$

例2 求 $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x \ (a > 0)$.

解 作变量代换,设 $x = a\sin t$,则 $\mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned} I &= a^2\int \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int(\cos 2t + 1)\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right) + C \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

例3 求 $I = \int \tan x\mathrm{d}x$.

解 用凑微分法得

$$I = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

例 4　求 $I = \int \arctan x \mathrm{d}x$.

解　用分部积分法得

$$I = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C.$$

对于少数几类初等函数的积分，有标准的计算方法，见后面各小节.

4.1.3　有理函数的积分

设 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$，$P(x)$ 与 $Q(x)$ 分别为 n 次与 m 次多项式. 计算积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的步骤如下：

1° 将 $Q(x)$ 作因式分解；约去 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 的公因式.

2° 将 $f(x)$ 分解成

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_k(x),$$

其中 $f_0(x)$ 是一 $n-m$ 次多项式，当 $n < m$ 时取 $f_0(x) = 0$；$f_l(x)(1 \leqslant l \leqslant k)$ 是形如

$$\frac{A}{(x-a)^i},\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\ (p^2 < 4q)$$

的"部分分式"，$(x-a)^i$ 与 $(x^2+px+q)^j$ 遍取 $Q(x)$ 的所有因式.

3° 分别计算积分 $\int f_l(x)\mathrm{d}x (0 \leqslant l \leqslant k)$，注意

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^j} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^j},$$

并且递推公式

$$\begin{aligned} I_j &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^j} \\ &= \frac{1}{(4q-p^2)(j-1)}\left[(4j-6)I_{j-1} + \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{j-1}}\right],\quad j > 1. \end{aligned}$$

例 5　求 $I = \int \frac{2x^4+3x^2+x+1}{x^5+2x^3+x}\mathrm{d}x$.

解　以 $f(x)$ 记被积函数，则

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

由　$2x^4+3x^2+x+1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)x + x(Dx+E)$

定出

$$A = B = E = 1, C = D = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+x^4) + \frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right] + C. \end{aligned}$$

4.1.4 三角函数的积分

设 $R(u,v)$ 为有理函数.积分

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$$

可用以下3种代换之一化为有理函数的积分:

1° 若 $R(u,v)$ 是 u 或 v 的奇函数,则用代换 $t=\cos x$ 或 $t=\sin x$.

2° 若 $R(-u,-v)=R(u,v)$,则用代换 $t=\tan x$.

3° 万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$,此时

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

例6 求 $I=\int\frac{\cos x}{\cos^2x+\sin x+1}\mathrm{d}x$.

解 用 $t=\cos x$ 作代换,则

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{2+t-t^2}=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\ln\left|\frac{t+1}{t-2}\right|+C=\ln\frac{1+\sin x}{2-\sin x}+C.$$

4.1.5 某些含根式的函数的积分

设 $R(u,v)$ 是有理函数.

(1) 积分$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x(ad\neq bc)$ 经 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 代替可化为有理函数的积分.

(2) 对于积分$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x(a\neq 0,b^2\neq 4ac)$,可用适当代换将其中的根式化为$\sqrt{t^2\pm\beta^2}$ 或$\sqrt{\beta^2-t^2}(\beta>0)$;然后再用代换 $t=\beta\tan u$ 或 $t=\beta\sec u$, $t=\beta\sin u$ 去掉根号.

例7 求 $I=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x$.

解 作代换 $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$,则 $x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$,

$$I=4\int\frac{t^2}{(1+t^2)(1-t^2)}\mathrm{d}t$$
$$=-2\int\left(\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$$
$$=-2\arctan t+\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C$$
$$=-2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$$

4.2 定 积 分

4.2.1 定积分概念

(1) 定义　设 $f(x)$ 是区间 $[a,b](a<b)$ 上的有界函数. 任取分点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$，使得 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\lambda=\max\Delta x_i$；取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](1\leqslant i\leqslant n)$. 若存在与 x_i,ξ_i 的取法无关的极限

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（黎曼(Riemann)）可积，且称 I 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的（黎曼）定积分，简称积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^b f\mathrm{d}x$；其中的 $f(x)$，a，b 分别称为被积函数、积分下限与积分上限. 约定

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0;\quad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 几何解释　若 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲边梯形 $0\leqslant y\leqslant f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 的面积.

(3) 可积性　分段连续或分段单调的有界函数可积.

4.2.2 定积分的性质

设 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

(1) 线性性　对任给常数 α,β，有

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g\mathrm{d}x.$$

(2) 可加性　若 $a<c<b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 比较性质　若 $f(x)\leqslant g(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 估值定理　若 $A\leqslant f(x)\leqslant B(a\leqslant x\leqslant b)$，则

$$A(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant B(b-a).$$

由此推出，若 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

(5) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$

(6) **第一积分中值定理**　若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 连续，$g(x)$ 不变号，则存在 $\xi\in$

$[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

特别地,取 $g(x)=1$ 得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (\xi \in [a,b]).$$

(7) **第二积分中值定理** 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调,则存在 $\xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质(1),(2),(6),(7)亦可用于 $a \geqslant b$ 的情况.性质(1) ~ (6)可以适当形式推广到本篇所述的其他积分.

4.2.3 变上限积分

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上有定义、连续,且对 f 的连续点 x 有

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

一般地,若 $a(x),b(x)$ 可微且 $A \leqslant a(x),b(x) \leqslant B$,$f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续,则

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x). \tag{4-2}$$

公式(4-2)常被用来证明涉及积分的等式与不等式.

例8 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,证明 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

证 令 $f(a)=\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$,则 $f'(a)=f(a+T)-f(a)=0$,于是

$$f(a) = f(0) = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

例9 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]\,(a<b)$ 上连续,证明

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $F(x)=\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t - \left[\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right]^2$,则

$$F'(x) = f^2(x)\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t + g^2(x)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t - 2f(x)g(x)\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^x [f(x)g(t)-f(t)g(x)]^2\mathrm{d}t \geqslant 0 \ (a \leqslant x \leqslant b).$$

因此 $F(x)$ 单调增,从而 $F(b) \geqslant F(a) = 0$,此即所要证.

4.2.4 基本积分公式

(1) **牛顿-莱布尼兹公式** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,

至多除有限个点外 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{4-3}$$

(2) **变量代换公式**　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上连续可微且 $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{4-4}$$

(3) 分部积分公式　设 $u(x)$，$v(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，则

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u. \tag{4-5}$$

定积分计算主要采用以上公式.

例 10　求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p\geqslant 0)$.

解　利用定积分定义与公式(4-3)，有

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+x}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}.$$

例 11　求 $I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解　用 $x=a\sin t\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 作代换，采用公式(4-4)，有

$$I=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

例 12　求 $I=\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x$.

解　采用公式(4-5)，有

$$I=-x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x=\pi.$$

4.2.5　积分的近似计算

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(1) **梯形公式**　令 $h=\dfrac{(b-a)}{n}$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_n+R_n\approx T_n,$$

$$T_n=h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)\right].$$

当 f 两次连续可微时有误差公式

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b].$$

(2) **抛物线公式**(辛普生(Simpson)公式) 令 $h = \frac{(b-a)}{2n}$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S_n + R_n \approx S_n,$$

$$S_n = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih) + 4\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)h)\right].$$

当 f 四次连续可微时有误差公式

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\xi), \xi \in [a,b].$$

例 13 近似计算 $\pi = \int_0^1 \frac{4\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 采用抛物线公式,取 $n = 2$,则

$$\pi \approx \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{1+0.5^2} + \frac{4}{1+0.25^2} + \frac{4}{1+0.75^2}\right) \approx 3.14157.$$

4.3 重积分

4.3.1 重积分概念

(1) 定义 设 $V \subset \mathbf{R}^n$ 是具有 n 维体积 v 的有界闭区域,f 是 V 上的有界函数. 以任意方式将 V 分划为 m 个小区域 $V_i(i = 1,2,\cdots,m)$,使每个 V_i 有 n 维体积 $\Delta v_i(1 \leqslant i \leqslant m)$. 以 $d(V_i)$ 记 V_i 的直径(即其中两点间距离的上确界),令 $\lambda = \max d(V_i)$. 在每个 V_i 中任取一点 $P_i(1 \leqslant i \leqslant m)$. 若存在与 V_i 的分法及 P_i 的取法无关的极限

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(P_i)\Delta v_i,$$

则称 f 在 V 上可积,且称 I 为 f 在 V 上的积分(或 **n 重积分**),记作

$$\underset{V}{\int\!\!\int\cdots\int} f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \quad \text{或} \quad \underset{V}{\int\!\!\int\cdots\int} f\mathrm{d}v,$$

其中的 f, V 与 $\mathrm{d}v$ 分别称为被积函数、积分域与体积元. 当 $n = 2$ 时将 $\mathrm{d}v$ 写作 $\mathrm{d}\sigma$ 或 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$,称作面积元.

(2) 物理解释(对 $n = 3$) 若 $f \geqslant 0$,则 $\iiint_V f\mathrm{d}v$ 可解释为局部密度 $f(P)$ 的立体 V 的质量.

(3) 可积性 若 f 在 V 上连续或分块连续,则 f 在 V 上可积.

4.3.2 重积分的性质

设 f, g 在有界闭区域 $D(\subset \mathbf{R}^2)$ 上可积.

(1) 线性性　对任何常数 α,β 有

$$\iint_D(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}\sigma=\alpha\iint_D f\mathrm{d}\sigma+\beta\iint_D g\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 可加性　若 D 分划为 $D_1,D_2,\cdots,D_n$，则

$$\iint_D f\mathrm{d}\sigma=\sum_{i=1}^{n}\iint_{D_i}f\mathrm{d}\sigma.$$

(3) 比较性质　若在 D 上 $f\leqslant g$，则

$$\iint_D f\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D g\mathrm{d}\sigma.$$

(4) 估值定理　若在 D 上 $A\leqslant f\leqslant B$，则

$$A\sigma\leqslant\iint_D f\mathrm{d}\sigma\leqslant B\sigma,$$

其中 σ 表示 D 的面积. 若 $f\geqslant 0$，则 $\iint_D f\mathrm{d}\sigma\geqslant 0$.

(5) $\left|\iint_D f\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint_D|f|\mathrm{d}\sigma$.

(6) 中值定理　若在 D 上 f 连续、g 不变号，则存在 $P\in D$，使得

$$\iint_D fg\mathrm{d}\sigma=f(P)\iint_D g\mathrm{d}\sigma.$$

特别地，取 $g=1$ 得

$$\iint_D f\mathrm{d}\sigma=f(P)\sigma.$$

$n(n>2)$ 重积分有类似性质.

4.3.3 化重积分为逐次积分

(1) 设平面区域 D 可表示为

$$y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\ (a\leqslant x\leqslant b),$$

其中 $y_i(x)(i=1,2)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数且 $y_1(x)\leqslant y_2(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint_D f\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{4-6}$$

(2) 设有界闭区域 $V(\subset\mathbf{R}^3)$ 可表示为

$$z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),\ (x,y)\in D,$$

其中 D 是 V 在 xy 平面上的投影，$z_i(x,y)(i=1,2)$ 是 D 上的连续函数且 $z_1(x,y)\leqslant z_2(x,y)$；$f(x,y,z)$ 在 V 上连续，则

$$\iiint_V f\mathrm{d}v=\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z. \tag{4-7}$$

(3) 设 $V\subset\mathbf{R}^3$ 是一有界闭区域，以平面 $Z=z$ 截 V，所得截面在 xy 平面上的投

影为 D_z，$a \leqslant z \leqslant b$；$f(x,y,z)$ 在 V 上连续，则

$$\iiint\limits_V f\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若 $f(x,y,z) \equiv f(z)$，D_z 的面积为 $S(z)$，则

$$\iiint\limits_V f\mathrm{d}v = \int_a^b f(z)S(z)\mathrm{d}z. \tag{4-8}$$

例14　求 $I = \iiint\limits_V z^2\mathrm{d}v$，$V: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

解　D_z 是圆 $x^2 + y^2 \leqslant 1 - z^2$，其面积 $S(z) = \pi(1 - z^2)$. 于是

$$I = \int_{-1}^1 \pi z^2(1 - z^2)\mathrm{d}z = \frac{4\pi}{15}.$$

4.3.4　变量代换公式

设 $U, V \subset \mathbf{R}^n$ 是两个有界闭区域，由函数组

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ (i = 1,2,\cdots,n)$$

实现 V 与 U 的点之间的一一对应，函数 $y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 皆连续可微且雅可比行列式

$$J = \frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \neq 0.$$

若 f 在 V 上连续，则

$$\int\!\!\int\limits_U \cdots \int f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n = \int\!\!\int\limits_V \cdots \int f(\boldsymbol{x})\,|J|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n, \tag{4-9}$$

其中 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

4.3.5　坐标变换公式

(1) 极坐标　点 $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ 的极坐标 (r,θ) $(r \geqslant 0, 0 \leqslant \theta < 2\pi)$ 决定于方程组

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta.$$

因 $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r$，故在极坐标下的面积元为

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

若区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 在极坐标下可表示为

$$r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta),\quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,$$

其中 $r_i(\theta)$ $(i = 1,2)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数且 $0 \leqslant r_1(\theta) \leqslant r_2(\theta)$，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r. \tag{4-10}$$

(2) 柱面坐标　若 (r,θ) 是 $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ 的极坐标，则称 (r,θ,z) 为点 (x,y,z)

$\in \mathbf{R}^3$ 的柱面坐标. 若区域 $V(\subset \mathbf{R}^3)$ 在柱面坐标下可表示为

$$z_1(r,\theta) \leqslant z \leqslant z_2(r,\theta),\quad r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta),\quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,$$

其中 $z_i(r,\theta), r_i(\theta)(i=1,2)$ 皆连续, 且 $z_1(r,\theta) \leqslant z_2(r,\theta), 0 \leqslant r_1(\theta) \leqslant r_2(\theta)$; $f(x,y,z)$ 在 V 上连续, 则

$$\iiint_V f\mathrm{d}v = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\mathrm{d}r \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\mathrm{d}z. \tag{4-11}$$

(3) 球面坐标　点 $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ 的球面坐标 $(\rho,\theta,\varphi)(\rho \geqslant 0, 0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ 决定于方程组

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi,\quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z = \rho\cos\varphi.$$

因 $\dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\varphi$, 故在球面坐标下体积元为

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

若区域 $V(\subset \mathbf{R}^3)$ 在球面坐标下可表示为

$$\rho_1(\theta,\varphi) \leqslant \rho \leqslant \rho_2(\theta,\varphi),\quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\quad \gamma \leqslant \varphi \leqslant \delta,$$

其中 $\rho_i(\theta,\varphi)(i=1,2)$ 连续且 $0 \leqslant \rho_1(\theta,\varphi) \leqslant \rho_2(\theta,\varphi)$; $f(x,y,z)$ 在 V 上连续, 则

$$\iiint_V f\mathrm{d}v = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_\gamma^\delta \sin\varphi\mathrm{d}\varphi \int_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} f\rho^2\mathrm{d}\rho, \tag{4-12}$$

其中 $f = f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$.

例 15　求 $I = \iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D: x^2+y^2 \leqslant x$.

解　在极坐标下, D 可表示成 $0 \leqslant r \leqslant \cos\theta, |\theta| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. 于是由公式(4-10)有

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} (r\cos\theta + r\sin\theta) r\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)\cos^3\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

例 16　求 $I = \iiint_V x^2\mathrm{d}v, V: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

解　在柱面坐标下, V 可表示成

$$|z| \leqslant \sqrt{1-r^2}, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

于是依公式(4-11)有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r^2\cos^2\theta\mathrm{d}z \\ &= 2\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

在球面坐标下, V 可表示成

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

于是亦可用公式(4-12)得出同一结果：

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi \cdot \rho^2 d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{4\pi}{15}.$$

5　曲线积分与曲面积分

5.1　第一型曲线积分

5.1.1　弧长

(1) 定义　设 L 是以 A,B 为端点的空间曲线，在 L 上依次取点 $A = A_0, A_1, \cdots, A_n = B$，以 $A_i(0 \leqslant i \leqslant n)$ 为顶点的折线之长度为 $\sum\limits_{i=1}^{n} |A_{i-1}A_i|$. 令

$$s = \sup \sum_{i=1}^{n} |A_{i-1}A_i|,$$

上确界是对一切可能的分点组 $\{A_i\}$ 取的. 称 s 为曲线 L 的弧长，当 s 有限时称 L 是可求长的.

(2) 计算公式　设 L 由参数方程

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

给定，$\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$，$\boldsymbol{r}'(t)$ 存在，连续且非零，则 L 可求长，且其弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} |\boldsymbol{r}'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \tag{5-1}$$

称 $ds = |\boldsymbol{r}'(t)| dt$ 为曲线 L 的弧微分.

下面各节中设 L 是给定的可求长曲线.

5.1.2　第一型曲线积分概念

(1) 定义　设 f 是定义于 L 上的有界函数，以任意方式将 L 分成 n 小段 L_i，在每段 L_i 上任取一点 $M_i(1 \leqslant i \leqslant n)$；以 Δs_i 记 L_i 之长，令 $\lambda = \max\Delta s_i$. 若存在极限

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta s_i,$$

且 I 与 L_i 的分法及点 M_i 的取法无关，则称 I 为 f 在 L 上的**第一型曲线积分**(或对弧长的曲线积分)，记作 $\int_L f(x,y,z) ds$，或简写作 $\int_L f ds$.

当 f 在 L 上分段连续时 $\int_L f ds$ 必存在.

(2) 物理解释　若 $f \geq 0$,则$\int_L f\mathrm{d}s$ 可解释为具线密度 f 的曲线 L 之质量．取 $f = 1$,得到

$$s = \int_L \mathrm{d}s \ (L\text{之弧长}).$$

5.1.3　第一型曲线积分之性质

定积分的大部分性质(4.2.2 节之(1) ~ (6))可推广到第一型曲线积分,其主要者推广如下:

(1) 线性性　$\int_L \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_L f_i \mathrm{d}s.$

(2) 可加性　若 L 被一些分点分为 n 段 $L_1, L_2, \cdots, L_n$,则

$$\int_L f\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{n} \int_{L_i} f\mathrm{d}s.$$

以上假定所出现的积分存在．

(3) 中值定理　若 f 在 L 上连续,则存在 L 上一点 M,使得$\int_L f\mathrm{d}s = f(M)s$,$s$ 是 L 之弧长．

5.1.4　计算公式

设 L 是由方程 $\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ 表示的光滑曲线,f 在 L 上连续,则

$$\int_L f\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \mid \boldsymbol{r}'(t) \mid \mathrm{d}t, \tag{5-2}$$

其中 $\mid \boldsymbol{r}'(t) \mid = [x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^{1/2}$. 若 L 在 xy 平面上,则在(5-2)式中取 $z(t) \equiv 0$ 得

$$\int_L f\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{5-3}$$

若 L 由方程 $y = y(x)$ $(a \leq x \leq b)$ 给定,则在公式(5-3)中令 $t = x$ 得

$$\int_L f\mathrm{d}s = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x. \tag{5-4}$$

若 L 由极坐标方程 $r = r(\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 给定,则在公式(5-3)中令 $t = \theta$, $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$ 得

$$\int_L f\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta) \sqrt{r'^2(\theta) + r^2(\theta)}\mathrm{d}\theta. \tag{5-5}$$

例 1　求 $I = \int_L x^2 \mathrm{d}s$, $L: y = \sqrt{2x - x^2}$.

解　L 是以点(1,0)为圆心,以 1 为半径的上半圆周．令 $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \leq t \leq \pi)$,依公式(5-3)有

$$I = \int_0^\pi (1 + \cos t)^2 \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi}(1 + 2\cos t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{2}.$$

若用公式(5-4),则应计算以下积分:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 x^2\sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{2x - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^2 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}\mathrm{d}x \\ &= 4\int_0^1 t^{3/2}(1-t)^{-1/2}\mathrm{d}t \quad (x = 2t) \\ &= \frac{3\pi}{2} \quad (\text{用欧拉积分}). \end{aligned}$$

其次,L 可表示为极坐标方程 $r = 2\cos\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$,因此可用公式(5-5)计算:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta\sqrt{4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

5.2 第二型曲线积分

设 L 是以 A 为起点,以 B 为终点的有向曲线且可度长,$\boldsymbol{F} = \{P, Q, R\}$ 是定义于 L 上的向量函数.

5.2.1 第二型曲线积分概念

(1) 定义　在 L 上依次取点 $A = A_0, A_1, \cdots, A_n = B$,将 L 分为 n 小段 $L_1, L_2, \cdots, L_n$,在每个 L_i 上任取一点 M_i;以 $\boldsymbol{r}_i$ 记点 A_i 的向径,令 $\Delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\lambda = \max|\Delta\boldsymbol{r}_i|$. 若极限

$$I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i$$

存在且与点 A_i, M_i 的取法无关,则称 I 为 $\boldsymbol{F}$(或函数组 P, Q, R)沿曲线 L 的**第二型曲线积分**(或对坐标的曲线积分),记作

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{或} \quad \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

若 $\boldsymbol{F}$ 在 L 上分段连续,则积分 $\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 存在.

(2) 物理解释　若 $\boldsymbol{F}$ 表示沿 L 定义的力场,则 $\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示一质点沿 L 从点 A 移动至点 B 时力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功.

5.2.2 第二型曲线积分的性质

假定下面出现的积分皆存在.

(1) 与第一型曲线积分的关系　设 $\boldsymbol{\tau}$ 是 L 的单位切向量,它指向 L 的正向; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦,则

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s.$$

(2) 与曲线定向的关系　若以 $-L$ 记 L 反转方向的曲线,则

$$\int_{-L} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

(3) 若令 $\int_L P\mathrm{d}x = \int_L P\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y + 0\mathrm{d}z$, $\int_L Q\mathrm{d}y$ 与 $\int_L R\mathrm{d}z$ 仿此,则

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L P\mathrm{d}x + \int_L Q\mathrm{d}y + \int_L R\mathrm{d}z.$$

(4) 若 L 平行于 xy 平面,则 $\int_L R\mathrm{d}z = 0$;若 L 是平行于 x 轴的直线段,则 $\int_L Q\mathrm{d}y = \int_L R\mathrm{d}z = 0$. 余类推.

5.2.3　计算公式

设 L 是由方程 $\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ 表示的光滑曲线, $t = \alpha, \beta$ 分别对应 L 的起点与终点(不必 $\alpha < \beta$), $\boldsymbol{F} = \{P, Q, R\}$ 在 L 上连续,则

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\alpha^\beta [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)]\mathrm{d}t, \tag{5-6}$$

其中 $P = P(x(t), y(t), z(t))$, Q, R 仿此. 若 L 在 xy 平面上,则在公式(5-6)中令 $z(t) \equiv 0$,得

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta [Px'(t) + Qy'(t)]\mathrm{d}t, \tag{5-7}$$

其中 $P = P(x(t), y(t))$, Q 仿此. 若 L 表示为方程 $y = y(x)(a \leqslant x \leqslant b)$, $x = a, b$ 分别对应 L 的起点与终点,则在公式(5-7)中令 $t = x$,得

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]\mathrm{d}x. \tag{5-8}$$

例 2　求 $I = \int_L y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$, $L: y = \sqrt{2 - x^2}$ 从点 $(0, \sqrt{2})$ 到点 $(1, 1)$.

解　L 可表示为参数方程 $x = \sqrt{2}\cos t$, $y = \sqrt{2}\sin t(\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$, $t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ 分别对应点 $(0, \sqrt{2})$ 与 $(1, 1)$. 于是依公式(5-7)有

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} [\sqrt{2}\sin t(-\sqrt{2}\sin t) - \sqrt{2}\cos t \cdot \sqrt{2}\cos t]\mathrm{d}t \\ &= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

亦可用公式(5-8)计算:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\sqrt{2 - x^2} - x \cdot \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

5.2.4 全微分式的积分

(1) 全微分 若存在可微函数 u,使得 $du = Pdx + Qdy + Rdz$(这等价于 $\mathrm{grad}u = \boldsymbol{F}$),则称 $Pdx + Qdy + Rdz$ 为**全微分**或**恰当微分**,称 u 为 $Pdx + Qdy + Rdz$ 的原函数.

(2) 全微分式的积分 若 u 是 $Pdx + Qdy + Rdz$ 的原函数,则

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A) = u\Big|_A^B, \tag{5-9}$$

其中 A,B 分别为曲线 L 的起点与终点. 公式(5-9)可看作是关于曲线积分的牛顿-莱布尼兹公式(参照公式(4-3)).

例 3 求 $I = \int_L (12xy + e^y)dx + (xe^y - \cos y)dy$, L:沿 $y = x^2$ 从点$(-1,1)$到点$(0,0)$,再沿 x 轴到$(2,0)$.

解 首先注意被积表达式可表示成 $d(xe^y - \sin y) + 12xydx$,于是可部分地应用公式(5-9):

$$\begin{aligned} I &= \int_L d(xe^y - \sin y) + 12\int_L xydx \\ &= (xe^y - \sin y)\Big|_{(-1,1)}^{(2,0)} + 12\int_{-1}^0 x^3dx \\ &= e - 1 + \sin 1. \end{aligned}$$

5.3 第一型曲面积分

5.3.1 曲面面积

(1) 光滑曲面 设曲面 Σ 可表示为方程组

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D, \tag{5-10}$$

令 $\boldsymbol{r} = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$. 若 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 处处存在,连续且 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$,则称 Σ 为光滑曲面.

(2) 曲面面积 设 Σ 是由(5-10)式给定的光滑曲面,D 是有界区域,则 Σ 的面积 S 可表示为

$$S = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| dudv. \tag{5-11}$$

称 $dS = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| dudv$ 为曲面 Σ 的面积元.

若曲面 Σ 可表示为方程 $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$, $z(x,y)$ 连续可微,则在(5-11)式中令 $u = x, v = y$,得

$$S = \iint_D \sqrt{1 + {z_x}^2 + {z_y}^2}dxdy.$$

相应地,$dS = \sqrt{1 + {z_x}^2 + {z_y}^2}dxdy$.

以下设 Σ 是给定的有界光滑曲面.

5.3.2 第一型曲面积分概念

(1) 定义 设 f 是定义于 Σ 上的有界函数. 以任意方式将 Σ 分划为 n 小块 Σ_1、$\Sigma_2,\cdots,\Sigma_n$,以 ΔS_i 记 Σ_i 的面积,以 $d(\Sigma_i)$ 记 Σ_i 的直径、令 $\lambda=\max d(\Sigma_i)$;在每个 Σ_i 上任取一点 M_i. 若极限

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta S_i$$

存在且与 Σ_i 的分法及点 M_i 的取法无关,则称 I 为 f 在 Σ 上的**第一型曲面积分**(或对面积的曲面积分),记作 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 或 $\iint\limits_{\Sigma}f\mathrm{d}S$.

若 f 在 Σ 上分块连续,则 $\iint\limits_{\Sigma}f\mathrm{d}S$ 必存在.

(2) 物理解释 若 $f\geqslant 0$,则 $\iint\limits_{\Sigma}f\mathrm{d}S$ 可解释为有面密度 f 的曲面 Σ 之质量. 若取 $f=1$,则

$$S=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S\quad(\text{曲面 }\Sigma\text{ 之面积}).$$

5.3.3 第一型曲面积分之性质

假定以下出现的积分皆存在.

(1) 线性性 $\iint\limits_{\Sigma}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\iint\limits_{\Sigma}f_i\mathrm{d}S$, α_i 是常数.

(2) 可加性 设 Σ 被分划为 n 块 $\Sigma_i(1\leqslant i\leqslant n)$,则

$$\iint\limits_{\Sigma}f\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Sigma_i}f\mathrm{d}S.$$

(3) 中值定理 若 f 在 Σ 上连续,则存在一点 $M\in\Sigma$,使得 $\iint\limits_{\Sigma}f\mathrm{d}S=f(M)S$, S 记 Σ 之面积.

5.3.4 计算公式

设 Σ 是由方程(5-10)表示的光滑曲面,f 在 Σ 上连续,则

$$\iint\limits_{\Sigma}f\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}f\,|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\tag{5-12}$$

其中 $f=f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. 若 Σ 由方程 $z=z(x,y)$ 表示,则

$$\iint\limits_{\Sigma}f\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{5-13}$$

例4　求 $I = \iint\limits_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}S, \Sigma: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

解　用公式(5-13)计算：$z_x = -\frac{x}{z}, z_y = -\frac{y}{z}$,

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = z^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}.$$

亦可用公式(5-12)计算：在球面坐标下 Σ 可表示为

$$x = \cos\theta\sin\varphi, y = \sin\theta\sin\varphi, z = \cos\varphi,$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. 算出

$$\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

于是

$$I = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

5.4　第二型曲面积分

5.4.1　双侧曲面

设 Σ 是一光滑曲面. 若存在定义于整个 Σ 上的连续向量函数 $\boldsymbol{n}$，使得 $\boldsymbol{n}$ 处处为 Σ 的单位法向量，则称 Σ 为双侧曲面，且称 $\boldsymbol{n}$ 指向 Σ 的正侧. 已确定正侧的曲面称为定向曲面.

以下设 Σ 是给定的有界光滑曲面，其定向已由单位法向量 $\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 给定；$\boldsymbol{F} = \{P, Q, R\}$ 是定义于 Σ 上的向量函数. 若 Σ 是某区域 V 的边界，$\boldsymbol{n}$ 指向 V 内部，则称 Σ 的正侧为内侧，相反的一侧为外侧. 若 $\cos\gamma$ 不变号，则称使 $\cos\gamma > 0$ 的一侧为上侧，称相反的一侧为下侧.

5.4.2　第二型曲面积分概念

(1) 定义　以任意方式将 Σ 分划为 n 小块 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$，以 ΔS_i 记 Σ_i 的面积，以 $d(S_i)$ 记 Σ_i 的直径，令 $\lambda = \max d(\Sigma_i)$；在每个 Σ_i 上任取一点 M_i. 若极限

$$I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\cdot\boldsymbol{n}(M_i)\Delta S_i$$

存在且与 Σ_i 的分法及点 M_i 的取法无关，则称 I 为 $\boldsymbol{F}$(或函数组 P, Q, R) 在 Σ 上沿指定一侧的**第二型曲面积分**(或对坐标的曲面积分)，记作

$$\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \quad 或 \quad \iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若 Σ 是由光滑曲面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ 拼成的分块光滑曲面，则约定

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Sigma_i} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S.$$

(2) 物理解释　若 $\boldsymbol{F}$ 表示流经曲面 Σ 的某种稳定流体的流速，则 $\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$ 表示单位时间内流过曲面指定一侧的流量．

5.4.3 第二型曲面积分的性质

假定以下出现的积分皆存在．

(1) 与第一型曲面积分的联系　实际上，$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$ 是函数 $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ 的第一型曲面积分，且

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) \mathrm{d}S.$$

(2) 与曲面定向的关系　若以 $-\Sigma$ 记曲面 Σ 的另一侧，则

$$\iint_{-\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 若令 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 0\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\iint\limits_{\Sigma} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$\iint\limits_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 仿此，则

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(4) 若 Σ 平行于 x 轴，则 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$；若 Σ 是平行于 xy 平面的平面块，则 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$. 余类推．

5.4.4 计算公式

设 Σ 是由方程(5-10)表示的光滑曲面，$\boldsymbol{F} = \{P, Q, R\}$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pm \iint_{D} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{5-14}$$

其中 $P = P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$，$Q, R$ 仿此．若 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 指向 Σ 的正侧，则(5-14)式右端取"+"号；否则取"-"号．若 Σ 由方程 $z = z(x, y)$ 表示，则在(5-14)式中取 $u = x, v = y, P = Q = 0$，得

$$\iint_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_{D} R(x, y, z(x, y)) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5-15}$$

当 Σ 以上侧为正侧时右端取"+"号,否则取"-"号.对于 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\iint\limits_{\Sigma} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 有类似公式.

例5 求 $I = \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的外侧.

解 在球面坐标下,Σ 可表示为

$$x = \cos\theta\sin\varphi, \quad y = \sin\theta\sin\varphi, \quad z = \cos\varphi, \quad 0 \leqslant \theta, \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

于是由公式(5-14)有

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \end{vmatrix} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

因 $\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi$ 指向球面内侧,故用公式(5-14)时取"-"号.

亦可用公式(5-15):若以 D 记 Σ 在 xy 平面上的投影,则

$$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1 - r^2}r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}.$$

类似地可算得

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6},$$

于是同样有 $I = \frac{\pi}{2}$.

5.5 场论·积分学的基本公式

5.5.1 数量场与向量场

设 $\Omega(\subset \mathbf{R}^3)$ 是一区域.

(1) 数量场 称定义于 Ω 上的任何数量函数 u 为 Ω 上的**数量场**或**纯量场**.数量场是温度场、气压场等物理场的一种抽象.

(2) 向量场 称定义于 Ω 上的任何向量函数 $\boldsymbol{F}$ 为 Ω 上的**向量场**或**矢量场**.向量场是力场、电场等物理场的一种抽象.

(3) 等值面与流线 设 u 与 $\boldsymbol{F}$ 分别为 Ω 上的数量场与向量场.称任何曲面 $u = \mathrm{const}$ 为数量场 u 的**等值面**.称在每点与 $\boldsymbol{F}$ 相切的曲线为向量场 $\boldsymbol{F}$ 的**流线**或**向量线**.

可类似讨论平面上的数量场与向量场．

5.5.2 梯度、散度与旋度

设 u 与 $\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$ 分别为区域 Ω 内的数量场与向量场，假定以下出现的偏导数皆存在．令

$$\mathbf{grad}\,u=\nabla u=\{u_x,u_y,u_z\};$$
$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}=P_x+Q_y+R_z;$$
$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\{R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}.$$

三者分别称为 u 的**梯度**、$\boldsymbol{F}$ 的**散度与旋度**．其中$\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}$是一个符号向量，称为哈密顿(Hamilton)算子．运算∇u，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$与$\nabla\times\boldsymbol{F}$亦兼微分运算与向量运算的性质，主要运算规则如下：

1° 线性规则

$$\nabla\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iu_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\nabla u_i;$$
$$\nabla\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{F}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\nabla\cdot\boldsymbol{F}_i;$$
$$\nabla\times\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{F}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\nabla\times\boldsymbol{F}_i.$$

2° 莱布尼兹规则

$$\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v;$$
$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{F})=\nabla u\cdot\boldsymbol{F}+u\nabla\cdot\boldsymbol{F};$$
$$\nabla\times(u\boldsymbol{F})=\nabla u\times\boldsymbol{F}+u\nabla\times\boldsymbol{F};$$
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})=(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G}).$$

3° 链规则

$$\nabla f(u)=f'(u)\nabla u.$$

4° 双重∇运算规则

$$\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2u=\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz};$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=0;$$
$$\nabla\times(\nabla u)=\boldsymbol{0}.$$

以上 u,v,u_i 是数量场，$\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{F}_i$ 是向量场，α_i 是常数，f 是可微实函数．

5° 设 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，则

$$\nabla r=\boldsymbol{r}/r,\ \nabla\cdot\boldsymbol{r}=3,\ \nabla\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}.$$

5.5.3 积分学的基本公式

(1) 牛顿 - 莱布尼兹公式(见4.2.4节).

(2) **格林(Green)公式** 设$D(\subset \mathbf{R}^2)$为单连通的有界闭区域,其边界L为分段光滑闭曲线,沿L的正向行进时保持D内部在左边;P,Q在D上连续可微,则

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5-16}$$

D单连通意味着D内任何闭曲线可在D中连续变形缩为一点.

(3) **斯托克斯(Stokes)公式** 设Σ是单连通的光滑曲面,其边界L为分段光滑闭曲线,沿L正向行进时保持Σ的正侧在左边,$\boldsymbol{F} = \{P,Q,R\}$在$\Sigma$上有连续偏导数,则

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma (\nabla\times \boldsymbol{F})\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

或

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{5-17}$$

(4) **高斯(Gauss)公式** 设$V(\subset \mathbf{R}^3)$为面单连通的有界闭区域,其边界Σ是分块光滑闭曲面,$\boldsymbol{n}$是Σ的外向单位法向量;$\boldsymbol{F} = \{P,Q,R\}$在$V$上有连续偏导数,则

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iiint_V (\nabla\cdot \boldsymbol{F})\mathrm{d}v$$

或

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V (P_x + Q_y + R_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{5-18}$$

V面单连通意味着V内任何闭曲面可在V中连续变形缩为一点.

公式(5-16) ~ (5-18)常用来简化曲线积分与曲面积分的计算.

例6 求$I = \int_L (x+y)^2\mathrm{d}x - (x^2 + y^2\sin y)\mathrm{d}y$,$L: y = x^2$从点$A(-1,1)$到点$B(1,1)$.

解 L补入线段BA得到反时针方向的闭曲线C,它围住区域$D: x^2 \leqslant y \leqslant 1$.由公式(5-16)有

$$\begin{aligned} I &= \int_C + \int_{AB} \\ &= \iint_D (-4x - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} (x+1)^2\mathrm{d}x \\ &= -2\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 8 = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

例7 求$I = \int_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$,$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$从$z$轴正向看去$L$为

反时针方向.

解 以 Σ 记 L 所围之圆盘,沿 L 正向行进时,其左边为 Σ 之正侧.于是由公式(5-17)有

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}=-\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-3\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (\text{用对称性})$$

$$=-\sqrt{3}\pi.$$

例 8 求 $I=\iint_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$ 是半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 之上侧.

解 Σ 补入平面区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1,z=0$ 后成为闭曲面 Γ,它围住半球体 V.由公式(5-18)有

$$I=\iint_{\Gamma}+\iint_{D}=\iiint_{V}4z\mathrm{d}v+0=2\iint_{D}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi.$$

5.5.4 积分与路径无关的条件

(1) 特殊场 若 $\boldsymbol{F}=\nabla u$,则称 $\boldsymbol{F}$ 为梯度场或有势场,称 u 为 $\boldsymbol{F}$ 的势.若 $\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{G}$,则称 $\boldsymbol{F}$ 为旋度场.若 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$,则称 $\boldsymbol{F}$ 为无源场.若 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$,则称 $\boldsymbol{F}$ 为无旋场.

(2) **空间曲线积分与路径无关的条件** 设 $\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$ 是定义于单连通区域 $\Omega(\subset\mathbf{R}^3)$ 内的向量场,则以下条件互相等价:

1° 积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 在 Ω 内与路径无关,即它仅决定于 L 的起点与终点.

2° 对 Ω 内任一分段光滑闭曲线 C,有 $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$.

3° $\boldsymbol{F}$ 是无旋场,即 $R_y\equiv Q_z,P_z\equiv R_x,Q_x\equiv P_y$.

4° $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 是恰当微分.

5° $\boldsymbol{F}$ 是梯度场.

(3) **平面曲线积分与路径无关的条件** 设 $D(\subset\mathbf{R}^2)$ 是一单连通区域,P,Q 在 D 内连续可微,则以下条件互相等价:

1° 积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

2° 对 D 内任一分段光滑闭曲线 C 有 $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

3° 在 D 内 $Q_x\equiv P_y$.

4° $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是恰当微分.

6　积分学的应用

6.1　质量与求积问题

以下设 $I=[a,b]$，D，V，L 与 Σ 分别为给定的区间、平面区域、立体、曲线段与曲面块，其局部密度为 μ(依情况分别为线密度、面密度与体密度)，μ 一般逐点变化．

6.1.1　质量

对于 I，D，V，L 与 Σ，质量 M 的计算公式分别为

$$\begin{cases} M_I = \int_a^b \mu \mathrm{d}x, \\ M_D = \iint\limits_D \mu \mathrm{d}\sigma, \\ M_V = \iiint\limits_V \mu \mathrm{d}v, \\ M_L = \int_L \mu \mathrm{d}s, \\ M_\Sigma = \iint\limits_\Sigma \mu \mathrm{d}S. \end{cases} \tag{6-1}$$

6.1.2　长度、面积与体积

以 s 记 L 之长，分别以 σ，S 记 D，Σ 的面积，以 v 记 V 的体积．在(6-1)式中令 $\mu=1$ 得

$$\begin{cases} \sigma = \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma, \\ v = \iiint\limits_V \mathrm{d}v, \\ s = \int_L \mathrm{d}s, \\ S = \iint\limits_\Sigma \mathrm{d}S. \end{cases} \tag{6-2}$$

6.1.3　重心

对于 D，V，L，Σ，重心坐标 $\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$ 的计算公式分别为

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{M_D}\displaystyle\iint_D \mu x \mathrm{d}\sigma, \\ \bar{y} = \dfrac{1}{M_D}\displaystyle\iint_D \mu y \mathrm{d}\sigma, \\ \bar{z} = 0; \end{cases} \tag{6-3}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{M_V}\displaystyle\iiint_V \mu x \mathrm{d}v, \\ \bar{y} = \dfrac{1}{M_V}\displaystyle\iiint_V \mu y \mathrm{d}v, \\ \bar{z} = \dfrac{1}{M_V}\displaystyle\iiint_V \mu z \mathrm{d}v; \end{cases} \tag{6-4}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{M_L}\displaystyle\int_L \mu x \mathrm{d}s, \\ \bar{y} = \dfrac{1}{M_L}\displaystyle\int_L \mu y \mathrm{d}s, \\ \bar{z} = \dfrac{1}{M_L}\displaystyle\int_L \mu z \mathrm{d}s; \end{cases} \tag{6-5}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{M_\Sigma}\displaystyle\iint_\Sigma \mu x \mathrm{d}S, \\ \bar{y} = \dfrac{1}{M_\Sigma}\displaystyle\iint_\Sigma \mu y \mathrm{d}S, \\ \bar{z} = \dfrac{1}{M_\Sigma}\displaystyle\iint_\Sigma \mu z \mathrm{d}S. \end{cases} \tag{6-6}$$

取 $\mu = 1$,即得到形心坐标的计算公式.

例 1 求 $I = \displaystyle\iint_\Sigma x \mathrm{d}S$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.

解 Σ 可表示为

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

其形心坐标为$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 于是由公式(6-6)有

$$I = \bar{x}S = \frac{1}{2} \times 4\pi \times \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

6.1.4 转动惯量

以 J_x 记对 x 轴的转动惯量,则对于 D, V, L 与 Σ, J_x 的计算公式分别为

$$\begin{cases} J_x = \iint\limits_D \mu y^2 \mathrm{d}\sigma, \\ J_x = \iiint\limits_V \mu(y^2+z^2)\mathrm{d}v, \\ J_x = \int_L \mu(y^2+z^2)\mathrm{d}s, \\ J_x = \iint\limits_\Sigma \mu(y^2+z^2)\mathrm{d}S. \end{cases} \tag{6-7}$$

类似地,可列出 J_y, J_z 的计算公式.

6.1.5　引力

设立体 V 对位于原点的单位质量的引力为 $\boldsymbol{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$,则

$$\begin{cases} F_x = k\iiint\limits_V \dfrac{\mu x}{r^3}\mathrm{d}v, \\ F_y = k\iiint\limits_V \dfrac{\mu y}{r^3}\mathrm{d}v, \\ F_z = k\iiint\limits_V \dfrac{\mu z}{r^3}\mathrm{d}v, \end{cases} \tag{6-8}$$

其中 k 是引力常数,$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 当 V 换成 D 或 L, Σ 时有类似公式.

6.1.6　特殊情况下的面积、体积计算法

(1) 旋转体　设 xy 平面上的曲线 L 由方程 $y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 给定,$f(x) \geqslant 0$. L 绕 x 轴旋转一周形成旋转曲面 Σ;Σ 与平面 $x = a, x = b$ 围成旋转体 V,以 S 记 Σ 的面积,v 记 V 的体积,则

$$S = \int_L 2\pi y\mathrm{d}s = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x,$$

$$v = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

若以 $(0,0,\bar{z})$ 记 Σ 或 V 的重心,则 $\bar{z}$ 的算式分别为

$$\bar{z} = \frac{2\pi}{S}\int_a^b xf(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x,$$

$$\bar{z} = \frac{\pi}{v}\int_a^b xf^2(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 平行截面体　设以平面 $Z = z$ 截立体 V,所得截面之面积为 $S(z)(a \leqslant z \leqslant b)$,则

$$V\text{的体积} = \int_a^b S(z)\mathrm{d}z.$$

6.2 功与流量

6.2.1 功

设一质点在变力 $\boldsymbol{F}$ 作用下通过有向曲线 L，则 $\boldsymbol{F}$ 对质点所作的功 W 为

$$W = \int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

若 $\boldsymbol{F}$ 是有势场(如引力场)，则 W 与路径 L 无关，当 L 是闭曲线时 $W = 0$.

例 2 设力 $\boldsymbol{F}$ 指向原点，$|\boldsymbol{F}|$ 与 $r = |\boldsymbol{r}|$ 成正比，一质点在 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿曲线 $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 依反时针方向从点$(a,0)$移动至点$(0,b)$，求 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W.

解 依题设有 $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$，$k$ 是正常数．于是

$$W = -k\int_L \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{kr^2}{2}\Bigg|_{(0,b)}^{(a,0)} = \frac{k}{2}(a^2 - b^2).$$

6.2.2 流量

设一稳定流体的流速为 $\boldsymbol{V}$，则在单位时间内流体流向曲面 Σ 指定一侧的流量 Φ 为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量且指向 Σ 的指定一侧．若 $\boldsymbol{V}$ 是无源场，则从任何闭曲面流出的流量为零．由此推出：若 $\boldsymbol{V}$ 是无源场，H 是由 $\boldsymbol{V}$ 的一族流线构成管壁的管道，则在单位时间内依同一方向流经管道任何两截面的流量相等．因此，也称无源场为管形场．

参 考 文 献

1 陈传璋等．数学分析．北京：高等教育出版社，1985.
2 方企勤等．数学分析．北京：高等教育出版社，1986.
3 徐利治．微积分大意．北京：科学技术文献出版社，1989.
4 沈燮昌等．数学分析纵横谈．北京：北京大学出版社，1991.

常用极限

1° $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

2° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

3° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

4° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$.

5° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$.

6° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sinh x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tanh x}{x}=1$.

7° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}=1$.

8° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1\ (\alpha\neq0)$.

9° $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$.

10° $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$.

11° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

12° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

13° $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\beta a^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^\beta b^x=0\ (0<b<1<a)$.

14° $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\alpha}\ln^\beta x=\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\,|\ln x|^\beta=0\ (\alpha>0)$.

15° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1^p+2^p+\cdots+n^p)}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}\ (p\neq-1)$.

16° $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^x\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\ (a_i>0)$.

导 数 表

1° 若 $y=\text{const}$，则 $y'=0$.

2° $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$;

$(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\ \ (\alpha\neq0,1,2,\cdots,n-1)$.

3° $(x^m)^{(n)}=\dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}\ \ (n\leqslant m)$;

$(x^m)^{(n)} = 0\ (n > m)$.

4° $(a^x)' = a^x \ln a$;

$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a\ (0 < a \neq 1)$.

5° $(e^x)^{(n)} = e^x$.

6° $(\sin x)' = \cos x$;

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

7° $(\sinh x)' = \cosh x$.

8° $(\cos x)' = -\sin x$;

$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

9° $(\cosh x)' = \sinh x$.

10° $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$.

11° $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$.

12° $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

$(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}\ (0 < a \neq 1)$.

13° $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

14° $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\arccos x)'$.

15° $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

16° $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

17° $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = -(\operatorname{arccot} x)'$.

18° $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$.

积　分　表

以下各式中积分常数皆已省去，$a > 0$.

1° $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$;

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$.

2° $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$.

3° $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{artanh}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$.

4° $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 \pm a^3} = \frac{1}{3a^2}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(x\pm a)^2}{x^2 \pm ax + a^2} \pm \sqrt{3}\arctan\frac{2x \mp a}{\sqrt{3}a}\right]$.

5° $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}a^3}\left(\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}ax+a^2}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}\right| + 2\arctan\frac{\sqrt{2}ax}{a^2-x^2}\right)$.

6° $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-a^4} = \frac{1}{4a^3}\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - 2\arctan\frac{x}{a}\right)$.

7° $\int x(\alpha+\beta x)^n\mathrm{d}x = \frac{(\alpha+\beta x)^{n+2}}{(n+2)\beta^2} - \frac{\alpha(\alpha+\beta x)^{n+1}}{(n+1)\beta^2}$ $(n \neq -1, -2)$.

8° $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\alpha+\beta x^n)} = \frac{1}{\alpha n}\ln\left|\frac{x^n}{\alpha+\beta x^n}\right|$.

9° $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$.

10° $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$.

11° $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$.

12° $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$.

13° $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{|x|}$.

14° $\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right|$.

15° $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}$.

16° $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right|$.

17° $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left[x^3\sqrt{a^2-x^2} - x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + a^4\arcsin\frac{x}{a}\right]$.

18° $\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left[\pm x^3\sqrt{x^2 \pm a^2}\right.$

$\left.+ x(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}} - a^4\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right]$.

19° $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a}$.

20° $\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|.$

21° $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$

22° $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} |.$

23° $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}.$

24° $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x}.$

25° $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}\ (a \neq 1);$

$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x.$

26° $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (x - 1)\mathrm{e}^x;$

$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x.$

27° $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x;$

$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x.$

28° $\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x;$

$\int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x.$

29° $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|;$

$\int \cos x\mathrm{d}x = \ln|\sin x|.$

30° $\int \tanh x\mathrm{d}x = \ln\cosh x;$

$\int \coth x\mathrm{d}x = \ln|\sinh x|.$

31° $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right|;$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right|.$

32° $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} = -\ln\left|\frac{1 + \cosh x}{\sinh x}\right|;$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = 2\arctan\mathrm{e}^x.$

33° $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$.

34° $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x$;

$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$.

35° $\int \tan^2 x dx = \tan x - x$.

36° $\int \cot^2 x dx = -\cot x - x$.

37° $\int \tanh^2 x dx = x - \tanh x$.

38° $\int \coth^2 x dx = x - \coth x$.

39° $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = e^{\alpha x} \frac{\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}$.

40° $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = e^{\alpha x} \frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}$.

41° $\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$.

42° $\int \ln^2 x dx = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$.

43° $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)$.

44° $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

45° $\int \operatorname{arsinh} x dx = x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{1 + x^2}$.

46° $\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$.

47° $\int \operatorname{arcosh} x dx = x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2 - 1}$.

48° $\int \arctan x dx = x \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2}$.

49° $\int \operatorname{artanh} x dx = x \operatorname{artanh} x + \ln \sqrt{1 - x^2}$.

50° $\int \operatorname{arccot} x dx = x \operatorname{arccot} x + \ln \sqrt{1 + x^2}$.

·经典数学卷·

第2篇

无穷级数与广义积分

编　者　胡适耕
审校者　路见可

目　录

引　言

作为无穷小分析的一部分，无穷级数本质上不过是研究序列的一种特殊形式而已．然而，这一形式因其特别简便有效而为分析学者所钟爱．无穷小分析的开创者及主要后继者都乐于使用无穷级数这一工具．牛顿（Newton），莱布尼兹（Leibniz），欧拉（Euler），达朗贝尔（d'Alembert），勒让德（Legendre），拉普拉斯（Laplace）、傅里叶（Fourier），高斯（Gauss），柯西（Cauchy），阿贝尔（Abel）等数学大师都研究过无穷级数，他们的名字至今仍和无穷级数理论的一些重要成果联系在一起．

在现代数学中，无穷级数仍然是一个不可取代的分析工具．它不仅被广泛应用于分析学的各个领域，而且也被有效地应用于力学、物理学以及工程学中．

另一方面，无穷级数又是一般的求和过程——积分的离散化形式．自然地，级数论与积分论之间显示出某种优美的对应关系．这种对应关系一方面提示了建立某种统一理论的可能性，另一方面使得在方法上二者能够互相借鉴．因此，本篇将尽可能在某种相互对照的形式下表述有关级数与积分的基本内容．例如，在收敛判别法、一致收敛性、极限互换等方面，级数与积分的结论互成对应，有些甚至貌似．这一特色，是希望以无穷级数与（广义）积分作为数学工具的科技工作者不可不知的．

1　数项级数

1.1　数项级数的基本性质

1.1.1　数项级数

任给数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 称记号

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1-1}$$

为**无穷级数**或**数项级数**，简称为级数，也写作 $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$，$\sum_1^{\infty} a_n$，或 $\sum a_n$．称 a_n 为级数(1-1)的通项．通项 a_n 的下标 n 亦可从其他整数(如 0)开始．若 $a_n \geqslant 0(n = 1, 2, \cdots)$，则称级数(1-1)为**正项级数**．令

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称 S_n 为级数(1-1)的部分和．若存在有限或无限（$+\infty$ 或 $-\infty$）的极限 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$，

则称 S 为级数(1-1)的和,记作 $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.当 S 有限时,称级数(1-1)收敛(于 S),此时称

$$R_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$$

为余项．若级数不收敛,则称它发散．发散级数可能有和 $\pm\infty$ 或没有和．

例 1　设 $a>0$,讨论以 q 为公比的几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

的收敛性．

解　因为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}aq^{k-1}=\begin{cases}\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1,\\ na, & q=1,\end{cases}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q}, & |q|<1,\\ +\infty, & q\geqslant 1,\\ \text{不存在}, & q\leqslant -1.\end{cases}$$

于是,题中所述几何级数在 $|q|<1$ 时收敛于 $\frac{a}{(1-q)}$;在 $q\geqslant 1$ 时发散但有和 $+\infty$;在 $q\leqslant -1$ 时发散且没有和．

例 2　设 $p>0$,讨论 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的收敛性．

解　因部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^{-p}$ 随 n 单调增,故当且仅当 S_n 有界时 p 级数收敛．

若 $0<p\leqslant 1$,则

$$S_n\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty),$$

S_n 无界．

若 $p>1$,则

$$S_n\leqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^p}=1+\int_1^n\frac{dx}{x}=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right),$$

S_n 有界．

因此,所述 p 级数在 $p \leqslant 1$ 时发散,在 $p > 1$ 时收敛.

1.1.2 收敛级数的性质

设 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 是两个收敛级数,则有如下性质:

1° 对任何常数 α,β,有

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum a_n + \beta\sum b_n.$$

2° 若 $a_n \leqslant b_n$,则有 $\sum a_n \leqslant \sum b_n$.

3° $\left|\sum a_n\right| \leqslant \sum\left|a_n\right|$.

4° 结合律:在 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 中任意加进括号而得之新级数仍收敛于原级数之和.

5° 在级数 $\sum a_n$ 中任意改变或加进(删去)有限项,不影响级数的收敛性.

1.1.3 绝对收敛与条件收敛

若级数 $\sum|a_n|$ 收敛,则称级数 $\sum a_n$ **绝对收敛**.当 $\sum a_n$ 绝对收敛时 $\sum a_n$ 本身亦必收敛.若 $\sum a_n$ 收敛而 $\sum|a_n|$ 发散,则称 $\sum a_n$ **条件收敛**.绝对收敛级数与条件收敛级数的性质有重大差别,其主要有

1° 绝对收敛级数具有可交换性,即将它的项任意改变顺序,级数仍然绝对收敛,且和不变.

2° 条件收敛级数不具有可交换性:适当改变它的项的顺序,可使级数收敛于任何预先指定的数或发散于 $\pm\infty$.

1.1.4 重级数

任给二重数列 $\{a_{mn}: m,n = 0,1,2,\cdots\}$,称记号

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \tag{1-2}$$

为一个**二重级数**.称 $S_{mn} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}$ 为级数(1-2)的部分和.若 $S = \lim_{m,n\to\infty} S_{mn}$,则称 S 为级数(1-2)的和,当 S 有限时称级数(1-2)收敛;当级数(1-2)不收敛时称它发散.若 $\sum_{m,n=0}^{\infty}|a_{mn}|$ 收敛,则称级数(1-2)绝对收敛.

绝对收敛的二重级数有如下重要性质:

1° 若 $\sum a_{mn}$ 绝对收敛,则将它的项以任意方式排成单行而得之级数 $\sum a_n$ 亦绝对收敛,且 $\sum a_{mn} = \sum a_n$.

2° 若 $\sum a_{mn}$ 绝对收敛,则

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n} a_{ij}. \tag{1-3}$$

对于正项级数,应用(1-3)式时无需验证收敛性.

以上概念与结论可自然地推广到多重级数.

1.1.5　级数乘法

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 是绝对收敛级数,则二重级数 $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_m b_n$ 亦必绝对收敛,于是由(1-3)式有

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m b_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n} a_i b_j. \tag{1-4}$$

(1-4)式表达了绝对收敛级数的乘法规则:将两级数的项两两相乘,然后将所有的乘积 $a_m b_n$ 依任意顺序求和.这与两个有限和的乘法规则一致.

以上结论可推广到任意有限个绝对收敛级数相乘.

例如,设 $|x| < 1$, $|y| < 1$,则由例 1 有

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m,$$

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

且两级数皆绝对收敛.于是,依级数乘法有

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n} x^i y^j.$$

一般地,若 $|x_i| < 1, i = 1,2,\cdots,m$,则

$$\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_m)} = \sum_{n_1,n_2,\cdots,n_m=0}^{\infty} x_1^{n_1} x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} x_1^{i_1} x_2^{i_2}\cdots x_m^{i_m}.$$

1.2　正项级数的收敛判别法

1.2.1　级数收敛的必要与充要条件

(1) 必要条件　若级数 $\sum a_n$ 收敛,则必 $a_n \to 0 (n \to \infty)$.注意 $a_n \to 0$ 并非 $\sum a_n$ 收敛的充分条件.例如,尽管 $\frac{1}{n} \to 0$,但 $\sum \frac{1}{n}$ 发散(如 1.1 节例 1).

(2) **柯西收敛准则**　级数 $\sum a_n$ 收敛的充要条件是 $\lim\limits_{m \geq n \to \infty} \sum_{k=n}^{m} a_k = 0$,即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall m, n > N, m \geqslant n, 有 \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon.$$

(3) 正项级数收敛准则 若 $\sum a_n$ 为正项级数,则它收敛的充要条件是其部分和序列有界. 当 $\sum a_n$ 发散时必定 $\sum a_n = +\infty$.

以上收敛准则直接用于判定级数收敛未必方便,它们主要用来推出其他更具体的判别法.

以下各节设 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 为正项级数.

1.2.2 比较判别法

比较判别法有如下几种类型:

(1) 比较判别法 Ⅰ 若当 n 充分大时 $a_n \leqslant b_n$,则当 $\sum b_n$ 收敛时 $\sum a_n$ 收敛;或等价地,当 $\sum a_n$ 发散时 $\sum b_n$ 亦发散.

(2) 比较判别法 Ⅱ 若 $b_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$,则当 $l < +\infty$ 且 $\sum b_n$ 收敛时,$\sum a_n$ 收敛;当 $l > 0$ 且 $\sum a_n$ 发散时,$\sum b_n$ 发散;当 $0 < l < +\infty$ 时,$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 有相同的敛散性.

(3) 比较判别法 Ⅲ 若当 n 充分大时,$a_n, b_n > 0$ 且 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$,则当 $\sum b_n$ 收敛时 $\sum a_n$ 收敛,当 $\sum a_n$ 发散时 $\sum b_n$ 发散.

例 3 设 $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n^2} + \dfrac{1-(-1)^n}{n^3}, b_n = \dfrac{1}{n^2}$,则 $0 < a_n \leqslant b_n$. 由于已知 $\sum b_n$ 收敛(如 1.1 节例 2),故由比较判别法 Ⅰ 知 $\sum a_n$ 收敛.

另一方面,易看出 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ 不存在,且 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 亦不成立. 因此,比较判别法 Ⅱ, Ⅲ 用于此例无效.

在比较判别法 Ⅰ ~ Ⅲ 中,取 $\sum b_n$(或 $\sum a_n$)为已知其敛散性的特殊级数,就得到更具体的判别法. 例如,在比较判别法 Ⅱ 中若取 $b_n = n^{-p}$ 则得比阶判别法;在比较判别法 Ⅲ 中若取 $\sum b_n$ 为几何级数则得比值判别法;在比较判别法 Ⅰ 中若取 $\sum b_n$ 为几何级数则得根值判别法.

1.2.3 比阶判别法

比阶判别法 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n n^{-p} = l$,则级数 $\sum a_n$ 在 $l < +\infty, p > 1$ 时收敛,在 $l > 0, p \leqslant 1$ 时发散. 若 $0 < l < +\infty, p > 0$,则当 $n \to \infty$ 时 a_n 是 $\dfrac{1}{n}$ 的 p 阶无穷小,$\sum a_n$ 是收敛或发散依 $p > 1$ 或 $p \leqslant 1$ 而定.

为应用比阶判别法,通常应分离出 a_n 的无穷小主部,即将 a_n 表示为

$$a_n = \frac{A}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right), 0 < A < +\infty,$$

从而得出 a_n 关于 $\frac{1}{n}$ 的阶为 p.

例4 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})\right]$ 的敛散性.

解 令 $a_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. 由泰勒(Taylor)公式有

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是 $a_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,可见 $\sum a_n$ 收敛.

1.2.4 比值判别法(达朗贝尔判别法)

(1) 不等式形式的**比值判别法** 若存在 $r \in (0,1)$,当 n 充分大时 $a_n > 0$ 且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r$,则级数 $\sum a_n$ 收敛;若当 n 充分大时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$,则 $\sum a_n$ 发散.

(2) 极限形式的**比值判别法** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$,则 $\sum a_n$ 在 $r < 1$ 时收敛,在 $r > 1$ 时发散(在 $r = 1$ 的情况下此判别法失效).

例5 判定级数 $\sum n^{-n}n!$ 的敛散性.

解 令 $a_n = n^{-n}n!$,则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1.$$

可见 $\sum a_n$ 收敛.

1.2.5 根值判别法(柯西判别法)

(1) 不等式形式的**根值判别法** 若存在 $r \in (0,1)$,当 n 充分大时 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant r$(即 $a_n \leqslant r^n$),则 $\sum a_n$ 收敛;若当 n 充分大时 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$,则 $\sum a_n$ 发散.

(2) 极限形式的**根值判别法** 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = r$,则级数 $\sum a_n$ 在 $r < 1$ 时收敛,在 $r > 1$ 时发散(在 $r = 1$ 的情况下此判别法失效).

例6 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}[2 + (-1)^n]$ 的敛散性.

解 令 $a_n = 2^{-n}[2 + (-1)^n]$,则

$$\frac{1}{2} \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant \frac{\sqrt[n]{3}}{2},$$

因此$\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}(n \to \infty)$,可见$\sum a_n$收敛.

注意 例6不能用比值判别法判定.另一方面,凡用比值判别法能判定的情况,用根值判别法皆可判定.可见根值判别法强于比值判别法.不过,应用比值判别法通常较为方便.

1.2.6 比值判别法的某些推广

设$a_n > 0(n = 1,2,\cdots)$,令

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \quad 或 \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{R_n}{n};$$

$$B_n = \ln n(R_n - 1) \quad 或 \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{B_n}{n\ln n};$$

$$G_n = n^\rho\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \lambda - \frac{\mu}{n}\right) \quad 或 \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{G_n}{n^\rho},$$

其中ρ,λ,μ是适当的常数.

(1) **拉阿伯(Raabe)判别法** 若存在$r > 1$,当n充分大时$R_n \geqslant r$,则$\sum a_n$收敛;若当n充分大时$R_n \leqslant 1$,则$\sum a_n$发散.

(2) **贝特朗(Bertrand)判别法** 若存在$b > 1$,当n充分大时$B_n \geqslant b$,则$\sum a_n$收敛;若当n充分大时$B_n \leqslant 1$,则$\sum a_n$发散.

以上两判别法都可简化成极限形式.

(3) **高斯(Gauss)判别法** 设$\rho > 1$,若G_n有下界,$\lambda > 1$或$\lambda = 1 < \mu$,则$\sum a_n$收敛;若G_n有上界,$\lambda < 1$或$\lambda = 1 \geqslant \mu$,则$\sum a_n$发散.

例7 判定级数$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$的敛散性.

解 令$a_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$,则

$$R_n = n\left(\frac{2n+2}{2n-1} - 1\right) = \frac{3n}{2n-1} \longrightarrow \frac{3}{2} > 1,$$

故由拉阿伯判别法知$\sum a_n$收敛.

注意$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$,因此此例不能用比值判别法判定.

例8 研究"超几何级数"$\sum \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$的敛散性,其中$\alpha,\beta,\gamma > 0$.

解 以a_n记级数之通项,则

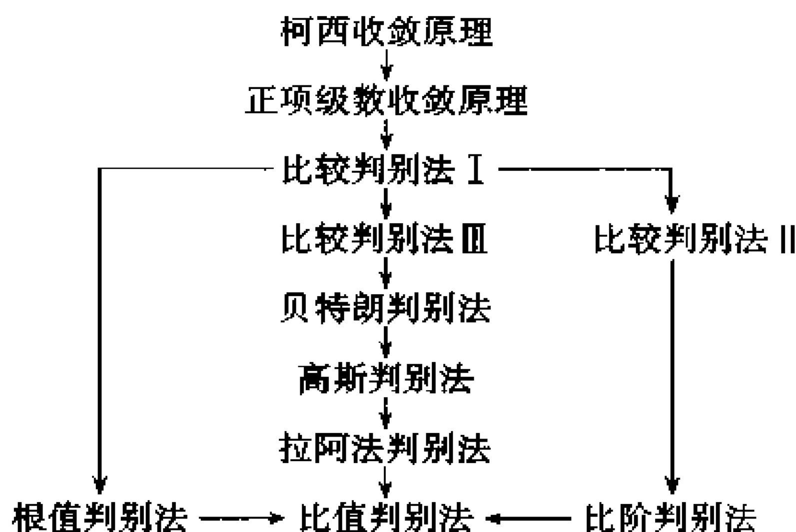
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$
$$= (1+\frac{1}{n})(1+\frac{\gamma}{n})(1+\frac{\alpha}{n})^{-1}(1+\frac{\beta}{n})^{-1}$$

$$= 1 + \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} + \frac{G_n}{n^2},$$

G_n 是有界量．于是由高斯判别法推出：级数在 $\alpha+\beta<\gamma$ 时收敛，在 $\alpha+\beta \geqslant \gamma$ 时发散．

注意 $R_n = 1+\gamma-\alpha-\beta+n^{-1}G_n$，因此当 $\alpha+\beta=\gamma$ 时此例不能用拉阿伯判别法作出判断．

本节所述收敛判别法的逻辑关系如下：



1.3　任意项级数的收敛判别法

设 $\sum a_n$ 是给定的数项级数．若当 n 充分大时 a_n 不变号，则可将正项级数收敛判别法应用于 $\sum a_n$ 或 $\sum(-a_n)$；若 a_n 无限次改变符号，则这种级数 $\sum a_n$ 称为变号级数．对于变号级数，通常首先考察它是否绝对收敛．

1.3.1　绝对收敛判别法

每个正项级数收敛判别法都可用作变号级数的绝对收敛判别法．例如，由比值判别法得出：若存在 $r \in (0,1)$，当 n 充分大时 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant r$，则 $\sum a_n$ 绝对收敛；若当 n 充分大时 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1$（这可推出 $\{a_n\}$ 不收敛于零），则 $\sum a_n$ 发散．

例 9　判定 $\sum n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ 的敛散性．

解　令 $a_n = n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$，则

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{|x|}{\mathrm{e}} \quad (n\to\infty).$$

于是原级数在 $|x|<\mathrm{e}$ 时绝对收敛;在 $|x|>\mathrm{e}$ 时发散．若 $|x|=\mathrm{e}$，则由 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$ 推出

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,$$

故原级数亦发散．

以上方法具有简便的优点，但仅适用于绝对收敛级数．对于不一定绝对收敛的级数，可考虑用下面的几个判别法．

1.3.2　莱布尼兹判别法

莱布尼兹判别法　若 $\{a_n\}$ 单调下降且收敛于零(简写作 $a_n\downarrow 0$)，则称 $\sum(-1)^{n-1}a_n$ 为莱布尼兹型级数．这种级数必定收敛，其余项 R_n 与 $(-1)^n a_{n+1}$ 同号，且有估计：

$$|R_n|\leqslant a_{n+1}.$$

例 10　判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性．

解　令 $f(x)=x-\ln x$，则

$$f'(x)=1-x^{-1}\geqslant 0\quad(x\geqslant 1).$$

因此 $f(x)$ 单调增，从而 $\frac{1}{f(n)}$ 单调减．于是由莱布尼兹判别法推知原级数收敛．

另一方面，因

$$\lim_{n\to\infty}n\left|\frac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|=1,$$

由比阶判别法知级数非绝对收敛，故不能用判定绝对收敛的方法来得出此级数的收敛性．

1.3.3　级数 $\sum a_nb_n$ 的收敛性

(1) **狄利克雷(Dirichlet)判别法**　若 $a_n\downarrow 0$，$\sum b_n$ 的部分和序列有界，则 $\sum a_nb_n$ 收敛．

(2) **阿贝尔判别法**　若 $\{a_n\}$ 单调有界，$\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_nb_n$ 收敛．

例 11　判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}(p>0)$ 的敛散性．

解　首先，注意 $n^{-p}\downarrow 0(n\to\infty)$．其次，

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

在 $x \neq 2k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时有界，于是由狄利克雷判别法知原级数在 $x \neq 2k\pi$ 时收敛．若 $x = 2k\pi$，则直接可看出级数收敛于零．因此级数对任何实数 x 收敛．

1.3.4 级数收敛判别法在判定序列收敛性中的应用

给定序列 $\{x_n\}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ 恰以 $x_n - x_0$ 为其部分和，于是 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ 收敛．这就可将级数收敛判别法应用于序列．下面是两个典型应用．

(1) 迭代序列的收敛性　设 $f(x)$ 在区间 I 上可微，且 $|f'(x)| \leqslant r < 1$，$f(x) \in I(\forall x \in I)$．任取 $x_0 \in I$，令 $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1}), \cdots$，则得到迭代序列 $\{x_n\}$．因由中值定理有

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}\right| = \left|\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\right| \leqslant r,$$

故由比值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ 绝对收敛，从而序列 $\{x_n\}$ 收敛．

(2) 渐近公式　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一发散级数，S_n 是其部分和．若存在序列 $\{A_n\}$，使得 $\{S_n - A_n\}$ 收敛于某个常数 C，则可写成渐近公式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \sim A_n + C.$$

要判定 $\{S_n - A_n\}$ 收敛，只需判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - A_n + A_{n-1})$ 收敛．

例 12　证明 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n + \gamma$，$\gamma$ 是某个常数．

证　令 $a_n = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1), n > 1$，则

$$a_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是由比阶判别法知 $\sum a_n$ 收敛，从而要证结论成立．

此例中的常数 γ 就是著名的欧拉常数：$\gamma = 0.577216\cdots$．

1.4 无穷乘积

1.4.1 无穷乘积概念

任给数列 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$，称记号

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots \tag{1-5}$$

为无穷乘积或乘积，也简写为 $\prod p_n$. 令 $P_n = p_1p_2\cdots p_n$. 若 $P_n \to P(n\to\infty)$，则称 P 为无穷乘积(1-5)的值，写作 $P = \prod p_n$，当 P 有限且非零时称乘积(1-5)收敛. 当乘积(1-5)不收敛时称它是发散的.

若某个 $p_n = 0$，则必 $\prod p_n = 0$. 因此，不妨只考虑 $p_n \neq 0(n = 1,2,\cdots)$ 的情况. 其次，若无穷乘积(1-5)收敛，则必定 $p_n \to 1(n\to\infty)$，因而当 n 充分大时 $p_n > 0$. 故不妨设 $p_n > 0(n = 1,2,\cdots)$. 这样，可将对无穷乘积(1-5)的研究转化为对级数 $\sum \ln p_n$ 的研究. 因此，无穷乘积理论可看作无穷级数理论的一部分.

1.4.2 收敛判别法

(1) 设 $p_n > 0(n = 1,2,\cdots)$，则无穷乘积(1-5)收敛的充要条件是级数 $\sum \ln p_n$ 收敛；无穷乘积(1-5)发散于零的充要条件是 $\sum \ln p_n = -\infty$. 若 $\sum \ln p_n = S(-\infty \leqslant S < +\infty)$，则 $\prod p_n = e^S$(约定 $e^{-\infty} = 0$).

(2) 若级数 $\sum a_n$ 与 $\sum a_n^2$ 同时收敛，则 $\prod(1 + a_n)$ 收敛；若 $\sum a_n$ 收敛而 $\sum a_n^2$ 发散，则 $\prod(1 + a_n) = 0$；若 a_n 不变号，则 $\prod(1 + a_n)$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum a_n$ 收敛.

例 13 判定 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)$ 的敛散性，$p > 0$.

解 由莱布尼兹判别法知 $\sum(-1)^{n-1}n^{-p}$ 收敛. 其次，级数 $\sum n^{-2p}$ 在 $2p > 1$ 时收敛，在 $2p \leqslant 1$ 时发散. 因此所给无穷乘积在 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛，在 $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时发散于零.

1.4.3 绝对收敛性

若级数 $\sum \ln p_n$ 绝对收敛，则称无穷乘积(1-5)绝对收敛. 因当 $a_n \to 0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(1 + a_n)}{a_n}\right| = 1,$$

故由比较判别法 II 得出：无穷乘积 $\prod(1 + a_n)$ 绝对收敛的充要条件是级数 $\sum a_n$ 绝对收敛. 例如，例 13 中的无穷乘积在 $p > 1$ 时绝对收敛，在 $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时非绝对收敛.

若 $\prod p_n$ 绝对收敛，则从级数 $\sum \ln p_n$ 的可交换性(见 1.1.3 节)推出 $\prod p_n$ 的可交换性.

1.4.4 对渐近公式的应用

给定序列 $\{x_n\}$，若能求得另一序列 $\{y_n\}$($\{y_n\}$ 比 $\{x_n\}$ 较简单)与非零常数 C，使得 $\frac{x_n}{y_n} \to C(n\to\infty)$，则称当 $n\to\infty$ 时 x_n 渐近于 Cy_n，并记作 $x_n \sim Cy_n$. 令 $z_n = \frac{x_n}{y_n}$,

则$\{z_n\}$收敛于非零极限的充要条件是无穷乘积$\prod\left(\dfrac{z_n}{z_{n-1}}\right)$收敛.

例 14 证明 $n! \sim Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, C 是某个正常数.

证 若 $z_n = \dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$,则

$$\frac{z_n}{z_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}e,$$

$$\begin{aligned}\ln\frac{z_n}{z_{n-1}} &= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\\ &= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\\ &= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

可见$\sum\ln\left(\dfrac{z_n}{z_{n-1}}\right)$收敛,从而$\prod\left(\dfrac{z_n}{z_{n-1}}\right)$收敛,于是所要证的结论成立.

用更细致的方法可得出,上例中的常数 $C = \sqrt{2\pi}$.

2 函数项级数

2.1 极限函数

2.1.1 极限函数概念

设 X, Y 是两个非空实数集, $f(x,y)$ 是定义于集 $X \times Y$ 上的函数, y_0 是 Y 的极限点(容许 $y_0 = \pm\infty$).若对某些 $x \in X$,存在有限极限

$$\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x,y), \tag{2-1}$$

则称 $\varphi(x)$ 为当 $y \to y_0$ 时 $f(x,y)$ 的**极限函数**.令

$$C = \{x \in X \mid \lim_{y \to y_0} f(x,y) \text{ 存在且有限}\},$$

则 C 就是 $\varphi(x)$ 的定义域,称它为当 $y \to y_0$ 时 $f(x,y)$ 的收敛域.

极限函数的两种典型情况是

1° $Y = \{1,2,\cdots,n,\cdots\}$, $f(x,n) = f_n(x)$,

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),\ x \in C. \tag{2-2}$$

此时称 $\varphi(x)$ 为"函数列"$\{f_n(x)\}$的极限函数.

2° $Y = [a, +\infty)$, $y_0 = +\infty$,

$$\varphi(x) = \lim_{y \to +\infty} f(x,y),\ x \in C. \tag{2-3}$$

关于极限函数的基本问题是：函数 $f(x,y)$ 关于 x 所具有的分析性质（如连续性、可微性等）能否转移到极限函数 $\varphi(x)$，此问题的解答强烈地依赖于极限式 (2-1) 的收敛特性.

下面主要用典型情况(2-2)式与(2-3)式表述有关极限函数的结论，这些结论可自然地推广到其他情况.

2.1.2 一致收敛性

(1) 一致收敛　设 $\varphi(x)$ 依(2-2)式在集 $A(\subset X)$ 上有定义. 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \forall x \in A: |f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

则称当 $n \to \infty$ 时 $f_n(x)$ 在 A 上**一致收敛**于 $\varphi(x)$，记作 $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} \varphi(x)$，或简写为 $f_n \rightrightarrows \varphi$. 若 $\varphi(x)$ 由(2-3)式定义，则一致收敛的条件应改写成：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b > a, \forall y > b, \forall x \in A: |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

(2) 一致收敛的充要条件　在 A 上 $f_n \rightrightarrows \varphi$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|f_n(x) - \varphi(x)| = 0.$$

$\{f_n(x)\}$ 在 A 上一致收敛的充要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall m,n > N, \forall x \in A: |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

若 $\varphi(x)$ 依(2-3)式定义，则以上两个充要条件应分别改写成：

$$\lim_{y\to+\infty}\sup_{x\in A}|f(x,y) - \varphi(x)| = 0$$

与

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b > a, \forall y,z > b, \forall x \in A: |f(x,y) - f(x,z)| < \varepsilon.$$

(3) 内闭一致收敛　若 $X \subset \mathbf{R}$ 是一区间，当 $y \to y_0$ 时 $f(x,y)$ 在 X 的每个闭子区间上一致收敛，则称 $f(x,y)$ 在 X 上**内闭一致收敛**或**紧一致收敛**.

例如，设 $f_n(x) = x^n$，则在 $[0,1)$ 上 $f_n(x) \to 0 (n \to \infty)$. 因

$$\sup_{0\leqslant x<1}|f_n(x) - 0| \geqslant f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} > 0,$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1)$ 上非一致收敛. 另一方面，对任何 $b \in (0,1)$ 有

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant b}|f_n(x)| \leqslant b^n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故在 $[0,b]$ 上 $f_n \rightrightarrows 0$. 由此推出，$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1)$ 上内闭一致收敛.

2.1.3 极限互换定理

极限互换定理　若当 $y \to y_0$ 时 $f(x,y)$ 在 x_0 邻近一致收敛于 $\varphi(x)$（x_0 不必在收敛域内），且对每个 $y \in Y$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在，则

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

当 $\varphi(x)$ 依(2-2)式定义时，上式成为

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x).\tag{2-4}$$

例如,设 $f_n(x)=\frac{x}{n+x}(x\geqslant 0,n=1,2,\cdots)$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=1.$$

这表明当 $n\to\infty$ 时 $f_n(x)$ 在任何区间 $[a,+\infty)(a>0)$ 上非一致收敛.

2.1.4　极限函数的连续性

(1) 设当 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 在 X 上内闭一致收敛于 $\varphi(x)$;对每个 $y\in Y$,$f(x,y)$ 对 x 在点 $x_0\in X$(或在 X 上)连续,则 $\varphi(x)$ 在 x_0(或在 X 上)连续.

(2) **迪尼(Dini)定理**　设 $f(x,y)$ 对 y 单调,当 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 在 $X=[a,b]$ 上收敛于连续函数 $\varphi(x)$,$f(x,y)$ 对 x 在 X 上连续,则当 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 必在 X 上一致收敛于 $\varphi(x)$.

例如,函数 $f_n(x)=x^n$ 在$[0,1]$上连续,而极限函数 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 间断,因此 $f_n(x)$ 在$[0,1]$上必非一致收敛.另一方面,因 $f_n(x)$ 对 n 单调,对任给 $b\in(0,1)$,$\varphi(x)$ 在$[0,b]$上连续,故由迪尼定理推出 $f_n(x)$ 在$[0,b]$上一致收敛.

2.1.5　极限函数的可微性

设当 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 在开区间 X 内至少一点处收敛;对每个 $y\in Y$,$f(x,y)$ 对 x 在 X 内可微,且当 $y\to y_0$ 时 $f'_x(x,y)$ 在 X 上内闭一致收敛,则当 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 在 X 上内闭一致收敛于可微的极限函数,且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}f'_x(x,y).$$

当极限函数依(2-2)式定义时上式成为

$$(\lim_{n\to\infty}f_n(x))'=\lim_{n\to\infty}f'_n(x).\tag{2-5}$$

例如,设　$f_n(x)=\frac{1}{n}\arctan x^n\quad(|x|<\infty,n=1,2,\cdots)$,

则$\{f_n(x)\}$在 $X=(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于零,而

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & |x|\neq 1,\\ \frac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$$

可见,在包含 $x=1$ 的任何区间上,$f'_n(x)$ 必非一致收敛.

此例表明,仅$\{f_n(x)\}$一致收敛不足以保证(2-5)式成立.

2.1.6　极限函数的可积性

设当 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 在 $X=[a,b]$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$;对每个 $y\in Y$,$f(x,y)$ 对 x 在$[a,b]$上可积,则 $\varphi(x)$ 亦在$[a,b]$上可积,且

$$\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x,$$

即
$$\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$
若 $\varphi(x)$ 依(2-2)式定义,则上式成为
$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{2-6}$$

例如,设 $f_n(x) = nxe^{-nx^2}(0 \leq x \leq 1, n = 1,2,\cdots)$,则
$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$
可见 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上必非一致收敛.

2.2　函数项级数

2.2.1　函数项级数概念

设 $u_n(x)(n = 1,2,\cdots)$ 是定义于 X 上的一列函数. 称记号
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{2-7}$$
为 X 上的函数项级数或简称函数级数,称 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 为(2-7)式的部分和,$\{S_n(x)\}$ 是 X 上的一个函数列,其极限函数 $S(x)$(如果存在)称为函数项级数(2-7)的和函数,(2-7)式的收敛域自然就是函数列 $\{S_n(x)\}$ 的收敛域.

另一方面,(2-7)式可看作是一簇随 x 变动的数项级数,这就可将数项级数的所有概念与结论(如绝对收敛性、收敛判别法等)直接用于函数项级数.

2.2.2　一致收敛性

若在某个集 $A(A \subset X)$ 上 $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$,则称级数(2-7)在集 A 上一致收敛于 $S(x)$;若 $\{S_n(x)\}$ 在 X 上内闭一致收敛,则称级数(2-7)在 X 上内闭一致收敛.

对数项级数的每个收敛判别法都可改造成对函数项级数的一致收敛判别法. 一般模式是:若某个收敛判别法中的条件对 $x \in A$"一致地满足",则得出 A 上的一致收敛性. 现分述如下:

(1) 柯西条件　级数(2-7)在 A 上一致收敛的充要条件是
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall m,n > N(m \geq n), \forall x \in A: \left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$
由此特别推出:若级数(2-7)一致收敛,则 $u_n(x) \rightrightarrows 0$.

(2) **魏尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法**　若 $|u_n(x)| \leq b_n(x \in A, n = 1,2,\cdots)$,$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则级数(2-7)在 A 上绝对收敛并一致收敛. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 称为级数(2-7)的"优级数".

魏尔斯特拉斯判别法显然从比较判别法(见 1.2.2 节)转化而来．所有基于比较判别法的收敛判别法均可转化为一致收敛判别法．

(3) 比值判别法　若存在 $r \in (0,1)$, $N > 0$, 使对所有 $n > N$ 与 $x \in A$ 有 $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \leqslant r$, 则级数(2-7)在 A 上绝对收敛并一致收敛．

(4) 狄利克雷判别法　若 $u_n(x)$ 对 n 单调, 在 A 上 $u_n(x) \rightrightarrows 0 (n \to \infty)$; $V_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k(x)$ 在 A 上一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|V_n(x)| \leqslant M (x \in A, n = 1, 2, \cdots)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ 在 A 上一致收敛．

(5) 阿贝尔判别法　若 $u_n(x)$ 对 n 单调, 在 A 上一致有界, $\sum v_n(x)$ 在 A 上一致收敛, 则 $\sum u_n(x) v_n(x)$ 在 A 上一致收敛．

在上面的(4)与(5)中, 若 u_n 或 v_n 不含 x, 则涉及它的条件中可去掉"一致"二字．例如, 若 $u_n(x) \equiv a_n$, 则从 $\{a_n\}$ 单调有界与 $\sum v_n(x)$ 一致收敛可推出 $\sum a_n v_n(x)$ 一致收敛．

例 1　判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} (x \geqslant 0)$ 的一致收敛性．

解　令 $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$, 则

$$u_n(0) = u_n(+\infty) = 0,$$
$$u_n'(x) = e^{-nx}(2x - nx^2).$$

$x = \dfrac{2}{n}$ 是 $u_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的唯一驻点．于是

$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant \max_{x \geqslant 0} u_n(x) = u_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2 e^2}.$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2 e^2}$ 收敛, 故由魏尔斯特拉斯判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛．

例 2　讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p} (p > 0)$ 的一致收敛性．

解　首先, 注意 n^{-p} 单调下降收敛于零．其次,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

在任何不含点 $x = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的闭区间上一致有界．因此, 由狄利克雷判别法知原级数在这样的区间上一致收敛．

2.2.3　和函数的分析性质

(1) 逐项求极限、求导与求积分　在(2-4)～(2-6)式中取 $f_n(x) = S_n(x)$,

得到

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x);\tag{2-8}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x);\tag{2-9}$$

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.\tag{2-10}$$

其中(2-8)式要求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛，$\lim_{x\to x_0}u_n(x)$ 存在；(2-9)式要求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 至少对某点 $x\in X$ 收敛，$u_n(x)$ 在开区间 X 内可微，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 X 上内闭一致收敛；(2-10)式要求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(2) 和函数的连续性　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上内闭一致收敛，每项 $u_n(x)$ 在 $x_0\in X$（或在 X 上）连续，则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 x_0（或在 X 上）连续.

(3) 迪尼定理　设 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于连续函数 $S(x)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 必在 $[a,b]$ 上一致收敛.

3 幂级数与傅里叶级数

3.1 幂 级 数

3.1.1 幂级数概念

任给一列数 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$，称记号

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots\tag{3-1}$$

为以 a_n 为系数的**幂级数**. 若以 $x-x_0$ 替换 x，则从(3-1)式得到形式上稍一般（实质上无异）的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.\tag{3-2}$$

关于幂级数的基本问题是

1° 给定一个幂级数，研究其收敛性；当它（在某区间上）收敛时研究其和函数

的性质,可能时求出和函数.

2° 给定一个函数$f(x)$,确定它是否能"展开"成幂级数、可能时求出其幂级数"展开式".

3.1.2　收敛半径与收敛区间

(1) 收敛半径　令

$$R = (\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} \tag{3-3}$$

(约定$0^{-1} = +\infty$,$(+\infty)^{-1} = 0$),称R为幂级数(3-1)的**收敛半径**.R亦可用公式

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{3-4}$$

计算,只要其中的极限存在.

(2) 收敛区间　若$R > 0$(R依(3-3)式),则级数(3-1)在区间$(-R,R)$上绝对收敛并内闭一致收敛;若$R < \infty$,则级数(3-1)在区间$[-R,R]$之外处处发散.当$R > 0$时称$(-R,R)$为级数(3-1)的**收敛区间**.

(3) 收敛区间的端点.设$0 < R < \infty$,则级数(3-1)在$x = \pm R$可能收敛,也可能发散.级数(3-1)在$x = R$(或$x = -R$)收敛的充要条件是级数(3-1)在$[0,R)$(或$(-R,0]$)上一致收敛.

例1　设$a_n \geqslant 0(n = 1,2,\cdots)$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$条件收敛,求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛域.

解　设R是收敛半径,则$R \geqslant 1$(否则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散),同时又有$R \leqslant 1$(否则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$绝对收敛),因此$R = 1$.于是所求收敛域为$[-1,1)$.

例2　求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n$的收敛域.

解　令$a_n = \frac{1}{n}$,$y = \frac{x}{1+x}$,则依(3-4)式有

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

再利用$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$收敛与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散,得出$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y^n$的收敛域为$-1 \leqslant y < 1$.以$y = \frac{x}{1+x}$代入得

$$-1 \leqslant \frac{x}{1+x} < 1.$$

解此不等式得原级数的收敛域为$[-\frac{1}{2}, +\infty)$.

3.1.3　和函数的性质

设幂级数(3-1)以 R 为收敛半径，$R > 0$；以 $S(x)$ 记其和函数．结合2.2.3节与3.1.2小节的内容得出：

1° 逐项微分公式　$S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内任意次可微，且

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

一般地，对任何 $k \geqslant 1$ 有

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}, \tag{3-5}$$

且等式右端幂级数仍以 R 为收敛半径．在(3-5)式中取 $x = 0$ 得

$$S^{(k)}(0) = a_k k! \quad \text{或} \quad a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}. \tag{3-6}$$

2° 逐项积分公式　任给 $x \in (-R,R)$，有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \tag{3-7}$$

且等式右端之幂级数仍以 R 为收敛半径．

3° 端点性质　若幂级数(3-1)在 $x = R$ 收敛，则 $S(x)$ 在 $x = R$ 左连续，(3-7)式可用于 $x = R$．当幂级数(3-1)在 $x = -R$ 收敛时也有类似结论．

3.1.2节与3.1.3节的结论可自然地推广到幂级数(3-2)．

3.1.4　泰勒级数

(1) 泰勒系数　设 $f(x)$ 在点 x_0 无限次可微．称 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 的**泰勒系数**，称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 的**泰勒级数**，在 $x_0 = 0$ 的泰勒级数，也称为麦克劳林(Maclaurin)级数．

(2) 泰勒展开　设 $f(x)$ 在某个区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内可表示为幂级数：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{3-8}$$

则由3.1.3节(以 x 替换 $x - x_0$)推出，$f(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内无限次可微，且 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$，因而

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

等式右端恰为 $f(x)$ 在 x_0 的泰勒级数，称它为 $f(x)$ 在 x_0 的**泰勒展开式**．

(3) 解析函数　若 $f(x)$ 在开区间 I 内每点可展开为泰勒级数，则称 $f(x)$ 为 I

内的实解析函数．

3.1.5 泰勒余项

(1) 泰勒公式 设 $f(x)$ 在区间 (x_0-R, x_0+R) 内无限次可微，则 $f(x)$ 可表示成：

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x),\quad |x-x_0|<R,$$

其中 $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 是 n 阶泰勒多项式．也是泰勒级数的部分和；$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ 称为**泰勒余项**．

(2) 泰勒余项的3种形式

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\quad(0<\theta<1),$$

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\quad(0<\theta<1),$$

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t,$$

三者分别称为拉格朗日(Lagrange)形式、柯西形式与积分形式．

(3) $f(x)$ 在 (x_0-R, x_0+R) 内可展开为泰勒级数的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad(|x-x_0|<R).\tag{3-9}$$

3.1.6 初等函数的泰勒展开式

(1) 基本展开式 通过直接验证条件(3-9)，可确立以下泰勒展开式：

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(|x|<\infty);$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(|x|<\infty);$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\quad(|x|<1).$$

(2) 求泰勒展开式的间接法 其要领是：将待展开的函数作适当变形(如分解或组合、变量代换、微分或积分等)，使之可利用已知的展开式．求初等函数的泰勒展开式主要依靠间接法．

例3 在 $x=0$ 展开 $f(x)=\arctan\frac{2x}{2-x^2}$ 为泰勒级数．

解 首先展开 $f'(x)$：

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{4+2x^2}{4+x^4}\\&=\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\left(1+\frac{x^4}{4}\right)^{-1}\end{aligned}$$

$$= \left(1+\frac{x^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{4^n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2\times 2n}}{2^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(2n+1)}}{2^{2n+1}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{x^{2n}}{2^n}.$$

然后由公式(3-7)得

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\quad(|x|\leqslant\sqrt{2}).$$

3.1.7　幂级数求和

在一定意义上,"求和"可看作是"展开"的逆运算.因此,每个泰勒展开式可倒过来作为求和公式使用.例如,由 e^x 的展开式得求和公式:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x\quad(|x|<\infty).$$

其次,如同求泰勒展开式一样,幂级数求和亦大量使用间接法,即先将待求和的幂级数作适当变形(如分解或组合、变量代换、逐项微分或积分等),使之能利用已知的求和公式.

例4　求 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$.

解　利用分解 $n^2 = n(n+1) - n$ 与公式(3-5),得

$$S(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} - x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$
$$= x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'' - x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$$
$$= x\left(\frac{1}{1-x}\right)'' - x\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$
$$= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\quad(|x|<1).$$

例5　求 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$.

解　利用分解 $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ 及展开式

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(-1\leqslant x<1),$$

得

$$\begin{aligned}S(x) &= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}\\ &= x + (x-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\\ &= x + (1-x)\ln(1-x) \quad (-1 \leqslant x < 1).\end{aligned}$$

其次,$S(1) = 1$ 可直接得到.

例6 求 $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$.

解 首先求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的和 $S(x)$:

$$S(x) = x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

于是

$$S = S\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{27}.$$

3.1.8 幂级数的运算

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2, $R = \min\{R_1, R_2\} > 0$.

1° 幂级数的加减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n \quad (|x| < R),$$

等式右端幂级数的收敛半径 $\geqslant R$.

2° 幂级数的乘法 依级数乘法公式(1-4)有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right)x^n \quad (|x| < R),$$

等式右端幂级数的收敛半径 $\geqslant R$.

例7 求 $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ 在 $x = 0$ 的泰勒展开式.

解 已知

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots \quad (|x| < 1),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots \quad (-1 \leqslant x < 1).$$

于是依幂级数乘法规则有

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^n \quad (|x| < 1).$$

3.2　多重幂级数

3.2.1　多重指标

(1) 任给 $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$,约定 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$,

$$|\alpha| = \sum \alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!;$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},$$

其中 $\beta \in \mathbf{Z}_+^n$ 满足 $\beta \leqslant \alpha$(即 $\beta_i \leqslant \alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant n$).

(2) 任给 $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$,约定 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

$$\boldsymbol{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

(3) 任给 $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$,约定

$$\partial^\alpha f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

只要上式右端之 $|\alpha|$ 阶偏导数存在.

利用以上缩记号,可极大地简化一些含 n 个变元的公式.例如,一般的牛顿展开式可表示为

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \boldsymbol{x}^\alpha$$

$$= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

对 n 元函数的高阶莱布尼兹公式可表示为

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} u \partial^\beta v.$$

3.2.2　多重幂级数

任给 n 重数列 $\{c_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{Z}_+^n\}$,称记号

$$\sum_\alpha c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha = \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n = 0}^{\infty} c_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \tag{3-10}$$

为 **n 重幂级数**,c_α 是它的系数.

若级数(3-10)在点 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$ 收敛且 $\bar{x}_i \neq 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$,取 $r_i \in (0, |\bar{x}_i|) (1 \leqslant i \leqslant n)$,令

$$D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid |x_i| \leqslant r_i (1 \leqslant i \leqslant n)\},$$

则(3-10)及将它逐项微分任意次后的级数皆在 D 上一致收敛.于是,类似于(3-5)式有

$$\partial^\beta S(\boldsymbol{x}) = \sum_{\alpha \geqslant \beta} c_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta}. \tag{3-11}$$

$S(\boldsymbol{x})$ 记为(3-10)式的和函数．在上式中取 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\in\mathbf{R}^n$ 得

$$\partial^{\beta}S(\boldsymbol{0})=c_{\beta}\beta! \quad 或 \quad c_{\beta}=\frac{\partial^{\beta}S(\boldsymbol{0})}{\beta!}, \tag{3-12}$$

(3-12)式是(3-6)式的推广．

3.2.3 多重泰勒级数

(1) 泰勒系数　设 $f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n)$ 在点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 无限次可微，称 $\frac{\partial^{\alpha}f(\boldsymbol{0})}{\alpha!}(\alpha\in\mathbf{Z}_+^n)$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的泰勒系数；称

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}f(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x}^{\alpha}$$

为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的泰勒级数．

(2) 泰勒展开　设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的某一邻域内可表示为 n 重幂级数：

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{\alpha}c_{\alpha}\boldsymbol{x}^{\alpha},$$

则由(3-12)式有 $c_{\alpha}=\frac{\partial^{\alpha}f(\boldsymbol{0})}{\alpha!}$，因而 $\sum c_{\alpha}\boldsymbol{x}^{\alpha}$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的泰勒级数，称它为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的泰勒展开式．

(3) 泰勒余项　$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的 m 次泰勒多项式可表示为

$$T_m(\boldsymbol{x})=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}f(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x}^{\alpha}.$$

余项 $R_m(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-T_m(\boldsymbol{x})$ 可取以下不同形式：

$$R_m(\boldsymbol{x})=\sum_{|\alpha|=m+1}\frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}f(\theta\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^{\alpha}\quad(0<\theta<1),$$

$$R_m(\boldsymbol{x})=\sum_{|\alpha|=m+1}\frac{(m+1)\boldsymbol{x}^{\alpha}}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^m\partial^{\alpha}f(t\boldsymbol{x})\mathrm{d}t.$$

3.2.4 多元初等函数的泰勒展开式

利用一元函数的泰勒展开式及级数的运算，可得出一些较简单的多元初等函数的泰勒展开式．例如，

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}&=\exp(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\\&=\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\boldsymbol{a}^{\alpha}\boldsymbol{x}^{\alpha}(\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n);\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}=\sum_{\alpha}\boldsymbol{x}^{\alpha}(|x_i|<1,1\leqslant i\leqslant n);$$

$$\ln(1+x)\ln(1+y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}x^my^n}{mn}$$

$$(|x|<1,\ |y|<1).$$

3.3 傅里叶级数

3.3.1 三角级数

任给实数 $a_0, a_1, \cdots, b_1, b_2, \cdots$,称

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{3-13}$$

为以 2π 为周期的**三角级数**,称 a_n, b_n 为其系数．一般地,对任给正实数 l,称

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{3-14}$$

为以 $2l$ 为周期的三角级数．

关于三角级数的基本问题是

1° 对给定的三角级数,研究其收敛性,以及和函数(如果存在)的性质．此问题颇为复杂,并无普遍有效的解答．

2° 对给定的函数 $f(x)$,确定它能否“展开”为三角级数;可能时求出其三角级数“展开式”.

3.3.2 傅里叶级数

(1) 傅里叶系数　设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的绝对可积函数(见 4.1.3 节). 令

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3-15}$$

称 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的**傅里叶系数**．

(2) 傅里叶级数　若 a_n, b_n 是 $f(x)$ 的傅里叶系数,则称级数(3-13) 为 $f(x)$ 的**傅里叶级数**,写作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \tag{3-16}$$

因此,只要 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积,就有一个确定的傅里叶级数与之对应．但此傅里叶级数是否收敛,是否以 $f(x)$ 为和函数,则未可定论．

(3) 三角函数系的正交性　若 $[a, b]$ 上的可积函数列 $\{\varphi_n\}$ 满足

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

则称 $\{\varphi_n\}$ 为区间 $[a, b]$ 上的“标准正交系”. 三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

即为区间 $[-\pi,\pi]$ 上的标准正交系．由此结论可推出:若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可表示为一致收敛的三角级数,则此三角级数必为傅里叶级数．

3.3.3　傅里叶级数的收敛性

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有定义且仅有第一类间断点，令 $S(x)=\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)](-\pi<x<\pi)$，$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}[f((-\pi)^+)+f(\pi^-)]$. 关于 $f(x)$ 的傅里叶级数在给定点 $x_0\in[-\pi,\pi]$ 的收敛性有以下结论：

1° 黎曼局部化原理　$f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 的收敛性仅依赖于 $f(x)$ 在 x_0 邻近的值(若 $x_0=\pi$ 或 $-\pi$，则"x_0 邻近"应同时包括 $\pm\pi$ 邻近).

2° 迪尼判别法　若存在 $h>0$，使积分

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S(x_0)|}{t}\mathrm{d}t$$

有限，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 收敛于 $S(x_0)$.

3° 狄利克雷 - 约当(Dirichlet-Jordan)判别法　若 $f(x)$ 在 x_0 邻近可表示为两增函数之差(这样的函数称为有界变差函数)，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 收敛于 $S(x_0)$.

由以上结论可推出一个简单条件，即傅里叶级数收敛的充分条件：若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可微或分段单调，且至多有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处收敛，其和函数是以 2π 为周期的函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上等于 $S(x)$，而在 $f(x)$ 于 $(-\pi,\pi)$ 内的连续点 x 处等于 $f(x)$，在 $f(x)$ 的间断点 x 处等于 $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$.

3.3.4　复数形式的傅里叶级数

(1) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积，令

$$c_n=\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x. \tag{3-17}$$

称 $c_n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的复数形式的傅里叶系数，而称 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ 为 $f(x)$ 的复数形式的傅里叶级数，记作

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}. \tag{3-18}$$

(2) 与"实形式"的关系　比较(3-15)、(3-17)两式得出

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2},\quad n=1,2,\cdots.$$

由此可推出：若不计各项的顺序，则(3-16)、(3-18)两式右端的级数恰好一致.

复数形式的优点是它能使一些公式表达得更简洁.

3.3.5　傅里叶系数的性质

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积，a_n，b_n 由(3-15)式确定，c_n 或 $\hat{f}(n)$ 由

(3-17) 式确定.

(1) 对任何常数 α,β,有

$$(\alpha f+\beta g)\hat{}(n)=\alpha\hat{f}(n)+\beta\hat{g}(n),\quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

(2) 当 $n\to\pm\infty$ 时 $c_n\to 0$(这相当于 $a_n\to 0, b_n\to 0$).这表明,级数(3-13)式是某函数的傅里叶级数的必要条件是 $a_n\to 0, b_n\to 0$(但并非充分条件).

(3) 微分性质　若 $f(x)$ 连续可微且 $f(-\pi)=f(\pi)$,则 $\widehat{f'}(n)=\mathrm{i}n\hat{f}(n)$,这相当于

$$f'(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}(c_n e^{\mathrm{i}nx})',$$

即 $f'(x)$ 的傅里叶级数是 $f(x)$ 的傅里叶级数逐项微分的结果.由 $\widehat{f'}(n)\to 0$ 推出 $\hat{f}(n)=o\left(\frac{1}{|n|}\right)(n\to\pm\infty)$.一般地,若 $f(x)$ 有 k 阶连续导数且 $f^{(r)}(-\pi)=f^{(r)}(\pi)$, $r=0,1,\cdots,k-1$,则 $\hat{f}(n)=o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)(n\to\pm\infty)$.

(4) 积分性质.无论 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛与否,都可对它逐项积分,且得出等式:

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}t=\frac{a_0 x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t.$$

(5) 奇(偶)函数的傅里叶系数　若 $f(x)$ 是奇函数,则

$$a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x;\tag{3-19}$$

若 $f(x)$ 是偶函数,则

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad b_n=0.\tag{3-20}$$

(6) **帕塞瓦尔(Parseval)等式**　若 $f^2(x)$ 可积,则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

或

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

例 8　求 x 与 x^2 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶展开式.

解　x 是奇函数,由公式(3-19)算出

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx=\frac{2}{n}(-1)^{n-1}\quad(n\geqslant 1),$$

于是

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\quad(|x|<\pi).$$

然后两边积分一次得

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x \frac{\sin nt}{n}dt$$
$$= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$$
$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2} \quad (|x| \leqslant \pi).$$

注意,将帕塞瓦尔等式用到 x 的展开式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.3.6　正弦级数与余弦级数

(1) 由(3-19),(3-20)式推出,奇函数的傅里叶级数是**正弦级数**,偶函数的傅里叶级数是**余弦级数**.

(2) 在$[0,\pi]$上展开 $f(x)$ 为正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$,相当于在$[-\pi,\pi]$上展开 $f(x)$ 的"奇延拓"

$$F(x) = \begin{cases}-f(-x), & -\pi \leqslant x < 0,\\ f(x), & 0 < x \leqslant \pi\end{cases}$$

为傅里叶级数,系数 b_n 就依(3-19)式计算.

(3) 在$[0,\pi]$上展开 $f(x)$ 为余弦级数$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$,相当于在$[-\pi,\pi]$上展开 $f(x)$ 的"偶延拓"

$$F(x) = \begin{cases}f(-x), & -\pi \leqslant x < 0,\\ f(x), & 0 < x \leqslant \pi\end{cases}$$

为傅里叶级数,系数 a_n 就依(3-20)式计算.

例 9　在$[0,\pi]$上展开 $f(x) = x$ 为余弦级数.

解　依公式(3-20)有

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx = \pi;$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi}$$
$$= \begin{cases}0, & n = 2k,\\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & n = 2k-1.\end{cases}$$

于是

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

3.3.7 $f(x)$ 在$[-l,l]$上展开的傅里叶级数

设$f(x)$在$[-l,l]$上满足3.3.3节中的收敛条件,则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], & |x| < l, \\ \frac{1}{2}[f((-l)^+) + f(l^-)], & |x| = l, \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x. \end{cases} \tag{3-21}$$

例 10 在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上展开$f(x) = x\cos x$为傅里叶级数.

解 在(3-21)式中取$l = \frac{\pi}{2}$,算出

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\sin 2nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(2n+1)x}{2n+1} - \frac{x\cos(2n-1)x}{2n-1} + \right. \\ &\quad \left.\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{16n(-1)^{n-1}}{\pi(4n^2-1)^2}\ (n \geqslant 1). \end{aligned}$$

因$f(x)$是奇函数,故$a_n = 0$. 于是

$$f(x) = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin 2nx}{(4n^2-1)^2}\ (|x| \leqslant \frac{\pi}{2}).$$

3.3.8 $f(x)$ 在$[a,b]$上展开的傅里叶级数

设$f(x)$在$[a,b]$($a < b$)上满足3.3.3节中的收敛条件,则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], & a < x < b, \\ \frac{1}{2}[f(a^+) + f(b^-)], & x = a, b, \end{cases}$$

其中 $$l = \frac{(b-a)}{2},$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \\ b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \end{cases} \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{3-22}$$

例 11 在[1,3]上展开 $f(x) = x$ 为傅里叶级数 .

解 由公式(3-22)算出

$$a_0 = \int_1^3 x\mathrm{d}x = 4;$$

$$a_n = \int_1^3 x\cos n\pi x\mathrm{d}x = 0 \quad (n \geqslant 1);$$

$$b_n = \int_1^3 x\sin n\pi x\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi} \quad (n \geqslant 1).$$

于是

$$f(x) \sim 2 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\pi x}{n} = \begin{cases} x, & 1 < x < 3, \\ 2, & x = 1,3. \end{cases}$$

3.4 广义求和法

3.4.1 切萨罗求和法

给定数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$,令

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k.$$

若 $\sigma_n \to \sigma(n \to \infty)$,则称 σ 为级数 $\sum a_n$ 的**切萨罗(Cesàro)和或费耶(Fejér)和**. 切萨罗和有以下性质:

1° 若 $S_n \to S$,则 $\sigma_n \to S$;但一般从 $\sigma_n \to S$ 推不出 $S_n \to S$. 可见切萨罗求和法是普通求和法的推广 .

2° 若 $a_n \geqslant 0(n = 1,2,\cdots)$,则 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 与 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n$ 均存在且相等 .

以上两性质表明,切萨罗求和法仅对发散的变号级数才有特殊意义 .

3° 若 $|na_n|$ 有上界(或有下界),则 $S_n \to S \Leftrightarrow \sigma_n \to S$.

例 12 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 的切萨罗和 .

解 令 $a_n = (-1)^n$,则

$$S_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n],$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4n} \to \frac{1}{2}(n \to \infty).$$

故 $\frac{1}{2}$ 是级数 $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 的切萨罗和 .

例 13 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的切萨罗和.

解 分别算出:

$$S_n(x)=\left[\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\Big/\left(2\sin\frac{x}{2}\right);$$

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{\sin(n+1)x-\sin x}{4n\sin^2(x/2)}.$$

因此当 $0<|x|\leqslant\pi$ 时 $\sigma_n(x)\to\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$. 其次显然 $\sigma_n(0)\to 0$.

3.4.2 阿贝尔 - 泊松求和法

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $0<x<1$ 时收敛,且存在极限

$$A=\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

则称 A 为级数 $\sum a_n$ 的**阿贝尔 - 泊松(Abel-Poisson)和**. 这种求和法有如下性质:

1° 若 $\sigma_n\to\sigma$,则 $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sigma$. 由此可推出:若 $S_n\to S$,则 $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S$.

2° 若 $a_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

3° Tauber 定理. 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=0$,则

$$S_n\to S\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S.$$

由性质 1° 及例 13 的结果得出,例 13 中的级数有阿贝尔 - 泊松和 $\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}(0<|x|\leqslant\pi)$. 这可直接验证如下:

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx=\lim_{r\to 1^-}\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}$$

$$=\frac{\sin x}{2-2\cos x}=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\ (0<|x|\leqslant\pi).$$

3.4.3 傅里叶级数的广义求和法

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积, a_n, b_n 是其傅里叶系数, $S_n(x)$ 是傅里叶级数的部分和. 则

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k(x)$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{\sin\frac{n(x-y)}{2}}{\sin(\frac{y}{2})}\right]^2 dy;$$

$$f(r,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-y)+r^2}dy.$$

1° 若 $x_0 \in [-\pi,\pi]$，$f(x_0^{\pm})$ 存在，$S(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0) = \lim_{r\to 1^-} f(r,x) = S(x_0).$$

当 $x_0 = \pm\pi$ 时，应取 $S(x_0) = \frac{1}{2}[f((-\pi)^+) + f(\pi^-)]$.

2° 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且 $f(-\pi) = f(\pi)$，则在 $[-\pi,\pi]$ 上 $\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x)(n\to\infty)$，$f(r,x) \rightrightarrows f(x)(r\to 1^-)$.

由上述结论 1°,2° 分别可得出如下推论：

1° 若 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 x_0 收敛于 S，$f(x_0^{\pm})$ 存在，则必定 $S = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$.

2° 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且 $f(-\pi) = f(\pi)$，则有三角多项式序列在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 事实上，$\{\sigma_n(x)\}$ 就是这样的三角多项式序列.

4　广义积分与参变积分

4.1　广义积分

4.1.1　广义积分概念

设 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上，$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. $f(x)$ 在 $x = a, b$ 有无定义，对以下考虑的积分均无影响.

(1) 设 a 有限，对任给 $\beta \in (a,b)$，$f(x)$ 在 $[a,\beta]$ 上依通常的意义可积（简称常义可积），$f(x)$ 在 (a,b) 上无界或 $b = +\infty$（此时说 b 是一个奇点）. 若存在极限

$$l = \lim_{\beta\to b^-}\int_a^{\beta} f(x)dx$$

（当 $b = +\infty$ 时，将 $\beta \to b^-$ 理解为 $\beta \to +\infty$，下同），则称 l 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的（广义）积分，记作 $l = \int_a^b f(x)dx$；当 l 有限时称积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛或 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（广义）可积.

(2) 设 b 有限，对任给 $\alpha \in (a,b)$，$f(x)$ 在 $[\alpha,b]$ 上常义可积，$f(x)$ 在 (a,b) 上无界或 $a=-\infty$（此时说 a 是一个奇点）. 若存在极限

$$l=\lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x$$

（当 $a=-\infty$ 时，将 $\alpha\to a^+$ 理解为 $\alpha\to-\infty$，下同），则称 l 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的（广义）积分，记作 $l=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；当 l 有限时称积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛或 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（广义）可积.

(3) 设存在有限个点 $x_i: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$f(x)$ 在 (a,b) 内任何不包含点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的闭区间上常义可积，在 $x_i(1\leqslant i<n)$ 邻近无界（即 x_i 是奇点）；取点 $c_i: x_0<c_1<x_1<c_2<\cdots<c_n<x_n$. 若 $f(x)$ 在区间 $[x_0,c_1]$，$[c_1,x_1]$，$\cdots$，$[c_n,x_n]$ 上皆可积，则说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积或积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{c_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c_1}^{x_1}f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{c_n}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

以上定义与点 c_i 的选取无关.

若积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不收敛，则称它发散.

例 1　研究 p 积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a,p>0)$ 的敛散性.

解　若 $p=1$，则

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{\beta\to+\infty}\ln\frac{\beta}{a}=+\infty.$$

若 $p\neq1$，则

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}&=\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\\&=\lim_{\beta\to+\infty}\left.\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\right|_a^\beta\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p>1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}\end{aligned}$$

因此，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，在 $p\leqslant1$ 时发散.

类似地，p 积分 $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}(-\infty<a<b<+\infty)$ 在 $p<1$ 时收敛，在 $p\geqslant1$ 时发散. 对积分 $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}$ 有类似结论.

4.1.2　广义积分的性质

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上（常义或广义）可积.

1° 线性性 对任给常数 α,β 有

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g\mathrm{d}x.$$

2° 可加性 对任给 $c\in(a,b)$ 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

3° 比较性 若 $f(x)\leqslant g(x)(a<x<b)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

4° $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$

5° 中值定理 若 $-\infty<a<b<+\infty$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 (a,b) 上不变号，则存在 $c\in[a,b]$：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

6° $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 (a,b) 内连续，且对 f 在 (a,b) 内的连续点 x 有 $F'(x)=f(x)$.

7° 牛顿-莱布尼兹公式 设 $F(x)$ 是 (a,b) 内的连续函数，$F(a^+)$ 与 $F(b^-)$ 存在(当 $a=-\infty$ 时 $F(a^+)$ 应代以 $F(-\infty)$；$b=+\infty$ 时仿此)，至多除有限个点外，$F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b^-)-F(a^+).\tag{4-1}$$

8° 变量代换公式 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$\varphi(t)$ 在 (α,β)(或 (β,α)) 内单调并连续可微，$\lim\limits_{t\to\alpha}\varphi(t)=a$，$\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.\tag{4-2}$$

上式右端积分可以是广义积分.

9° 分部积分公式 设 $u(x),v(x)$ 在 (a,b) 内连续可微，则

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x=uv\Big|_a^b-\int_a^b u'v\mathrm{d}x,\tag{4-3}$$

其中

$$uv\Big|_a^b=\lim_{x\to b^-}u(x)v(x)-\lim_{x\to a^+}u(x)v(x).$$

假定(4-3)式中的三项有两项收敛(第三项亦必收敛).

例2 求 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 采用公式(4-1)，有

$$I=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi.$$

例 3 求 $I=\int_0^{+\infty}(1+x^2)^{-3/2}\arctan x\mathrm{d}x$.

解 采用公式(4-2),令 $x=\tan t$,则

$$I=\int_0^{\pi/2}t\cos t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-1.$$

例 4 求 $I=\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x$.

解 采用公式(4-3),有

$$I=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

4.1.3 绝对收敛性

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上仅有有限个奇点,令

$$f^+(x)=\frac{1}{2}[\,|f(x)|+f(x)],\quad f^-(x)=\frac{1}{2}[\,|f(x)|-f(x)],$$

则 f^+ 与 f^- 非负,且

$$f=f^+-f^-,\quad |f|=f^++f^-.$$

1° 若 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积,则说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**绝对可积**,或说积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛而非绝对收敛,则说它条件收敛.

2° f 绝对可积 $\Leftrightarrow f^+$ 与 f^- 皆可积 $\Rightarrow f$ 可积.

4.1.4 广义积分与级数的联系

(1) 设积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 仅以 b 为奇点(其他情况仿此),则此积分收敛的充要条件是:对 (a,b) 内任何趋于 b 的序列 $\{b_n\}$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_{n-1}}^{b_n}f(x)\mathrm{d}x$(约定 $b_0=a$)收敛;在收敛的情况下有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_{n-1}}^{b_n}f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) **积分判别法** 若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负且单调减,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛的充要条件是积分 $\int_1^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例 5 研究级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}(p>0)$ 的敛散性.

解 因 $f(x)=\frac{1}{x\ln^p x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上非负、单调减,而

$$\int_2^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p}\ (t=\ln x),$$

故 $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ 在 $p>1$ 时收敛，在 $p\leqslant 1$ 时发散．

4.1.5　收敛判别法

以下所述的收敛判别法与级数收敛判别法(见1.2节,1.3节)恰相对应．

(1) 柯西收敛准则　积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(假定仅以 b 为奇点,其他情况仿此)收敛的充要条件是，$\forall \varepsilon>0, \exists c\in(a,b)$，当 $c<\alpha<\beta<b$ 时 $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

(2) 非负函数积分的收敛准则　设 $f(x)\geqslant 0$，则积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(仅以 b 为奇点)收敛的充要条件是 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b)$上有界．

(3) 比较判别法 Ⅰ　设在(a,b)内 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，则当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，当 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散时 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散．

(4) 比较判别法 Ⅱ　设在(a,b)内 $f(x)\geqslant 0, g(x)>0, \lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$，$b$ 是唯一奇点，则当 $l<+\infty$，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；当 $l>0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散时 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散；当 $0<l<+\infty$ 时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同．

(5) 比阶判别法 Ⅰ　设当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的 p 阶无穷小，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$(假定仅以 $+\infty$ 为奇点)收敛或发散依 $p>1$ 或 $p\leqslant 1$ 而定．

(6) 比阶判别法 Ⅱ　设 $b<+\infty$，当 $x\to b^-$ 时 $f(x)$ 是 $\dfrac{1}{(b-x)}$ 的 p 阶无穷大，则积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(假定仅以 b 为奇点)收敛或发散依 $p<1$ 或 $p\geqslant 1$ 而定．当 a 是唯一奇点时有类似判别法．

(7) 狄利克雷判别法　设当 $x\to b$ 时 $f(x)$ 单调减且趋于零，$G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ 在(a,b)上有界，则积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$(假定仅以 b 为奇点)收敛．

(8) 阿贝尔判别法　设 $f(x)$ 在(a,b)上单调有界，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛．

例6　判定积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$ 的敛散性．

解 因$+\infty$是唯一奇点，当$x\to+\infty$时$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$是$\dfrac{1}{x}$的$\dfrac{3}{2}$阶无穷小，故积分收敛.

例 7 研究积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\,(p>0)$的收敛性与绝对收敛性.

解 1° 令$f(x)=x^{-p}\sin x$，考虑积分$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 当$p\leqslant 1$时$x=0$不是奇点. 若$p>1$，则当$x\to 0^+$时$f(x)$是$\dfrac{1}{x}$的$p-1$阶无穷大，因此$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$在$p<2$时收敛且是绝对收敛，在$p\geqslant 2$时发散.

2° 考虑积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$. 因$\int_1^x \sin t\mathrm{d}t$有界，当$x\to+\infty$时$x^{-p}$单调下降趋于零，故由狄利克雷判别法知$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛. 若$p>1$，则由$|f(x)|\leqslant x^{-p}$知$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛. 若$p\leqslant 1$，则

$$\int_1^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\int_\pi^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|f(x)|\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi\frac{|\sin t|}{(n\pi+t)^p}\mathrm{d}t\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n\pi+\pi)^p}=+\infty.$$

综上讨论得出：积分$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$在$0<p\leqslant 1$时条件收敛，在$1<p<2$时绝对收敛，在$p\geqslant 2$时发散.

4.1.6 广义重积分

以二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$为例说明，其中$f(x,y)$在$D$上无界，或$D$是无界区域.

(1) 定义 设D_n是D的一列有界子区域，f在D_n上常义可积，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n=D$，若$n\to\infty$时$\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$恒收敛(其极限必与$D_n$的选择无关)，则称积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$收敛，或说$f(x,y)$在$D$上(广义)可积，且规定

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$收敛的充要条件是$\iint\limits_D|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$收敛. 因此，对重积分没有绝对收敛概念，这是与广义定积分的一重大差别.

(3) 化重积分为逐次积分的公式与变量代换公式皆可推广到广义重积分. 例如，若$f(x,y)$在xy平面上可积，则

$$\iint_{R^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r.$$

例 8　求 $I = \iint_{R^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　采用极坐标,有

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r = \pi.$$

另一方面,因

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2,$$

故得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

4.2　参变积分

设 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$,$f(x,y)$ 定义在$(a,b)\times Y$上,(常义或广义)积分

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \tag{4-4}$$

对某些 $y \in Y$ 存在.称(4-4)式为以 y 为参变量的**参变积分**.关于参变积分的基本研究课题是:研究它所定义的函数的分析性质及对之进行极限运算、微分与积分运算的方法.

4.2.1　常义参变积分

设对每个 $y \in Y$,(4-4)式作为常义积分存在,则 $\varphi(y)$ 有以下性质:

1° 连续性　若 $f(x,y)$ 在$[a,b]\times Y$上连续,则 $\varphi(y)$ 在 Y 上连续.

2° 可微性　若偏导数 $f_y(x,y)$ 存在且 f 与 f_y 皆在$[a,b]\times Y$上连续,则 $\varphi(y)$ 在 Y 上可微,且

$$\varphi'(y) = \int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

一般地,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x,y)\mathrm{d}x + f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y),$$

其中 $f_y(x,y)$ 连续,而 $a(y)$,$b(y)$ 可微.

3° 积分互换　若 $f(x,y)$ 在$[a,b]\times[c,d]$上连续,则

$$\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4.2.2 广义参变积分

不妨设积分(4-4)式仅以 b 为奇点,则

1° $\varphi(y)$ 是 2.1 节中所述的极限函数,即

$$\varphi(y) = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t,y)\mathrm{d}t.$$

2° $\varphi(y)$ 可表示为一函数级数的和函数,即

$$\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

其中 $a = b_0 < b_1 < \cdots < b_n \to b$.

据此,可将 2.1 节与 2.2 节中的概念与结论用于广义参变积分.

4.2.3 一致收敛性

设积分(4-4) 以 b 为唯一奇点(其他情况可类似讨论). 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in (a, b), \forall \beta \in (c,b), \forall y \in A$,有

$$\left| \int_a^\beta f(x,y)\mathrm{d}x - \varphi(y) \right| < \varepsilon,$$

则称积分$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 对 y 在集 A 上一致收敛(于 $\varphi(y)$). 若$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 Y 的每个闭子区间上一致收敛,则称它在 Y 上内闭一致收敛.

下面的参变积分的一致收敛判别法,与函数级数的一致收敛判别法(2.2.2 小节)恰相对应.

(1) 柯西条件　积分$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$(假定 b 是唯一奇点,其他情况仿此) 对 y 在 A 上一致收敛的充要条件是,$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in (a,b), \forall \alpha, \beta \in (c,b), \forall y \in A$,有 $\left| \int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$.

(2) 魏尔斯特拉斯判别法　若存在$[a,b]$上的非负可积函数 $g(x)$,使得 $|f(x,y)| \leqslant g(x)(x \in (a,b), y \in A)$,则对 $y \in A$,积分$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 绝对收敛并一致收敛. 上述的 $g(x)$ 称为"优函数".

(3) 狄利克雷判别法　设$f(x,y)$ 对 x 单调,当 $x \to b(x < b)$ 时 $f(x,y)$ 关于 $y \in A$ 一致收敛于零;积分$\int_a^x g(t,y)\mathrm{d}t$ 关于 $x \in (a,b)$ 与 $y \in A$ 一致有界,则积分 $\int_a^b f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x$(假定仅有奇点 b) 对 y 在 A 上一致收敛.

(4) 阿贝尔判别法　设 $f(x,y)$ 对 x 单调,对 $x \in (a,b)$ 与 $y \in A$ 一致有界; $\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x$ 对 y 在 A 上一致收敛,则积分$\int_a^b f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x$ 对 y 在 A 上一致收敛.

在上述的(3)、(4)中,若$f(x,y)$或$g(x,y)$与y无关,则在涉及它的条件中可去掉“一致”二字.例如,若$f(x,y)=f(x)$,则当$f(x)$单调有界,$\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x$一致收敛时,$\int_a^b f(x)g(x,y)\mathrm{d}x$一致收敛.

例9　研究$\int_1^{+\infty}x^y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$的一致收敛性.

解　1° $\forall\beta\in(-\infty,+\infty)$,$\int_1^{+\infty}x^y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$在$(-\infty,\beta]$上一致收敛;因当$y\leqslant\beta$时$x^y\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^\beta\mathrm{e}^{-x}(x\geqslant 1)$,$x^\beta\mathrm{e}^{-x}$可作为优函数.

2° $\int_1^{+\infty}x^y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛.否则,当$a\to+\infty$时关于$y>0$一致地有

$$a^y\mathrm{e}^{-a}=a^y\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{+\infty}x^y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\to 0,$$

但取$y=a$,有$a^a\mathrm{e}^{-a}\to+\infty(a\to+\infty)$,得出矛盾.

例10　判定积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x(\alpha\geqslant\alpha_0>0)$的一致收敛性.

解　因$\mathrm{e}^{-\alpha x}$对x单调,当$x\to+\infty$时对$\alpha\geqslant\alpha_0$一致地有$\mathrm{e}^{-\alpha x}\to 0$,而$\int_0^x\sin t\mathrm{d}t$有界,故由狄利克雷判别法知$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$对$\alpha\geqslant\alpha_0$一致收敛.

例11　判定$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x(\alpha\geqslant 0)$的一致收敛性.

解　因$\mathrm{e}^{-\alpha x}$对$\alpha,x\geqslant 0$一致有界且对x单调,而$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$收敛,故由阿贝尔判别法知原积分对$\alpha\geqslant 0$一致收敛.

4.2.4　积分号下求极限、导数与积分

(1) 积分号下取极限　设积分(4-4)对$y\in Y$一致收敛且b是唯一奇点;$\forall\beta\in(a,b)$,当$y\to y_0$时$f(x,y)$对$x\in[a,\beta]$一致收敛,则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{y\to y_0}f(x,y)\mathrm{d}x.\tag{4-5}$$

(2) 积分号下求导　设偏导数$f_y(x,y)$存在且f与f_y皆在$[a,b)\times Y$上连续;积分(4-4)仅以b为奇点且当$y\in Y$时收敛;积分$\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x$对$y$在$Y$上内闭一致收敛,则在$Y$内下式成立:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x.\tag{4-6}$$

(3) 积分互换　设$f(x,y)$在$[a,b)\times[c,d]$上连续,积分(4-4)对y在$[c,d]$上一致收敛,则

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \tag{4-7}$$

公式(4-5) ~ (4-7) 常用来简化积分计算．

例 12 求 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$, $|a| \leqslant 1$.

解 令 $I = I(a)$,则由公式(4-6)有

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^1 \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= -2a\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1-a^2)t^2+1} \quad \left(t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= -\frac{\pi a}{\sqrt{1-a^2}} \quad (|a|<1), \end{aligned}$$

其中用到 $\forall \beta \in (0,1)$,积分$\int_0^1 \frac{-2a\,dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 对 $|a| \leqslant \beta$ 一致收敛．于是

$$I = I(0) + \int_0^a I'(a)da = \pi(\sqrt{1-a^2}-1).$$

例 13 求 $I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}(e^{-ax}-e^{-bx})dx$ $(0<a<b)$.

解 利用 $x^{-1}(e^{-ax}-e^{-bx}) = \int_a^b e^{-xy}dy$ 及公式(4-7),有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}\sin x\,dy \\ &= \int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\,dx \\ &= \int_a^b \frac{dy}{y^2+1} = \arctan b - \arctan a, \end{aligned}$$

其中用到$\int_0^{+\infty}e^{xy}\sin x\,dx$ 对 $y\in[a,b]$ 一致收敛．

例 14 求 $I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$.

解 令 $I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$,则

$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \ (\alpha>0).$$

于是

$$I(\alpha,\beta) = I(\alpha,0) + \int_0^\beta \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}d\beta = \arctan\frac{\beta}{\alpha},$$

$$I = \lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta.$$

其中用到公式(4-5),而验证公式(4-5)所需之条件满足．

4.2.5 对参数的连续性

(1) 设$f(x,y)$在$[a,b)\times Y$上连续,积分(4-4)对y在区间Y上内闭一致收敛,则$\varphi(y)$在Y上连续.

(2) 迪尼定理 若$f(x,y)$在$[a,b)\times[c,d]$上非负连续且积分(4-4)收敛于$[c,d]$上的连续函数$\varphi(y)$,则积分(4-4)对y在$[c,d]$上一致收敛.

4.3 一些重要的积分

4.3.1 欧拉积分

称以下两个参变积分为**欧拉积分**:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\ (\alpha>0);$$

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\ (\alpha,\beta>0).$$

二者又分别称为Γ函数与B函数.

欧拉积分的主要性质表现在以下公式:

1° 递推公式

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\ (\alpha>0);$$

一般地,

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n)\ (\alpha>n). \tag{4-8}$$

特别地,取$\alpha=n+1$得出

$$\Gamma(n+1)=n!\Gamma(1)=n!.$$

2° 高斯公式

$$\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\alpha+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{n^{n\alpha}}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\Gamma(n\alpha),\ \alpha>0.$$

3° 余元公式

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\ (0<\alpha<1).$$

特别地,取$\alpha=\frac{1}{2}$得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

4° 转换公式

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\ (\alpha,\beta>0).$$

利用公式(4-8)及$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$可得

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\ (n\geqslant 1).\tag{4-9}$$

欧拉积分常用来计算(常义或广义)积分.

例 15 求 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

解 作代换 $x^2=t$,得

$$I=\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

例 16 求 $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$.

解 作代换 $1+x^4=\frac{1}{t}$,则 $4x^3dt=-\frac{dt}{t^2}$,于是

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt\\&=\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma(1)}\\&=\frac{\pi}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

例 17 求 $I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x dx$.

解 作代换 $\sin^2x=t$,则

$$\begin{aligned}I_{2n}&=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{2n-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt\\&=\frac{1}{2}B\left(\frac{2n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(n+1)}\\&=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\quad(\text{用(4-9)式}).\end{aligned}$$

4.3.2 狄利克雷积分

在 4.2 节例 14 中已求得积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta,$$

此积分称为狄利克雷积分.其实有一系列积分可转化为狄利克雷积分来计算.

例 18 求 $I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\beta x}{x}\right)^2dx$.

解 用分部积分公式(4-3),有

$$I=-\frac{\sin^2\beta x}{x}\bigg|_0^{+\infty}+\beta\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\beta x}{x}dx$$

$$= 0 + \beta \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} 2\beta$$

$$= \frac{\pi}{2} |\beta|.$$

采用类似的方法可用来计算$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\beta x}{x}\right)^n \mathrm{d}x$ $(n > 2)$.

4.3.3　菲涅耳积分

菲涅耳(Fresnel) 积分指如下一对相等的积分:

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

利用代换 $x^2 = t$,由以上积分得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

例 19　求 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + bx + c)\mathrm{d}x,\ a > 0.$

解　因

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

用 $t = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ 作代换得(记 $\beta = c - \frac{b^2}{4a}$)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t^2 + \beta) \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty} (\sin t^2 \cos\beta + \cos t^2 \sin\beta)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} (\sin\beta + \cos\beta) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sin \frac{4ac - b^2 + a\pi^2}{4a}.$$

参 考 文 献

1　陈传璋等 . 数学分析:下册 . 第 2 版 . 北京:高等教育出版社,1983.
2　波利亚,舍贵 . 分析中的问题和定理 . 上海:上海科学技术出版社,1981.
3　菲赫金哥尔茨 . 微积分学教程:第二卷第二、三分册 . 北京:高等教育出版社,1954.

常用泰勒展开式

1° $\frac{1}{1-x} = \sum_{0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$.

2° $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1)$.

3° $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n \quad (|x| < 1)$.

4° $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1)$.

5° $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{1}^{\infty} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} \quad (|x| < 1)$.

6° $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n \quad (|x| \leqslant 1)$.

7° $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad (-1 \leqslant x < 1)$.

8° $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad (|x| \leqslant 1)$.

9° $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad (|x| < 1)$.

10° $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \sum_{2}^{\infty} \frac{(3n-4)(3n-7)\cdots 5\cdot 2}{3n(3n-3)\cdots 6\cdot 3}x^n \quad (|x| \leqslant 1)$.

11° $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{(3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1}{3n(3n-3)\cdots 6\cdot 3}x^n \quad (-1 \leqslant x < 1)$.

12° $e^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (|x| < +\infty)$.

13° $\sinh x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|x| < +\infty)$.

14° $\cosh x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < +\infty)$.

15° $\sin x = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|x| < +\infty)$.

16° $\cos x = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < +\infty)$.

17° $\sinh^2 x = \sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < +\infty)$.

18° $\sin^2 x = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ 　$(|x|<+\infty)$.

19° $\cosh^2 x = 1 + \sum_1^\infty \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ 　$(|x|<+\infty)$.

20° $\cos^2 x = 1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ 　$(|x|<+\infty)$.

21° $\tan x = \sum_1^\infty \frac{4^n(4^n-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}$ 　$(|x|<\frac{\pi}{2})$.

22° $\tanh x = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n 4^n(4^n-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}$ 　$(|x|<\frac{\pi}{2})$.

23° $\cot x - \frac{1}{x} = -\sum_1^\infty \frac{4^n B_n}{(2n)!}x^{2n-1}$ 　$(0<|x|<\pi)$.

24° $\coth x - \frac{1}{x} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}4^n B_n}{(2n)!}x^{2n-1}$ 　$(0<|x|<\pi)$.

25° $\ln(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 　$(-1<x\leqslant 1)$.

26° $\arcsin x = x + \sum_1^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 　$(|x|\leqslant 1)$.

27° $\operatorname{arsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$= x + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|\leqslant 1).$$

28° $\arctan x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ 　$(|x|\leqslant 1)$.

29° $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 　$(|x|<1)$.

30° $e^x\cos x = \sum_0^\infty \left(2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}$ 　$(|x|<+\infty)$.

31° $e^x\sin x = \sum_0^\infty \left(2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}$ 　$(|x|<+\infty)$.

32° $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} - \sum_1^\infty \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!}x^{2n}$ 　$(|x|<2\pi)$.

33° $\ln\frac{\sin x}{x} = -\sum_1^\infty \frac{4^n B_n}{(2n)!}\frac{x^{2n}}{2n}$ 　$(|x|<\pi)$.

B_n 是伯努利(Bernoulli)数,它们决定于无穷递推方程组

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\binom{2n+1}{2k}B_k = n - \frac{1}{2}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

$\{B_n\}$ 的前面几个数是$\frac{1}{6},\frac{1}{30},\frac{1}{42},\frac{1}{30},\frac{5}{66},\frac{691}{2730},\frac{7}{6},\cdots$.

常用傅里叶展开式

1° $\operatorname{sgn}x = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\quad(|x|<\pi).$

2° $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}\quad(|x|<\pi).$

3° $\pi - x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}\quad(0<x<2\pi).$

4° $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\quad(|x|\leqslant\pi).$

5° $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}\quad(|x|\leqslant\pi).$

6° $x^3 = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(12-2n^2\pi^2)}{n^3}\sin nx\quad(|x|<\pi).$

7° $x\sin x = 1 - \dfrac{\cos x}{2} - 2\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx\quad(|x|\leqslant\pi).$

8° $x\cos x = -\dfrac{\sin x}{2} - 2\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin nx\quad(|x|<\pi).$

9° $|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}\quad(|x|<+\infty).$

10° $|\cos x| = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cos 2nx}{4n^2-1}\quad(|x|<+\infty).$

11° $e^{ax} = \dfrac{2\sinh a\pi}{\pi}\left[\dfrac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a\cos nx - n\sin nx}{n^2+a^2}\right]\quad(|x|<\pi).$

12° $\sinh ax = \dfrac{2\sinh\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n\sin nx}{n^2+a^2}\quad(|x|<\pi).$

13° $\cosh ax = \dfrac{\sinh\pi a}{\pi}\left[\dfrac{1}{a} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nx}{n^2+a^2}\right]\quad(|x|\leqslant\pi).$

常用求和公式

1° $\sum_{0}^{\infty}x^n = \dfrac{1}{1-x}\quad(|x|<1).$

2° $\sum_{1}^{\infty}nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}\quad(|x|<1).$

3° $\sum_{1}^{\infty}n^2x^n = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}\quad(|x|<1).$

4° $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (-1 \leqslant x < 1).$

5° $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \quad (-1 < x \leqslant 1).$

6° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$

7° $\sum_{2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = (1-x)\ln(1-x) + x \quad (|x| \leqslant 1).$

8° $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

9° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} = \ln 4 - 1.$

10° $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1).$

11° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} = \arctan x \quad (|x| \leqslant 1).$

12° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$

13° $\sum_{2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \frac{2+x}{4} + \frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x) \quad (|x| \leqslant 1).$

14° $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}.$

15° $\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{4}.$

16° $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)} = x\ln\frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2) \quad (|x| < 1).$

17° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)} = 2x\arctan x - \ln(1+x^2) \quad (|x| \leqslant 1).$

18° $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\ln 2.$

19° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$

20° $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad (|x| < +\infty).$

21° $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x \quad (|x| < +\infty).$

22° $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad (|x| < +\infty).$

23° $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sinh x \quad (|x| < +\infty).$

24° $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad (|x| < +\infty).$

25° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \quad (-1 \leqslant x < 1).$

26° $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1.$

27° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arcsin x - x \quad (|x| \leqslant 1).$

28° $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arsinh} x - x \quad (|x| \leqslant 1).$

29° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - 1.$

30° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \ln(1+\sqrt{2}) - 1.$

31° $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$

32° $\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| \quad (0 < |x| \leqslant \pi).$

33° $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n} = \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) \quad (|x| < \pi).$

34° $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2} \quad (|x| < \pi).$

35° $\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{n} = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x - \cos x \ln(2\sin x) \quad (0 < x < \pi).$

36° $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{n} = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x + \sin x \ln(2\sin x) \quad (0 < x < \pi).$

37° $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{n} = x\sin x + \cos x \ln(2\cos x) \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right).$

38° $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)x}{n} = x\cos x - \sin x \ln(2\cos x) \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right).$

39° $\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\cot\frac{x}{2}\right| \quad (0 < |x| < \pi).$

40° $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x \quad (|x| < \pi).$

41° $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & (0\leqslant x<\frac{\pi}{2}),\\ -\frac{\pi}{4} & (\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi).\end{cases}$

42° $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$

43° $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi).$

44° $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n^2}=\frac{3x^2-3\pi x+\pi^2}{6}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$

45° $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2}=\frac{x(\pi-x)}{2}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$

46° $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}|x|\quad(|x|\leqslant\pi).$

47° $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}=1.2337\cdots$

48° $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2+1}=\frac{\pi\cosh x}{2\sinh\pi}-\frac{1}{2}\quad(|x|\leqslant\pi).$

49° $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{n^2+1}=\frac{\pi\sinh x}{2\sinh\pi}\quad(|x|<\pi).$

50° $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{2}(\pi\coth\pi-1)=1.07667\cdots$

51° $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}=\frac{\pi}{2\sinh\pi}-\frac{1}{2}=-0.36398\cdots$

52° $\sum_{2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2-1}=\frac{1}{2}+\frac{x-\pi}{2}\sin x+\frac{\cos x}{4}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$

53° $\sum_{2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2-1}=\sin x\left(\frac{1}{4}-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\right)\quad(|x|\leqslant\pi).$

54° $\sum_{2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2-1}=\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{4}-\frac{x\sin x}{2}\quad(|x|\leqslant\pi).$

55° $\sum_{2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n^2-1}=\sin x\left(\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\right)\quad(|x|<\pi).$

56° $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}|\sin x|\quad(|x|<+\infty).$

57° $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sin x\ln\left|\cot\frac{x}{2}\right|\quad(|x|<+\infty).$

58° $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}=\frac{\pi}{4}|\cos x|-\frac{1}{2}\quad(|x|<+\infty).$

59° $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin 2nx}{4n^2-1}=\frac{\cos x}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\quad(|x|<+\infty)$.

60° $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$.

61° $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=0.285398\cdots$.

62° $\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cos(\sin x)\quad(|x|<+\infty)$.

63° $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}=e^{\cos x}\sin(\sin x)\quad(|x|<+\infty)$.

64° $\sum_{0}^{\infty}q^n\cos nx=\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}\quad(|q|<1,|x|<+\infty)$.

65° $\sum_{1}^{\infty}q^n\sin nx=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}\quad(|q|<1,|x|<+\infty)$.

66° $\sum_{1}^{\infty}\frac{q^n\cos nx}{n}=-\frac{1}{2}\ln(1-2q\cos x+q^2)\quad(|q|<1,|x|<+\infty)$.

67° $\sum_{1}^{\infty}\frac{q^n\sin nx}{n}=\arctan\frac{q\sin x}{1-q\cos x}\quad(|q|<1,|x|<+\infty)$.

68° $\sum_{1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2\pi^2}=\frac{\coth x}{2}-\frac{1}{2x},x\neq 0$.

69° $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{x^2+n^2\pi^2}=\frac{1}{2\sinh x}-\frac{1}{2x},x\neq 0$.

70° $\sum_{1}^{\infty}\frac{x}{x^2-n^2\pi^2}=\frac{\cot x}{2}-\frac{1}{2x},x\neq n\pi,n=0,\pm 1,\cdots$.

71° $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{x^2-n^2\pi^2}=\frac{1}{2\sin x}-\frac{1}{2x},x\neq n\pi,n=0,\pm 1,\cdots$.

72° $\sum_{1}^{\infty}\frac{x}{x^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}=-\frac{\tan x}{2},x\neq\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi,n\neq 0,\pm 1,\cdots$.

73° $\sum_{1}^{\infty}\frac{x}{x^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}=\frac{\tanh x}{2}$.

74° $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2+4}=\frac{\pi\tanh\pi}{8}=0.391235\cdots$

75° $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{(2\pi)^{2k}B_k}{2(2k)!},k=1,2,\cdots$, B_k 是伯努利数.

76° $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}=1.6449\cdots$

77° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} = 1.082323\cdots$

78° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} = 0.822467\cdots$

79° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx = 0.915965\cdots$

80° $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} = 1.01734\cdots$

81° $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx = 1.29128\cdots$

82° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right).$

常用积分公式

1° $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(a+bx^m)^p} dx = \frac{1}{ma^p}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} B\left(p - \frac{n}{m}, \frac{n}{m}\right), a, b, m, p > 0,$
$0 < n < mp.$

2° $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{a+bx^m} dx = \frac{1}{ma}\left(\frac{a}{b}\right)^{n/m} \frac{\pi}{\sin \frac{n}{m}\pi}, a, b > 0, 0 < n < m.$

3° $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x^m} dx = \frac{\pi}{m \sin \frac{n}{m}\pi}, 0 < n < m.$

4° $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin(\frac{\pi}{n})}, n > 1.$

5° $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

6° $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

7° $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}.$

8° $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{\pi}{2a^{2n-1}} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}, a > 0, n \geqslant 2.$

9° $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} = \frac{1}{m} B\left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right), n > 1, m > 0.$

10° $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2}\right), m > 0.$

11° $\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-bx}dx = b^{-a}\Gamma(a), a, b > 0.$

12° $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}, a > 0.$

13° $\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}, a > 0.$

14° $\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-ax}\cos bx dx = \frac{\Gamma(p)\cos p\theta}{(a^2+b^2)^{p/2}}, a, p > 0, \theta = \arctan\frac{b}{a}.$

15° $\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-ax}\sin bx dx = \frac{\Gamma(p)\sin p\theta}{(a^2+b^2)^{p/2}}, a, p > 0.$

16° $\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}dx = \arctan\frac{b}{a}, a > 0.$

17° $\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-bx^2}dx = \frac{1}{2}b^{-a/2}\Gamma(\frac{a}{2}), a, b > 0.$

18° $\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-bx^2}dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}b^n}\sqrt{\frac{\pi}{b}}, n \geqslant 1, b > 0.$

19° $\int_0^{\infty} x^{2n-1}e^{-bx^2}dx = \frac{(n-1)!}{2b^n}, n \geqslant 1, b > 0.$

20° $\int_0^{\infty} e^{-bx^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}, b > 0.$

21° $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ （欧拉 - 泊松积分）.

22° $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}, a > 0.$

23° $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cosh bx dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}, a > 0.$

24° $\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin^{2n}x dx = \frac{(2n)!}{a(2^2+a^2)(4^2+a^2)\cdots(4n^2+a^2)}, a > 0.$

25° $\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin^{2n-1}x dx = \frac{(2n-1)!}{(1+a^2)(3^2+a^2)\cdots((2n-1)^2+a^2)}, a > 0.$

26° $\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-bx^n}dx = \frac{1}{nb^{\frac{a}{n}}}\Gamma\left(\frac{a}{n}\right), a, b, n > 0.$

27° $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right), m, n > -1.$

28° $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}, n \geqslant 1.$

29° $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, n \geqslant 0.$

30° $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a+\sin^2 x)^2} = \frac{\pi(2a+1)}{4(a^2+a)^{3/2}}, a > 0.$

31° $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx = \frac{n\pi}{2}$ （费耶积分）.

32° $\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\text{sgn}\alpha$ （狄利克雷积分）.

33° $\int_0^{\infty} \frac{\tan\alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\text{sgn}\alpha$.

34° $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}|\alpha|$.

35° $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$.

36° $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx = \ln\frac{b}{a}, a, b > 0$.

37° $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ （菲涅耳积分）

38° $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

39° $\int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^p}dx = \frac{\pi\alpha^{p-1}}{2\Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2}}$, $0 < p < 1, \alpha > 0$.

40° $\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x^p}dx = \frac{\pi\alpha^{p-1}}{2\Gamma(p)\sin\frac{p\pi}{2}}$, $0 < p < 2, \alpha > 0$.

41° $\int_0^{\infty} \frac{\sin^p x}{x}dx = 2^{p-2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma(p)}, p = \frac{m}{n}$, m, n 是正奇数．

42° $\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ab}, a, b > 0$ （拉普拉斯积分）.

43° $\int_0^{\infty} \frac{x\sin bx}{a^2 + x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ab}, a, b > 0$.

44° $\int_0^1 x^{a-1}\ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{a^{n+1}}, a > 0, n \geqslant 0$.

45° $\int_0^{\infty} e^{-x}\ln x dx = -\gamma$, γ 是欧拉常数．

46° $\int_0^1 \ln x\ln(1+x)dx = 2 - \ln 4 - \frac{\pi^2}{12}$.

47° $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \frac{\pi^2}{12}$.

48° $\int_0^1 \ln x\ln(1-x)dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

49° $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

50° $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ （欧拉积分）.

51° $\int_0^{\pi} \ln(a \pm b\cos x)\mathrm{d}x = \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}, 0 < b \leqslant a.$

52° $\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\mathrm{d}x = 2\pi\ln a, 0 < b \leqslant a.$

53° $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2q\cos x + q^2)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & |q| \leqslant 1, \\ 2\pi\ln|q|, & |q| > 1. \end{cases}$

54° $\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+q\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x = \pi\arcsin q \quad (|q| < 1).$

55° $\int_0^{2\pi} \frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}\mathrm{d}x = 2\pi, |q| < 1.$

56° $\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2q\cos x+q^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi q^n}{1-q^2}, |q| < 1$. n 为自然数 .

57° $\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+2x\cos\alpha+x^2} = \frac{\alpha}{2\sin\alpha}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

58° $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+2x\cos\alpha+x^2} = \frac{\alpha}{\sin\alpha}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

59° $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.$

60° $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{\pi}{\sinh a\pi}\right), a \neq 0.$

61° $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}.$

62° $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\pi\coth a\pi - \frac{1}{a}\right), a \neq 0.$

63° $\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x-1}\mathrm{d}x = \frac{(2\pi)^{2n}B_n}{4n}$, B_n 是伯努利数 .

64° $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}.$

·经典数学卷·

第3篇

高等代数

编　者　毛纲源
审校者　王萼芳

目　录

引　言

高等代数的内容主要包括多项式理论初步和线性代数基础这两部分.

中华古国是线性代数的发祥地.《九章算术》第8章"方程"中的十八问全是解线性方程组的内容.在该章中所引入的负数概念以及正、负数加减法则在世界数学史上都是最早的记载,其中关于一次方程组的解法比西方同类解法要早1500年,但线性代数的崛起和完善却在18世纪~19世纪的西欧.

高等代数的理论与方法在数学学科和其他自然科学、社会科学领域内都有广泛的应用.现代科学技术特别是电子计算机及计算科学的迅猛发展,为高等代数开辟了更广阔的应用前景.因此学习和掌握高等代数的理论和方法是必不可少的.

1　多项式

1.1　一元多项式运算及其基本性质

1.1.1　一元多项式概念

(1) 设 M 是一个数集,$a \in M, b \in M$.如果 a 与 b 的和(或差、积、商)仍属于 M,则称加法(或减法、乘法、除法)在 M 中是可施行的,也称这运算对 M 是封闭的.

(2) 在非空数集 P 中,如果加法、减法、乘法是封闭的,则称 P 为一个数环.

(3) 如果 F 是至少有两个数的数环,且 F 对除法(零不作除数)是封闭的,则 F 叫数域.

(4) 设 x 是一个文字,n 是非负整数,$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是数域 F 中的数,则其形式表达式

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{1-1}$$

称为数域 F 上的**一元多项式**,常表示为 $f(x), g(x), \cdots$.

在多项式(1-1)中,a_0 叫做零次项或常数项,$a_i x^i$ 叫做 i 次项,a_i 称为 i 次项的系数.满足条件 $a_n \neq 0$ 的最大整数 n 叫做该多项式的次数,记为次$(f(x)) = n$,a_n 称为它的首项系数.当 $a_n = 1$ 时,称该多项式为首一多项式.

除 $a_0 \neq 0$ 外,其他 a_i 都是零的多项式称为零次多项式.此外,如果多项式(1-1)中各项系数均为零,就称其为零多项式,记为 $0(x)$.多项式 $0(x)$ 的"次数"没有意义,它是唯一没有次数的多项式.这里零多项式与零次多项式的含义是不同的.

1.1.2　一元多项式的运算及其基本性质

(1) 如果多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的同次项的系数分别相同，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记为 $f(x)=g(x)$.

(2) 数域 F 上的两个多项式的和、差、积仍然是数域 F 上的多项式. 记数域 F 上全体一元多项式组成的集合为 $F[x]$，于是 $F[x]$ 关于多项式加法、减法及乘法封闭，因而 $F[x]$ 为数域 F 上的一元多项式环.

(3) 次数公式

$$次(f(x)\pm g(x))\leqslant \max(次(f(x)),次(g(x)));$$
$$次(f(x)g(x))=次(f(x))+次(g(x)).$$

(4) 多项式加法及乘法运算与数的运算类似，满足通常的算律.

1.2　多项式的整除理论

1.2.1　多项式整除的概念

设 $f(x),g(x)\in F[x]$. 若存在 $h(x)\in F[x]$，且满足 $f(x)=g(x)h(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，或称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，记为 $g(x)\mid f(x)$. 若此 $h(x)$ 不存在，就称 $g(x)$ 不整除 $f(x)$，记为 $g(x)\nmid f(x)$.

1.2.2　整除的性质

(1) 零次多项式(即非零常数)整除一切多项式；

(2) 任意多项式整除 $0(x)$，特别地，$0(x)$ 整除 $0(x)$；

(3) 若 $h(x)\mid g(x),g(x)\mid f(x)$，则 $h(x)\mid f(x)$(整除的传递性)；

(4) 若 $f(x)\mid g(x),g(x)\mid f(x)$，则 $f(x)=cg(x)$，其中 c 为非零常数；

(5) $c\cdot f(x)\mid f(x)$，其中 c 为非零常数；

(6) 若 $g(x)\mid f_1(x),g(x)\mid f_2(x)$，则 $g(x)\mid[u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)]$，其中 $u_1(x)$ 与 $u_2(x)$ 是任意多项式；

(7) 若 $g(x)\mid f(x)$，则次$(f(x))\geqslant$次$(g(x))$；

(8) 若 $p(x)$ 为一不可约多项式，且 $p(x)\mid f(x)g(x)$，则 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$.

例1　设 $h(x)\mid[3f(x)+2g(x)],h(x)\mid[2f(x)-3g(x)]$. 试证：$h(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x)$.

证　由 $h(x)\mid[3f(x)+2g(x)],h(x)\mid[2f(x)-3g(x)]$，有

$$3f(x)+2g(x)=h(x)p(x),$$
$$2f(x)-3g(x)=h(x)q(x).$$

由上两等式，得到

$$f(x)=h(x)\left[\left(\frac{3}{13}\right)p(x)+\left(\frac{2}{13}\right)q(x)\right],$$

$$g(x) = h(x)\left[\left(\frac{2}{13}\right)p(x) - \left(\frac{3}{13}\right)q(x)\right],$$

故

$$h(x) \mid f(x), h(x) \mid g(x).$$

1.2.3 带余除法

带余除法定理 对于数域 F 上的任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，其中 $g(x) \neq 0(x)$，总有数域 F 上的多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$，满足

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \tag{1-2}$$

其中 $r(x)$ 或者是 $0(x)$，或者比 $g(x)$ 次数低，这里 $r(x)$ 称为余式，$q(x)$ 称为商式，而且这样的 $q(x)$ 和 $r(x)$ 是唯一的 .

下面举例给出求商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 的方法，这种除法称为**带余除法** .

例 2 设 $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x - 6$，$g(x) = x^2 + 2x - 1$. 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得商式 $q(x)$ 及余式 $r(x)$.

解 因为

$$\begin{array}{r|r|l}
(g(x)) & (f(x)) & (q(x)) \\
x^2+2x-1 & 2x^4 \qquad -3x^2+2x-6 & 2x^2-4x+7 \\
 & 2x^4+4x^3-2x^2 \qquad\qquad & \\
\hline
 & -4x^3-x^2+2x-6 & (f_1(x)) \\
 & -4x^3-8x^2+4x \qquad & \\
\hline
 & 7x^2-2x-6 & (f_2(x)) \\
 & 7x^2+14x-7 & \\
\hline
 & -16x+1 & (r(x))
\end{array}$$

$$f_1(x) = f(x) - g(x) \cdot 2x^2,$$
$$f_2(x) = f_1(x) - g(x) \cdot (-4x),$$
$$r(x) = f_2(x) - g(x) \cdot 7,$$

所以

$$f(x) = g(x)(2x^2 - 4x + 7) + (-16x + 1),$$

从而得到

$$\text{商式} \quad q(x) = 2x^2 - 4x + 7,$$
$$\text{余式} \quad r(x) = -16x + 1.$$

1.2.4 余数定理与综合除法

(1) **余数定理** 设 $c \in F$ 为一常数，则多项式 $f(x) \in F[x]$ 除以 $x - c$ 所得的余数等于 $f(c)$.

(2) 综合除法 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. $f(x)$ 除以 $x - c$ 的商式与余数的计算格式如下：

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ & + & cb_0 & cb_1 & \cdots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{array}$$

式中 $b_0 = a_0, b_i = a_i + cb_{i-1}(i = 1,2,\cdots,n)$. 于是得到

商式 $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$,

余式 $r = b_n = f(c)$.

利用上述计算格式求得商式 $q(x)$ 和余式(余数)r 的方法称为**多项式的综合除法**. 该法将除式为 $x - c$ 的带余除法大大地简化了. 用此法很容易判断一次多项式 $x - c$ 是否整除多项式 $f(x)$.

例3　判断 $x + 3$ 能否整除 $x^5 + 22x^2 + 40$.

解　用综合除法求出 $x + 3$ 除 $f(x)$ 的余数,看余数是否为0. 为此将所给多项式的系数按降幂排列,缺项补0,于是有

$$\begin{array}{c|cccccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 22 & 0 & 40 \\ & + & -3 & 9 & -27 & 15 & -45 \\ \hline & 1 & -3 & 9 & -5 & 15 & -5 \end{array}$$

这表明

$$q(x) = x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 5x + 15,$$
$$r = -5 \neq 0.$$

即

$$x^5 + 22x^2 + 40 = (x + 3) \cdot (x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 5x + 15) - 5.$$

因此

$$(x + 3) \nmid x^5 + 22x^2 + 40.$$

1.2.5　两个多项式的最大公因式

(1) 设 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的一个公因式. 如果对于 $f(x), g(x)$ 的任一公因式 $h(x)$ 都有 $h(x) \mid d(x)$,那么称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个**最大公因式**.

(2) 设 $f(x), g(x) \in F[x]$,且不全为0(x),则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式一定存在,且除一个非零常数外,是唯一的.

显然,不全为0(x) 的 $f(x), g(x)$ 的最大公因式中首项系数为1的只有一个. 这个最高公因式用符号$(f(x), g(x))$ 表示.

(3) 最大公因式的求法　采用**多项式的辗转相除法**.

(4) 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式 $d(x)$ 为最大公因式的充要条件是存在多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$,满足

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x).$$

例4　设 $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1, g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. 试求$(f(x), g(x))$ 及 $u(x)$ 和 $v(x)$,使

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

解　用辗转相除法求之.

$(q_1(x))$	$(f(x))$	$(g(x))$	$(q_2(x))$
$x+1$	$x^4+2x^3+x^2+x+1$	x^3+x^2-x-1	$x-2$
	$x^4+x^3-x^2-x$	x^3+3x^2+2x	
	x^3+2x^2+2x+1	$-2x^2-3x-1$	
	x^3+x^2-x-1	$-2x^2-6x-4$	
$(q_3(x))$	$(r_1(x))\quad x^2+3x+2$	$(r_2(x))\quad 3x+3$	
$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$	x^2+x		
	$2x+2$		
	$2x+2$		
	0		

不难得到下列算式:

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x),$$

即

$$r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x).$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x),$$

即

$$r_2(x) = g(x) - q_2(x)r_1(x).$$

$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x),$$

即

$$d(x) = (f(x),g(x)) = r_2(x).$$

因而有

$$\begin{aligned} 3x+3 = d(x) &= r_2(x) = g(x) - q_2(x)r_1(x) \\ &= g(x) - q_2(x)[f(x) - q_1(x)g(x)] \\ &= [-q_2(x)]f(x) + [1 + q_1(x)q_2(x)]g(x), \end{aligned}$$

则

$$u(x) = -q_2(x) = -x+2;$$

$$v(x) = 1 + q_1(x)q_2(x) = 1 + (x+1)(x-2) = x^2 - x - 1,$$

使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

(5) **多项式互素** 如果 $f(x), g(x) \in F[x]$,而 $(f(x), g(x)) = 1$,则称 $f(x)$, $g(x)$ 互素.

例 5 设 $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 7$, $g(x) = x + 2$. 证明

$$(f(x), g(x)) = 1.$$

证 由于 $g(x) = x + 2$ 是一次多项式,若 $(f(x), g(x)) \neq 1$,则 $(f(x), g(x)) = g(x)$,因而必有 $g(x) \mid f(x)$,但由综合除法有

−2	5	0	−3	2	−7
0]		−10	20	−34	64
	5	−10	17	−32	57

这表明$g(x)\nmid f(x)$,因而$(f(x),g(x))$不能是一次多项式,于是有$(f(x),g(x))=1$.

(6) $f(x)$与$g(x)$互素的充要条件是存在$u(x)$与$v(x)$,使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

1.2.6　多个多项式的最大公因式

(1) 设$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)(s\geqslant 2)$是数域$F$上的多项式.若有$d(x)\in F[x]$满足

1° $d(x)\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,s$;

2° $d(x)$是各$f_i(x)$公因式的倍式,即若$h(x)\in F[x],h(x)\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,s$,则$h(x)\mid d(x)$,那么就称$d(x)$是$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$的最大公因式.

(2) $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$的最大公因式一定存在,且除一个非零常数因子外,是唯一的.设

$$d(x)=((\cdots((f_1(x),f_2(x)),f_3(x)),\cdots),f_s(x)),$$

则$d(x)$是$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$的最大公因式.

(3) 假设$d(x)$是$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$的公因式,则

$$d(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))$$

的充要条件是存在$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_s(x)$满足

$$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=d(x).$$

(4) 在多项式$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)(s\geqslant 2)$中,若任意两个多项式$f_i(x)$,$f_j(x)$均互素,即$(f_i(x),f_j(x))=1(i,j=1,2,\cdots,s;i\neq j)$.则称这些多项式两两互素.

(5) 若多项式$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)(s\geqslant 2)$的最大公因式为零次多项式,即$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))=1$,则称这些多项式整体互素.

显然,两两互素一定保证整体互素;反之,整体互素却不一定两两互素.例如,

$$f_1(x)=x^2-1,$$
$$f_2(x)=(x+1)^2,$$
$$f_3(x)=(x-1)^2$$

整体互素,但不两两互素,因为

$$(f_1(x),f_3(x))=x-1.$$

(6) 多项式$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$整体互素的充要条件是存在$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_s(x)$,满足

$$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=1.$$

1.3 一元多项式的因式分解

1.3.1 因式分解定理

(1) 不可约多项式概念　设$f(x)$为$F[x]$中次数大于零的一个多项式,若在$F[x]$中$f(x)$只有平凡因式,则$f(x)$称为$F[x]$中的**不可约多项式**.也说$f(x)$在$F[x]$中不可约,或说$f(x)$在F上不可约.如果$f(x)$在$F[x]$中有非平凡因式,则称$f(x)$是$F[x]$中可约多项式.

(2) **多项式的因式分解定理**　数域F上高于零次的多项式,可以分解成F上不可约多项式的乘积,除次序和非零常数因子外,分解是唯一的.

1.3.2 重因式

(1) **多项式的重因式**.若$p^k(x) \mid f(x), p^{k+1}(x) \nmid f(x), k \geqslant 1$,则称$p(x)$是$f(x)$的$k$重因式.

(2) 若$p(x)$是$f(x)$的不可约多项式,则$p(x)$是$f(x)$的k重因式的充要条件为$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式.

(3) $f(x)$无重因式当且仅当$(f(x), f'(x)) = 1$.

(4) 设$(f(x), f'(x)) = d(x) \neq 0(x)$,则多项式$F(x) = f(x)/d(x)$无重因式,且和$f(x)$有相同的不可约因式(不计重数).

例 6　判断多项式$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$有无重因式.

解　只须判断$f(x)$与$f'(x)$是否互素.因为

$$f'(x) = 6x^2 + 10x + 4,$$

经辗转相除,得$(f(x), f'(x)) = x + 1$,$f(x)$与$f'(x)$不互素,$f(x)$有重因式,重因式为$x + 1$.

1.4 复数域、实数域和有理数域上的多项式

1.4.1 复数域 C 上的多项式

(1) 每个$n(n \geqslant 1)$次复系数多项式都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

(2) 每个$n(n \geqslant 1)$次复系数多项式在复数域中恰好有n个根(k重根按k个计算).

1.4.2 实数域 R 上的多项式

(1) 设$f(x)$为实数域$\mathbf{R}$上的多项式.若有非常数的实系数多项式$g(x)$和$h(x)$,使$f(x) = g(x)h(x)$,则称$f(x)$在实数域上可约,否则称$f(x)$为实数域上的不可约多项式.

(2) 实数域上不可约多项式,除一次多项式外,只有含(共轭)复根的二次多项

式.

(3) 每个实系数多项式都可以唯一分解成一次与二次不可约因式的乘积.

(4) 如果 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的复根，那么 α 的共轭复数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根，且根的重数相同，因而，复根的个数是偶数.

1.4.3 有理数域Q上的多项式

(1) 如果一个非零整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能够分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

因此有理系数多项式的因式分解就完全归结为整系数多项式的因式分解.

(2) 设整系数多项式为

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

如果 $f(x)$ 有一个有理根 r/s，其中 r,s 是互素的整数，那么 r 一定是 a_0 的因数，s 一定是 a_n 的因数. 特别，如果 $f(x)$ 的首项系数 $a_n = 1$，那么它的有理根都是整数根，而且是 a_0 的因数.

(3) **艾森斯坦(Eisenstein)判别法** 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 (a_n \neq 0)$ 是一个整系数多项式. 若有一个素数 p，满足以下3个条件：

1° p 不整除首项系数 a_n；

2° p 整除其他各项的系数 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_0$；

3° p^2 不整除常数项 a_0.

那么，$f(x)$ 在有理数域上不可约.

例7 对任意素数 p，任意正整数 n，证明 $x^n + p$ 是有理数域上不可约多项式.

证 p 是满足艾森斯坦判别法诸条件的素数，故 $x^n + p$ 是有理数域上不可约多项式.

(4) 在有理数域上存在任意次数的不可约多项式(见上例)，且应用艾森斯坦判别法可以作出许多不可约的有理系数多项式.

1.5 多元多项式

1.5.1 多元多项式的概念

设常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 属于数域 F，$\alpha_i, \beta_i, \cdots, \nu_i (i = 1,2,\cdots,k)$ 是正整数或零，则称形如

$$c_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\beta_1} \cdots x_n^{\nu_1} + c_2 x_1^{\alpha_2} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\nu_2} + \cdots + c_k x_1^{\alpha_k} x_2^{\beta_k} \cdots x_n^{\nu_k}$$

的表达式为数域 F 上元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 元多项式. $c_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i} \cdots x_n^{\nu_i}$ 称为它的项，c_i 为它的系数，α_i 为项中关于 x_1 的次数，β_i 为项中关于 x_2 的次数，等等. $\alpha_i + \beta_i + \cdots + \nu_i$ 为项的次数. 在多项式中系数不为零的任一项关于 x_i 的最高次数称为多项式关于 x_i 的次数，系数不为零的任一项的最高次数叫做多项式的次数，各项次数都相等的多项式称为齐次多项式.

每个 m 次多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都可唯一地表示成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=0}^{m}f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

式中 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 i 次齐次多项式.

为了方便,经常把一个多元多项式按某一个变数,例如,x_1 的降幂排列如下:

$$a_0(x_2,\cdots,x_n)x_1^m+a_1(x_2,\cdots,x_n)x_1^{m-1}+\cdots+a_m(x_2,\cdots,x_n),$$

式中 $a_0(x_2,\cdots,x_n),a_1(x_2,\cdots,x_n),\cdots,a_m(x_2,\cdots,x_n)$ 为 $x_2,\cdots,x_n$ 的 $n-1$ 元多项式.

若 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 次的多元多项式,则乘积 $f_1f_2\cdots f_k$ 为 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 次.

1.5.2 对称多项式

(1) 交换任意两个变量,多项式保持不变的 n 元多项式,称为**对称多项式**.

(2) 令 $\sigma_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是所有可能的 k 个不同的 x_i 的乘积之和,即

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{n}x_ix_j,$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n,$$

则 σ_k 都是 n 元 k 次齐次多项式.显然 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 都是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式.这 n 个对称多项式称为初等对称多项式.

(3) 数域 F 上的每个 n 元对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都可唯一地表示为 n 元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式(系数都在 F 上)的多项式.

(4) 牛顿公式

设

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\\&=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n,\end{aligned}$$

$$s_k={x_1}^k+{x_2}^k+\cdots+{x_n}^k\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

则下面牛顿公式成立:

$k\leqslant n$ 时,$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0$,

$k>n$ 时,$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0$.

1.5.3 结式

(1) 定义　设数域 F 上两非零多项式为

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(n>0),$$
$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m(m>0),$$

则

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m\text{ 行} \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{ 行}\end{matrix}$$

此 $m+n$ 阶行列式称为多项式$f(x)$与$g(x)$的结式,式中空白处的元素都为零.

(2) 结式性质　设$f(x)$,$g(x)$为复数域上的多项式,首项系数分别为 a_0 与 b_0,其根分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$,则

1° $R(f,g)=(-1)^{mn}R(g,f)$;

2° $R(f,g)=a_0^m b_0^n\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$;

3° $R(f,g)=a_0^m\prod\limits_{i=1}^{n}g(\alpha_i)=(-1)^{mn}b_0^n\prod\limits_{j=1}^{m}f(\beta_j)$;

4° 设a_0,b_0不全为零,则$f(x)$与$g(x)$在复数域$\mathbf{C}$上有公共根的充分必要条件是其结式 $R(f,g)=0$;

5° 行列式$R(f,g)$是$f(x)$与$g(x)$的系数的 $m+n$ 次齐次多项式,且关于 a_0,$a_1,\cdots,a_n$ 是 m 次齐次多项式,关于 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 是 n 次齐次多项式.

例8　求多项式$f(x)=x^n+x+1$与$g(x)=x^2-3x+2$的结式 $R(f,g)$.

解　$g(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ 有两个根,即

$$\beta_1=1,\beta_2=2.$$

又 $b_0=1$,$m=2$,故

$$\begin{aligned}R(f,g)&=(-1)^{2\cdot n}1^n\prod_{j=1}^{2}f(\beta_j)\\&=f(\beta_1)f(\beta_2)=f(1)f(2)\\&=(1^n+1+1)(2^n+2+1)\\&=3(2^n+3).\end{aligned}$$

例9　判断多项式$f(x)=x^2+3x+2$与$g(x)=x^2-2x+1$在复数域上有无公根.

解　只须判定 $R(f,g)$ 是否为零.设 α_1,α_2 为 $f(x)$ 的根,则

$$\begin{aligned}R(f,g)&=g(\alpha_1)g(\alpha_2)\\&=(\alpha_1^2-2\alpha_1+1)(\alpha_2^2-2\alpha_2+1)\\&=\alpha_1^2\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)+4\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2+\alpha_2^2-2(\alpha_1+\alpha_2)+1.\end{aligned}$$

由韦达定理,有

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -3,$$
$$\alpha_1\alpha_2 = 2,$$
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = 5,$$

故

$$R(f,g) = 4 + 12 + 8 + 5 + 6 + 1 = 36 \neq 0.$$

因而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 无公根．

2 行 列 式

2.1 行列式的定义和性质

2.1.1 行列式的定义

行列式的定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

式中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列；$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是该排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数；$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和．

2.1.2 行列式的基本性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等，因而对于行列式的行成立的定理，对列也成立．

(2) 互换行列式的两行(列)，其值变号．

(3) 用数 k 乘行列式的某行(列)，等于用该数乘此行列式．

(4) 将某行(列)的倍数加到另一行(列)，行列式的值不变．

(5) 若行列式中有两行(列)成比例，行列式等于零．

(6) 若行列式中某一行(列)是两组数的和，则行列式可以写成两个行列式的和，此二行列式的这一行(列)分别是第一组数与第二组数，而其它各行(列)都与原行列式相同．

2.1.3 几种特殊行列式

(1) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(2) 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) **范德蒙德(Vandermonde)行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

(4) 循环行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = f(e_1)f(e_2)\cdots f(e_n),$$

这里，$f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是1的全部 n 次方根，即 $e_i^n = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

2.2 行列式的展开

2.2.1 行列式按行(列)展开

(1) 子式　在 $n(n>1)$ 阶行列式 D 中,任意取定 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 行,k 列,位于这些行列交叉处的元素,按在 D 中的相对位置排成的 k 阶行列式 M,称为 D 的一个 k 阶子式.

(2) 余子式　在 n 阶行列式 D 中,$k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 阶子式 M 的余子式 N 是 D 的一个 $n-k$ 阶子式,它是 D 中划去 M 所在的行与列后,所剩下的 $n-k$ 阶子式.

(3) 代数余子式　n 阶行列式 D 的 k 阶子式 M 的余子式 N,若带上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k)}$,则称为 M 的**代数余子式**,记作 A,其中 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 为 M 的元素所在 D 中的行数,$j_1,j_2,\cdots,j_k$ 为 M 的元素所在 D 中的列数.

当 $k=1$ 时,1 阶子式就是 D 中一个元素 a_{ij}. a_{ij} 的余子式记作 M_{ij}, a_{ij} 的代数余子式记作 A_{ij}:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

(4) 行列式按行(列)展开规则

1° n 阶($n>1$)行列式 D 等于它的任意一行(列)元素与它们对应的代数余子式之积的和.

2° n 阶($n>1$)行列式 D 的某行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积的和等于 0.

1° 和 2° 可表示为

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=k;\\0, & i\neq k.\end{cases}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\begin{cases}D, & j=k;\\0, & j\neq k.\end{cases}$$

2.2.2 行列式按某 k 行(列)展开(拉普拉斯展开定理)

在 n 阶($n>1$)行列式 D 中取定某 k 个($1\leqslant k\leqslant n-1$)行(列),那么在这 k 个行(列)中所有 k 阶子式分别与它们各自的代数余子式乘积的和等于 D.

2.2.3 行列式的乘法定理

两个 n 阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\quad 与\quad D_2=\begin{vmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

的乘积等于一个 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{vmatrix},$$

其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n.$$

2.3 克莱默法则

克莱默(Cramer)法则如下：

1° 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2-1}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，那么线性方程组(2-1)有解，且解是唯一的，解可以通过系数表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

式中 D_i 是把 D 的第 i 列元素 $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ 分别换成常数项列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得到的行列式．

2° 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2-2}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，那么它只有零解．换言之，如果方程组(2-2)有非零解，那么必有 $D = 0$.

例1 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{B}$ 的每个列向量都是下列方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解向量，试求 λ 的值．

解 因 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{B}$ 中至少有一个非零列向量．依题意，所给齐次线性方程组有非零解，故其系数矩阵的行列式必等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

为使 D 中第2,3两列成比例，$\lambda = 1$ 即可．

3　线性方程组

含 n 个未知量，m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3-1}$$

当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零时，称为非齐次线性方程组；当 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零时，称为齐次线性方程组．记

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{（系数矩阵）},$$

$$X = [x_1\ x_2 \cdots\ x_n]^{\mathrm{T}},$$

$$b = [b_1\ b_2 \cdots\ b_m]^{\mathrm{T}},$$

$$\overline{A} = [A \mid b] \text{（增广矩阵）},$$

式中 T 表示转置，那么线性方程组(3-1) 可写成矩阵形式

$$AX = b; \tag{3-2}$$

对应的齐次线性方程组可写成

$$AX = 0. \tag{3-3}$$

3.1　线性方程组解的判定

3.1.1　非齐次线性方程组解的判定

(1) 非齐次线性方程组(3-2) 有解的充要条件是秩(A) = 秩$(\overline{A})$．

(2) 非齐次线性方程组(3-2) 解的个数：

1° 当秩(A) = 秩$(\overline{A}) = n$ 时，$AX = b$ 只有一解；

2° 当秩(A) = 秩$(\overline{A}) = r < n$ 时，$AX = b$ 有无穷多个解．

3.1.2　齐次线性方程组解的情况

(1) 齐次线性方程组(3-3) 总有解，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是该方程组的解，称为零解．

(2) 当秩$(A) = n$ 时，齐次线性方程组(3-3) 只有一个零解．

(3) 当秩$(A) = r < n$ 时，齐次线性方程组(3-3) 除零解外，还有无穷多个非零解．

3.2 线性方程组的解向量之间的关系

3.2.1 $AX=0$ 的解向量之间的关系

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为

$$AX=0$$

的解向量，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 仍为

$$AX=0$$

的解向量，其中 k_1,k_2 为任意常数．

3.2.2 $AX=b(b\neq 0)$ 的解向量之间的关系

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 为

$$AX=b$$

的 s 个解向量，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为 s 个实数，且

$$k_1+k_2+\cdots+k_s=1,$$

则 $\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是 $AX=b$ 的解向量．

3.2.3 $AX=0$ 与 $AX=b(b\neq 0)$ 的解向量之间的关系

(1) 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $AX=b$ 的解向量，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $AX=0$ 的解向量．

(2) 设 $\boldsymbol{\eta}_0$ 为 $AX=b$ 的解向量，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 $AX=0$ 的解向量．则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta}_0$ 为 $AX=b$ 的解向量．

(3) 若 $AX=b$ 有无穷多个解向量，则 $AX=0$ 有非零解向量．

(4) 若 $AX=b$ 有唯一解向量，则 $AX=0$ 仅有零解向量．

3.3 线性方程组解的结构

3.3.1 齐次线性方程组 $AX=0$ 的解的结构

当秩$(A)=r<n$ 时，$AX=0$ 的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 都是它的一个**基础解系**，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的**通解**（一般解）可表示为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数．

3.3.2 非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解的结构

当秩$(A)=$秩$(\overline{A})=r<n$ 时，若 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是 $AX=b$ 的一个特解（已知解向量），$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的一基础解系，则非齐次线性方程组 $AX=b$ 的**通解**（一

般解）可表示为

$$\eta_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数．

例1 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3．已知 η_1,η_2,η_3 是它的3个解向量，其中 $\eta_1 = [2\ 3\ 4\ 5]^T$，$\eta_2 + \eta_3 = [1\ 2\ 3\ 4]^T$．求其通解．

解 设该方程组为 $AX = b(b \neq 0)$，其一特解为 η_1．先求 $AX = 0$ 的通解．因秩$(A) = 3$，$n = 4$，$AX = 0$ 的一个基础解系含1个解向量．由解向量的关系知，$\alpha_1 = \eta_1 - \eta_2$，$\alpha_2 = \eta_1 - \eta_3$ 为 $AX = 0$ 的解向量．从而

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3) = [3\ 4\ 5\ 6]^T \neq 0$$

为 $AX = 0$ 的解向量，且为一基础解系，故 $AX = 0$ 的通解为 $k(\alpha_1 + \alpha_2)$．于是所求的通解为

$$X = \eta_1 + k(\alpha_1 + \alpha_2) = \eta_1 + k[3\ 4\ 5\ 6]^T \quad (k\text{ 为任意常数}).$$

3.4 基础解系和特解的简便求法

设非齐次线性方程组 $AX = b$ 有解，其中 $A = [a_{ij}]$ 为 $m \times n$ 矩阵，X、b 分别为 n，m 维列向量．对增广矩阵 $\overline{A} = [A \mid b]$ 施行初等行变换，将 A 化成含最高阶单位矩阵 E_r（r 阶单位矩阵）的矩阵．为方便计，设 $\overline{A}$ 经初等行变换化为

$$\overline{A}_1 = [A_1 \mid b_1] = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{3-4}$$

其中 A_1 为最右端矩阵中虚线左边矩阵，b_1 为虚线右边列向量．

3.4.1 基础解系的简便求法

令 $b = 0$，则 $AX = 0$．由(3-4)式知，秩(A) = 秩$(\overline{A}) = r$，而未知量个数为 n，故其一个基础解系含 $n - r$ 个解向量．设其为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$，可按下法根据变换矩阵 A_1 进一步写出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 的各个分量．

因最高阶单位矩阵 E_r 的 r 个列分别位于 A_1 的第 $1,2,\cdots,r$ 列，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 的第 $1,2,\cdots,r$ 个分量依次是 E_r 所在列以外的 $n-r$ 个列，即第 $r+1,r+2,\cdots,n$ 列的前 r 个分量反号．于是可先写出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 的第 $1,2,\cdots,r$ 个分量：

$$\alpha_1 = [-c_{1,r+1}\ -c_{2,r+1}\ \cdots\ -c_{r,r+1}\ *\ *\ \cdots\ *];$$

$$\alpha_2 = [-c_{1,r+2}\ -c_{2,r+2}\ \cdots\ -c_{r,r+2}\ *\ *\ \cdots\ *];$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n-r} = [-c_{1n}\ -c_{2n}\ \cdots\ c_{rn}\ *\ *\ \cdots\ *].$$

而其余 $n-r$ 个分量依次取成 $n-r$ 阶单位矩阵，于是

$$\alpha_1 = [-c_{1,r+1}\ -c_{2,r+1}\ \cdots\ -c_{n,r+1}\ 1\ 0\ \cdots\ 0];$$
$$\alpha_2 = [-c_{1,r+2}\ -c_{2,r+2}\ \cdots\ -c_{n,r+2}\ 0\ 1\ \cdots\ 0];$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{n-r} = [-c_{1n}\ -c_{2n}\ \cdots\ -c_{nn}\ 0\ 0\ \cdots\ 1].$$

一般,如果 r 阶(最高阶)单位矩阵在 A_1 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列,则基础解系包含的 $n-r$ 个解向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 的第 j_1,第 j_2,…,第 j_r 个分量依次是除 r 阶单位矩阵所在 r 个列向量以外的其余 $n-r$ 列的前 r 个分量反号,而其余 $n-r$ 个分量依次取成 $n-r$ 阶单位矩阵.

例2 求下列齐次线性方程组的基础解系:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

解 将其系数矩阵 A 用初等行变换化成含最高阶单位矩阵的矩阵 A_1,即

$$A \to A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

A_1 中最高阶单位矩阵为 E_3,故秩(A) = 秩$(A_1) = r = 3$,而 $n = 5$,一个基础解系含 $n - r = 5 - 3 = 2$ 个解向量.

因 E_r 位于 A_1 的第 $j_1 = 1$、$j_3 = 3$、$j_4 = 4$ 列,故 α_1,α_2 的第1、3、4个分量分别为 A_1 的其余2列,即第2、5两列的前3个分量反号,而 α_1,α_2 的其余两分量依次组成2阶单位矩阵,故 $\alpha_1 = [-1\ 1\ 0\ 0\ 0]$,$\alpha_2 = [-1\ 0\ -1\ 0\ 1]$ 为所求的一个基础解系.

3.4.2 特解的简便求法

在(3-4)式中,因最高阶单位矩阵 E_r 在 A_1 即 $\overline{A}_1$ 的第1,2,…,r 列,故特解 η_0 的第1,2,…,r 个分量等于 $\overline{A}_1$ 中最后一列的前 r 个分量(但不反号),其余 $n-r$ 个分量全部取成零,于是

$$\eta_0 = [d_1\ d_2\ \cdots\ d_r\ 0\ 0\ \cdots\ 0].$$

一般,如果 r 阶(最高阶)单位矩阵在 $\overline{A}_1$ 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列,则 η_0 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 个分量依次等于 $\overline{A}_1$ 中最后一列的前 r 个分量(但不反号),其余 $n-r$ 个分量全部取成零.

例3 求下列方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

解 对其增广矩阵 $\overline{A}$ 施行初等行变换,化成含最高阶单位矩阵的矩阵:

$$\overline{A}_1=[A_1 \vdots b_1]=\begin{bmatrix}1 & -2 & \frac{1}{3} & 0 & \vdots & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & \vdots & \frac{4}{3}\end{bmatrix}.$$

注意到最高阶单位矩阵 E_2 在 $\overline{A}_1$ 的第 1、4 两列，特解 η_0 的第 1、4 两个分量依次等于 $\overline{A}_1$ 中最后一列的两分量 $-\frac{1}{3}$ 和$\frac{4}{3}$，其余分量为零．于是

$$\eta_0=[-\frac{1}{3}\ 0\ 0\ \frac{4}{3}].$$

对应的齐次线性方程组的基础解系由其简便求法即得

$$\alpha_1=[2\ 1\ 0\ -1]^T,$$

$$\alpha_2=[-\frac{1}{3}\ 0\ 1\ -\frac{2}{3}]^T,$$

故所求通解为

$$X=\eta_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

例 4 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2.\end{cases}$$

1° a,b 为何值时，方程组有解？

2° 方程组有解时，求出方程组导出组的一个基础解系．

3° 方程组有解时，求出方程组的全部解．

解 用初等行变换化增广矩阵 $\overline{A}$ 为含最高阶单位矩阵的矩阵：

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2a\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2a\end{bmatrix}=\overline{A}_1.$$

由 $b-3a=0, 2-2a=0$ 得到 $a=1,b=3$，故当 $a=1,b=3$ 时方程组有解．将 $a=1,b=3$ 代入 $\overline{A}_1$ 得到

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\overline{A}_1.$$

由 $\overline{A}_1$ 即得导出组的一个基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及原方程组的一特解 η_0：

$$\alpha_1=[1\ -2\ 1\ 0\ 0]^T,\quad \alpha_2=[1\ -2\ 0\ 1\ 0]^T,$$

$$\alpha_3=[5\ -6\ 0\ 0\ 1]^T,\quad \eta_0=[-2\ 3\ 0\ 0\ 0]^T,$$

故其全部解为

$$\eta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\eta_0(k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数}).$$

4 线性空间

4.1 线性空间的概念

4.1.1 线性运算

设 F 是一个数域,其元素用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示,V 是任一种类对象的非空集合,其元素用小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 表示.在 V 上确定两个运算法则:

1° V 中元素的加法　在 V 中,任意两元 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,总有唯一确定的元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与其对应,称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 之和,记作 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

2° F 中的数与 V 中元素的乘法(称为数乘)　对 F 中任一数 a 与 V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$,在 V 中总有唯一确定的元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与它们对应,称为 a 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数乘,记作 $\boldsymbol{\delta}=a\boldsymbol{\alpha}$.

这两个运算法则称为线性运算.

4.1.2 线性空间的定义及性质

(1) 线性空间的定义　设 F 是一数域,V 是任一类对象的非空集合,若对线性运算满足以下条件,则称 V 为数域 F 上的**线性空间**:

1° $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

2° $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$.

3° V 中存在元素 $\mathbf{0}$,对 V 中每个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有

$$\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}.$$

具有这个性质的元素 $\mathbf{0}$ 称为 V 的零元素.

4° 对 V 中每个元素 $\boldsymbol{\alpha}$,V 中存在元素 $\boldsymbol{\alpha}'$,使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'=\mathbf{0}$,称 $\boldsymbol{\alpha}'$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素.

数乘法满足下面两条规则:

5° $(ab)\boldsymbol{\alpha}=a(b\boldsymbol{\alpha})$.

6° $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

数乘法与加法满足下面两条规则

7° $a(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=a\boldsymbol{\alpha}+a\boldsymbol{\beta}$.

8° $(a+b)\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\alpha}$.

这里 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为 V 中任意元素,a,b 是 F 中任意数.

线性空间 V 中元素有时也称为向量,因而线性空间也称向量空间.F 中的数称为纯量.

例如:

1° 当 $F=\mathbf{R}$ 时,V 为实数域上的线性空间,简称为实(线性)空间.

2° 当 $F=\mathbf{C}$ 时,V 为复数域上的线性空间,简称为复(线性)空间.

再例如:

1° 数域 F 上所有 n 维向量按 n 维向量加法，以及数与 n 维向量的乘法构成线性空间 F^n.

2° 数域 F 上所有一元多项式，按通常的多项式加法、以及数与多项式的乘法组成数域 F 上的线性空间 $F[x]$.

3° 数域 F 上所有 n 阶矩阵，按照矩阵的加法，以及数与矩阵的乘法组成数域 F 上的线性空间 $M_n(F)$.

4° 定义在 $[a,b]$ 上的所有连续实函数集合 $C_{[a,b]}$，其元素 f,g 的和记为 $f+g$、$f+g$ 是在 $[a,b]$ 上定义的连续实函数．它在点 x 的值定义为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ x\in[a,b].$$

又元素 f 乘实数 k 所得到的 $C_{[a,b]}$ 中元素 kf 定义为

$$(kf)(x)=kf(x),\ x\in[a,b].$$

按照上述规定的线性运算，该集合组成一个实线性空间 $C_{[a,b]}$.

5° 设 F_1,F_2 都是数域，且 $F_1\subseteq F_2$，则 F_2 可以看成 F_1 上的线性空间．

6° 一个非齐次线性方程组的所有解向量的集合，对通常的向量加法和数乘法不构成线性空间；而数域 F 上的 n 元齐次线性方程组的所有解向量的集合，按 F^n 的向量加法和数乘法，构成数域 F 上的线性空间，这个线性空间叫这个方程组的解空间．

7° 数域 F 上所有 n 次多项式的集合，n 是固定的自然数，对于通常的多项式加法、数乘运算，该集合不能组成 F 上的线性空间．

数域 F 上所有次数小于 n 的多项式与零多项式按多项式加法及数与多项式乘法构成 F 上的线性空间 $F_n[x]$.

例 1　$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数集合．如下规定 $\mathbf{R}^+$ 上的加法 $\oplus$ 及数乘法 $\circ$：

$$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha\beta},\quad k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^k.$$

证明 $\mathbf{R}^+$ 作成 $\mathbf{R}$ 上的向量空间．

证　下面验证 $\mathbf{R}^+$ 对于上面两种运算满足定义中的 8 个条件．

加法 $\oplus$ 适合交换律与结合律可归结为实数乘法适合交换律与结合律，这显然成立．

下面求 $\mathbf{R}^+$ 对加法 $\oplus$ 的零向量．设零向量为 $\boldsymbol{x}$，由定义有

$$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha},$$

即

$$\boldsymbol{\alpha x}=\boldsymbol{\alpha},\quad\text{亦即}\quad \boldsymbol{x}=1.$$

这时对任何 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^+$，有 $\boldsymbol{\alpha}\oplus 1=1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，因而 $\mathbf{R}^+$ 的零向量就是数 1.

再求 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量．设 $\boldsymbol{\alpha}'$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，由定义有

$$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\alpha}'=1\ (\text{零向量}),\quad\text{即}\quad \boldsymbol{\alpha\alpha}'=1,$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}'=\dfrac{1}{\boldsymbol{\alpha}}$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量是 $\dfrac{1}{\boldsymbol{\alpha}}$.

对于其他算律，易验证有

$k\circ(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha\beta})^k=\boldsymbol{\alpha}^k\boldsymbol{\beta}^k=\boldsymbol{\alpha}^k\oplus\boldsymbol{\beta}^k=k\circ\boldsymbol{\alpha}\oplus k\circ\boldsymbol{\beta}$；

$(k+l)\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{k+l}=\boldsymbol{\alpha}^k\oplus\boldsymbol{\alpha}^l=k\circ\boldsymbol{\alpha}\oplus l\circ\boldsymbol{\alpha}$；

$(kl)\circ \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{kl} = (\boldsymbol{\alpha}^l)^k = k\circ(\boldsymbol{\alpha}^l) = k\circ(l\circ\boldsymbol{\alpha})$;

$1\circ\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^1 = \boldsymbol{\alpha}$.

故 $\mathbf{R}^+$ 关于所给的两种运算作成 $\mathbf{R}$ 上的向量空间.

(2) 线性空间的性质

1° V 的零元或零向量是唯一的.

2° V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元即负向量是唯一的.

3° $0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}\in V$; $a\mathbf{0} = \mathbf{0}, a\in F$.

4° $a(-\boldsymbol{\alpha}) = (-a)\boldsymbol{\alpha} = -a\boldsymbol{\alpha}, a\in F, \boldsymbol{\alpha}\in V$.

5° 若 $a\in F, \boldsymbol{\alpha}\in V, a\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,则 $a = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

4.2 有限维线性空间 V 的结构

4.2.1 几个重要概念

(1) 线性组合 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}\in V, k_1,k_2,\cdots,k_m\in F$,则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合. 又如果

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

那么向量 $\boldsymbol{\beta}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合,或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

(2) 线性相关、线性无关 假定 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$. 如果在 F 中存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 称为**线性相关**;若上式仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时才成立,或者对于 F 中任意不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,总有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \neq \mathbf{0}$,就称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关**.

(3) 如果 V 中一个向量组的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 满足下列条件,那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 称为这**向量组的最大线性无关组**(简称最大无关组):

1° $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

2° 该向量组中任一向量是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合.

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的最大无关组所含向量的个数称之为该**向量组的秩**. 只含零向量的向量组的秩是零.

例2 求线性空间 $\mathbf{R}^4$ 中向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1\ -1\ 2\ 4]$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = [0\ 3\ 1\ 2]$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = [3\ 0\ 7\ 14]$,

$\boldsymbol{\alpha}_4 = [1\ -2\ 2\ 0]$, $\boldsymbol{\alpha}_5 = [2\ 1\ 5\ 10]$

的秩及一个最大无关组,并将其余向量表示为该最大无关组的线性组合.

解 令矩阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm T}\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm T}\ \boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm T}]$. 用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化成含最高阶单位矩阵的矩阵:

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\eta}_1^T\ \boldsymbol{\eta}_2^T\ \boldsymbol{\eta}_3^T\ \boldsymbol{\eta}_4^T\ \boldsymbol{\eta}_5^T].$$

因向量组 $\boldsymbol{\eta}_1^T,\boldsymbol{\eta}_2^T,\boldsymbol{\eta}_3^T,\boldsymbol{\eta}_4^T,\boldsymbol{\eta}_5^T$ 的秩为 3，$\boldsymbol{\eta}_1^T,\boldsymbol{\eta}_2^T,\boldsymbol{\eta}_4^T$ 为其一个最大无关组，且

$$\boldsymbol{\eta}_5^T = 2\boldsymbol{\eta}_1^T + \boldsymbol{\eta}_2^T,\quad \boldsymbol{\eta}_3^T = 3\boldsymbol{\eta}_1^T + \boldsymbol{\eta}_2^T,$$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T,\boldsymbol{\alpha}_5^T$，即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3，且 $\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T$ 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为其一个最大无关组．

又

$$\boldsymbol{\alpha}_5^T = 2\boldsymbol{\alpha}_1^T + \boldsymbol{\alpha}_2^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3^T = 3\boldsymbol{\alpha}_1^T + \boldsymbol{\alpha}_2^T,$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_5 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,\qquad \boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2.$$

(5) 设线性空间 V 的两个向量组为

组 ①：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$；

组 ②：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$.

若组 ① 的每个向量均能由组 ② 线性表示，则称组 ① 可由组 ② 线性表示．

若组 ① 可由组 ② 线性表示，组 ② 也可由组 ① 线性表示，则称向量组 ① 和向量组 ② 等价．

4.2.2　线性空间的基和维数

(1) V 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 若满足下列条件：

1° $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

2° V 中任一向量是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合．

就说它是 V 的一组基，即线性空间的最大无关组（假如存在的话）叫做线性空间 V 的**基**．

(2) 有限维线性空间 V 的基所含向量的个数 n，称为 V 的**维数**，记作维$(V) = n$ 或 $\dim V = n$. 而 V 叫做 n **维线性空间**．

(3) 任意 n 个线性无关的向量都形成 V 的一组基．

(4) 任意 $m(m > n)$ 个向量都是线性相关的．

(5) 任意 $m(m < n)$ 个线性无关向量都可扩充成 V 的一组基．

(6) 数域 F 上的线性空间 V 若不是有限维的，则称为无限维线性空间．

例如，$C_{[a,b]}$ 和 $F[x]$ 都是 F 上的无限维线性空间．

4.3　坐标与坐标变换

4.3.1　坐标的概念

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 为线性空间 V 的一组基，则 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可唯一地表示成

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

式中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是唯一确定的复数，它称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的**坐标**.

4.3.2　基变换与坐标变换的关系

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 是 n 维线性空间 V 的两组基，它们的关系是

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}, \tag{4-1}$$

且 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于这两组基的坐标分别是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则

$$(y_1,y_2,\cdots,y_n) = (x_1,x_2,\cdots,x_n)(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}. \tag{4-2}$$

且称(4-1)式为 V 的基变换，(4-2)式为相应于基变换(4-1)式的**坐标变换**. 其中 $\boldsymbol{A}$ 为由基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 到 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 的**过渡矩阵**，是可逆矩阵.

上述命题的逆亦成立，即如果 V 的坐标变换为(4-2)式，其相应的基变换就是(4-1)式.

例 3　在线性空间 $\mathbf{R}^2$ 中，基 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ 绕原点逆时针旋转 φ，且 $\boldsymbol{i}$ 变为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{j}$ 变为 $\boldsymbol{e}_2$，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 也是一组基，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi, \\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i}(-\sin\varphi) + \boldsymbol{j}\cos\varphi. \end{cases}$$

又设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中任一向量，且

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2.$$

试求坐标变换的关系式.

解　由题设，易求出基变换的关系为

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\boldsymbol{A},$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

又因

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

故所求的坐标变换关系式为

$$(y_1,y_2) = (x_1,x_2)(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (x_1,x_2)\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

这就是解析几何中旋转坐标轴的坐标变换公式.

4.4 线性子空间

4.4.1 线性子空间的概念

(1) 设 W 是数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集．若 W 对于 V 的加法和数乘这两种运算也构成 F 上的线性空间，W 就称为 V 的一个**线性子空间**，简称**子空间**．

(2) 对于线性空间 V，它本身就是 V 的一个子空间；由 V 的一个零向量构成的零空间 $\{\mathbf{0}\}$ 也是 V 的一个子空间．这两个子空间称为 V 的平凡子空间．

4.4.2 线性子空间的判定

F 上线性空间 V 的非空子集 W 作成 V 的一个子空间的充要条件是

1° 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W$；

2° 若 $\boldsymbol{\alpha}\in W, k\in F$，则 $k\boldsymbol{\alpha}\in W$.

4.4.3 子空间的形成

设 V 是数域 F 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in V$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的所有线性组合的集合是 V 的子空间，称为由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间，记为

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=\{a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_s\boldsymbol{\alpha}_s \mid a_i\in F\}.$$

(1) **子空间的交**　假定 V_1,V_2 是 F 上线性空间 V 的子空间，则它们所有公共元的集合形成 V 的子空间，称为 V_1 与 V_2 的交，记作 $V_1\cap V_2$，即

$$V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_1,\boldsymbol{\alpha}\in V_2\}.$$

(2) **子空间的和**　假定 V_1,V_2 是 V 的子空间，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 分别是 V_1,V_2 中任意元，那么所有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 这样元的集合形成 V 的子空间，称为 V_1,V_2 的和，记为 V_1+V_2，即

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_1,\boldsymbol{\beta}\in V_2\}.$$

(3) 维数公式　设 V_1,V_2 是有限维线性空间 V 的子空间，则

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2.$$

若 n 维线性空间 V 中两个子空间 W_1 和 W_2 的维数之和大于 n，则 W_1、W_2 必含有公共非零向量．

例 4　在线性空间 F^4 中，给出两向量组：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=[1\ 2\ 1\ 0],\\ \boldsymbol{\alpha}_2=[-1\ 1\ 1\ 1];\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=[2\ -1\ 0\ 1],\\ \boldsymbol{\beta}_2=[1\ -1\ 3\ 7];\end{cases}$$

求 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 与 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的维数与基．

解　先求 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的基．因

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2),$$

故只需求出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的一个最大无关组．又因

$$[\boldsymbol{\alpha}_1^T\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\ \boldsymbol{\beta}_1^T\ \boldsymbol{\beta}_2^T] \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\beta}_1^T$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 为所求的一个最大无关组．且

$$\boldsymbol{\beta}_2^T = -\boldsymbol{\alpha}_1^T + 4\boldsymbol{\alpha}_2^T + 3\boldsymbol{\beta}_1^T,$$

即

$$\boldsymbol{\beta}_2 - 3\boldsymbol{\beta}_1 = 4\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1.$$

因而 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\}$ 为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的一组基，其维数为3.

显然，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，故

$$\text{维}(L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)) = \text{维}(L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)) = 2.$$

由维数公式，有

$$\text{维}(L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)) = 2+2-3 = 1.$$

又因

$$\boldsymbol{\beta}_2 - 3\boldsymbol{\beta}_1 = 4\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1 \in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2),$$

而

$$4\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1 = [-5\ 2\ 3\ 4] \neq \mathbf{0},$$

故 $4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的基．

4.4.4　子空间的直和

(1) **子空间的直和**　设 V 有子空间 $W_1,W_2,\cdots,W_s$. 如果 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 中每个向量的分解式

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha}_i\in W_i, i=1,2,\cdots,s,$$

都是唯一的，则 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 称为 $W_1,W_2,\cdots,W_s$ 的直和，记作 $W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$.

(2) 子空间直和的性质：

1° $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和的充要条件是

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},\quad \boldsymbol{\alpha}_i\in W_i(i=1,2,\cdots,s)$$

仅当 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 全为零向量时才成立．

2° $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和的充要条件是

$$W_i\cap(W_1+\cdots+W_{i-1}+W_{i+1}+\cdots+W_s) = \mathbf{0},$$

即

$$W_i\cap\sum_{j\neq i}W_j = \varnothing(\text{空集})(i=1,2,\cdots,s).$$

3° 设 $W_1,W_2,\cdots,W_s$ 为有限维线性空间 V 的子空间，和 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和的充要条件是

$$\dim(W_1+W_2+\cdots+W_s) = \sum_{i=1}^{s}\dim W_i.$$

例5　设 F^n 是数域 F 上 n 元列向量组成的线性空间．A 是 F 上的 n 阶矩阵，且

$A^2 = A$，记

$$W_1 = \{AX \mid 任意\ X \in F^n\},$$
$$W_2 = \{X \in F^n \mid AX = 0\}.$$

试证 $F^n = W_1 \oplus W_2$.

证　易证 W_1 与 W_2 为 F^n 的子空间．下面证 $F^n = W_1 \oplus W_2$.

先证 $F^n = W_1 + W_2$，显然有 $W_1 + W_2 \subseteq F^n$. 下证 $F^n \subseteq W_1 + W_2$.

设 X 为 F^n 中任一向量，则

$$X = AX + (X - AX),$$

显然有 $AX \in W_1$. 现证 $X - AX \in W_2$. 事实上

$$A(X - AX) = AX - AX = 0,$$

故 $X - AX \in W_2$，于是有 $F^n \subseteq W_1 + W_2$，所以

$$F^n = W_1 + W_2.$$

再证 $F^n = W_1 \oplus W_2$. 为此证 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 设 $\alpha \in W_1 \cap W_2$，则 $\alpha \in W_1$，于是存在 $\beta \in F^n$，使 $\alpha = A\beta$.

又因 $\alpha \in W_2$，故 $A\alpha = 0$，于是

$$\alpha = A\beta = A^2\beta = A(A\beta) = A\alpha = 0,$$

即 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$，所以

$$F^n = W_1 \oplus W_2.$$

5　线性变换

5.1　线性变换的定义及基本性质

5.1.1　线性变换的概念

设 V 为数域 F 上的线性空间，它到自身的映射称为线性空间的变换．设 σ 是 V 的变换，如对于任意 $\alpha, \beta \in V, k \in F$，都有

1° $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$；

2° $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$，

那么 σ 叫做 V 的一个**线性变换**．

5.1.2　线性变换的基本性质

(1) 设 σ 是 F 上线性空间 V 的线性变换，则

1° $\sigma(0) = 0$；

2° $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$；

3° $\sigma(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + k_m\sigma(\alpha_m)$；

4° 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关,则$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$线性相关,其中 $k_i\in F,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i\in V(i=1,2,\cdots,m)$.

(2) 线性变换由基向量的象唯一确定.

1° 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 构成V的一组基底,又设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\in V$,则唯一地存在一个线性变换 σ,使

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,m).$$

2° 设V为F上的线性空间,令

$$L(V)=\{\sigma\mid\sigma\text{ 是 }V\text{ 的线性变换}\}.$$

任给 $\sigma,\tau\in L(V)$,若对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 都有$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\tau(\boldsymbol{\alpha})$,则称 σ,τ 相等,记为

$$\sigma=\tau.$$

3° $\sigma\in L(V)$,对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$,如有$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$,则称$\sigma$是零变换;如有$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$,则称 σ 为V的恒等变换(单位变换).

(3) 变换是线性变换的充要条件　线性空间 V的一个变换σ是线性变换的充要条件为:对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,a,b\in F$,有

$$\sigma(a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta})=a\sigma(\boldsymbol{\alpha})+b\sigma(\boldsymbol{\beta}).$$

5.1.3 线性变换的象与核

(1) 设σ是V的线性变换,V中所有各元的象构成V的子空间,称为**象子空间**,用 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 或 $\sigma(V)$ 表示,即

$$\mathrm{Im}(\sigma)=\sigma(V)=\{\sigma(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in V\}.$$

(2) σ为V的线性变换,V中零元的所有象源构成V的子空间,称为σ的**核子空间**,用 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 或 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 表示,即

$$\mathrm{Ker}(\sigma)=\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V,\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\}.$$

(3) $\mathrm{Im}(\sigma),\mathrm{Ker}(\sigma)$ 的维数分别叫做 σ 的秩与亏 .

(4) 假定σ是n维线性空间V的线性变换,那么σ的秩与其亏的和等于线性空间的维数,即

$$\text{维}(\mathrm{Im}(\sigma))+\text{维}(\mathrm{Ker}(\sigma))=\text{维}(V).$$

例1　试证

$$\sigma(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2-3x_3-x_4,3x_1-x_2-3x_3+4x_4,0,0)$$

是4维线性空间 $\mathbf{R}^4$ 的线性变换,并求 σ 的秩及亏 .

解　根据定义易验证 σ 是 $\mathbf{R}^4$ 的线性变换 . 它的象子空间 $\sigma(V)$ 是所有形如$(x_1,x_2,0,0)$ 的向量形成的子空间,即

$$\mathrm{Im}(\sigma)=\sigma(V)=\{(x_1,x_2,0,0)\mid x_1,x_2\in\mathbf{R}\},$$

而$(x_1,x_2,0,0)=x_1(1,0,0,0)+x_2(0,1,0,0)$,显然其维数是2.

它的核 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 是线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=0,\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=0\end{cases}$$

的解空间 . 又由

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & -1\\ 3 & -1 & -3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

可知,其解空间的一组基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ 1\ 0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=[-\frac{3}{4}\ \frac{7}{4}\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}.$$

因而其解空间是由所有形如

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \forall k_1,k_2\in\mathbf{R}$$

的向量形成的子空间,显然其维数为 2. 所以秩 σ 是 2,σ 的亏也是 2. 这时满足

$$\text{维}(\mathrm{Im}(\sigma))+\text{维}(\mathrm{Ker}(\sigma))=\text{维}(\mathbf{R}^4)=4.$$

5.2　线性变换的运算及其简单性质

5.2.1　线性变换的运算

(1) 线性空间 V 上的线性变换的加减法、数乘、乘法

1° $(\sigma\pm\tau)(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})\pm\tau(\boldsymbol{\alpha}),\forall\boldsymbol{\alpha}\in V;\sigma,\tau\in L(V)$.

2° $(k\sigma)(\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha}),k\in F,\boldsymbol{\alpha}\in V;\sigma\in L(V)$.

3° $(\sigma\tau)(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\tau(\boldsymbol{\alpha})),\boldsymbol{\alpha}\in V;\sigma,\tau\in L(V)$.

易验证 $\sigma\pm\tau,k\sigma,\sigma\tau$ 均为 V 上的线性变换.

(2) 线性变换运算的简单性质

1° 线性变换的运算规律与矩阵相同.

2° 数域 F 上线性空间 V 的所有线性变换的集合 $L(V)$ 构成 F 上的一个线性空间.

(3) 设 $\sigma\in L(V)$,如 σ 的秩等于 n,即 $\mathrm{Im}(\sigma)=V$ 时,σ 称为满秩线性变换.

(4) 逆变换　假定 $\sigma\in L(V)$,如果有 $\tau\in L(V)$,使

$$\sigma\tau=\tau\sigma=I(I\text{ 是恒等变换}),$$

那么 σ 叫做可逆变换,τ 叫做 σ 的逆变换,记为 $\sigma^{-1}=\tau$.

如果线性变换 σ 是可逆的,那么其逆变换 σ^{-1} 也是线性变换.

例 2　在线性空间 $\mathbf{R}^2$ 中,设 σ 是绕原点 O 按反时针方向旋转 90° 的线性变换,τ 是绕原点 O 按顺时针方向旋转 90° 的线性变换. 试证明 σ,τ 都是可逆的线性变换,且 σ 是 τ 的逆变换,τ 是 σ 的逆变换.

证　设任意 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y)\in\mathbf{R}^2$. 由题设,则有

$$\sigma\boldsymbol{\alpha}=\sigma(x,y)=(-y,x),\tau\alpha=\tau(x,y)=(y,-x).$$

又由线性变换乘法的定义得到

$$\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha})=\sigma\tau(x,y)=\sigma[\tau(x,y)]=\sigma(y,-x)=(x,y)=\boldsymbol{\alpha},$$

$$\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\tau\sigma(x,y)=\tau[\sigma(x,y)]=\tau(-y,x)=(x,y)=\boldsymbol{\alpha},$$

即 $\sigma\tau=\tau\sigma=I$. 因此 σ,τ 都是可逆的线性变换,且 τ 是 σ 的逆变换,σ 也是 τ 的逆

变换．

(5) $\sigma \in L(V)$，σ有逆变换的充要条件是σ是满秩变换，或者是一对一的变换，即 $\mathrm{Im}(\sigma) = V$ 或 $\mathrm{Ker}(\sigma) = 0$.

5.3 线性变换与矩阵

5.3.1 线性变换的矩阵

假定 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组基．如果

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 称为σ关于基$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$的矩阵．

例3 在四维线性空间 F^4 中，

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1\ 2\ 0\ 0], \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = [0\ 1\ 0\ 3],$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3 = [1\ 1\ 1\ 0], \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = [0\ 0\ 5\ 0]$$

为一组基，又知线性变换 σ 使得$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i) = \lambda\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1,2,3,4)$．求 σ 及其矩阵$\boldsymbol{A}$．

解 ① 求 σ 就是求 F^4 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的象的法则．设

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4,$$

则

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha}) &= \sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4) \\ &= \lambda(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4) = \lambda\boldsymbol{\alpha},\end{aligned}$$

即 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\boldsymbol{\alpha}$，因而 σ 是 F^4 的数乘变换．

② 求 σ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$下的矩阵．因

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) = \lambda\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4,$$
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) = 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4,$$
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3) = 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda\cdot\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4,$$
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_4) = 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3 + \lambda\cdot\boldsymbol{\alpha}_4,$$

又所求矩阵是上一组等式中系数矩阵的转置矩阵，故

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

5.3.2 线性变换与其矩阵的关系

(1) 当基底确定后，线性变换与其矩阵一一对应，且保持如下运算关系：

假如σ, τ是n维线性空间V的两个线性变换，它们关于V的基$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$的矩阵分别是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$，那么

1° $\sigma + \tau$ 关于基$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$的矩阵是 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$；

2° $k\sigma$ 关于基$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$的矩阵是 $k\boldsymbol{A}$，$k \in F$；

3° $\sigma\tau$ 关于基$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$的矩阵是 $\boldsymbol{AB}$．

(2) 线性变换 σ 的秩等于其矩阵 A 的秩．

(3) 同一个线性变换关于不同基的矩阵相似，反之，相似矩阵可看成同一线性变换在不同基下的矩阵．

5.4　线性变换的对角化与准对角化

5.4.1　特征根与特征向量的概念

(1) 设 V 为数域 F 上的线性空间，$\sigma \in L(V)$，如果对于 $\lambda \in F$，在 V 中有 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0})$，使

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\boldsymbol{\alpha},$$

则称 λ 为 σ 的一个特征根(特征值)，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 σ 属于特征根 λ 的一个特征向量．

(2) 假如 σ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的矩阵是 A，那么 σ 的特征根 λ 就是 A 的特征根；σ 的属于 λ 的特征向量关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的坐标就是 A 的属于 λ 的特征向量．

5.4.2　线性变换可对角化的条件

(1) 若 $\sigma \in L(V)$，$\lambda \in F$ 是 σ 的特征根．称

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in V, \sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\boldsymbol{\alpha}\}$$

为 σ 的属于 λ 的**特征子空间**．

(2) 设 $\sigma \in L(V)$，如果 V 中存在一组基，使得 σ 在该组基下的矩阵是对角形，就说**线性变换 σ 可对角化**．

(3) 设 σ 是 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换．下面 3 个条件都是 σ 可对角化的充要条件：

1° σ 有 n 个线性无关的特征向量；

2° σ 的特征根都在 F 内，且对于 σ 的每个特征根 $\lambda_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，特征子空间 V_{λ_i} 的维数等于 λ_i 在特征多项式中的重数；

3° V 可分解为 σ 的特征子空间的直和．

5.4.3　线性变换准对角化的条件

(1) 当线性变换不能对角化时，如能找到一组基，使其基下矩阵成准对角形，称该线性变换准对角化．

(2) 设 V 是 F 上线性空间，$\sigma \in L(V)$，W 是 V 的子空间．若 $\sigma(W) \subseteq W$，即对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in W$，$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in W$，则称 W 为 σ 的一个**不变子空间**．

例 4　设 $\sigma \in L(V)$，则 $\mathrm{Im}(\sigma)$，$\mathrm{Ker}(\sigma)$ 都是 σ 的不变子空间，即 σ 的象子空间与核都是 σ 的不变子空间．

例 5　V 及 $\{0\}$ 是任意 $\sigma \in L(V)$ 的不变子空间，V 及 $\{0\}$ 称为 σ 的平凡不变子空间．

(3) 线性变换准对角化的充要条件　$\sigma \in L(V)$，σ 可准对角化的充要条件是 V

可分解为 σ 的若干个不变子空间的直和．

5.5 线性空间的同构

5.5.1 几个基本概念

(1) 假定 V,U 是同一数域 F 上的两个线性空间．映射 $\sigma: V\to U$ 若满足下列两个条件：

1° 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$；

2° 若 $k\in F,\boldsymbol{\alpha}\in V$，则 $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$，$\sigma$ 就称为 V 到 U 的线性变换．

例6 假设 $M_n(F)$ 到数域 F 的变换为

$$\sigma(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\quad(\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\text{ 为矩阵 }\boldsymbol{A}\text{ 的迹}).$$

因

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}\boldsymbol{B},\quad \mathrm{tr}k\boldsymbol{A}=k\mathrm{tr}\boldsymbol{A},$$

故 σ 是 $M_n(F)$ 到 F 的线性变换．

(2) 若 σ 是 V 到 U 的线性变换，τ 为 U 到 V 的线性变换，那么，当 $\sigma\tau=I$，且 $\tau\sigma=I$（I 为恒等变换）时，τ 称为 σ 的逆变换，记为 $\tau=\sigma^{-1}$；σ 为 τ 的逆变换，记为 $\sigma=\tau^{-1}$. 有逆变换的线性变换称为可逆变换（满秩线性变换）.

(3) 如果 σ 是 V 到 U 的可逆变换，那么称 σ 为 V 到 U 的**同构变换**，或说 V,U 同构，记为 $V\simeq U$.

当 $V=U$ 时，σ 就是 V 的自同构变换，简称 V 的自同构．

5.5.2 同构变换的性质

(1) 同构变换保持向量间的一切线性关系．

(2) 数域 F 上两个有穷维线性空间同构的充要条件是它们有相同的维数．特别是数域 F 上 n 维线性空间都与 F^n 同构．

(3) 数域 F 上 n 维线性空间 V 的一切自同构所成的集 G 在乘法之下构成一个群，称 G 为 V 的线性变换群，记作 $\mathrm{GL}(n,F)$.

5.6 对偶空间与对偶变换

5.6.1 对偶空间的定义及其基本性质

(1) 假定 V 是 F 上的线性空间，把 F 看成 F 上的1维线性空间，则 V 到 F 的线性变换称为 V 的**线性泛函**．

由线性泛函定义可知，V 中向量经线性泛函作用后，变为数域 F 中的数，而不是 V 中向量．

(2) 设 f 是数域 F 上线性空间 V 上的一个线性泛函，则

1° $f(\boldsymbol{0})=0$；

2° $f(-\boldsymbol{\alpha})=-f(\boldsymbol{\alpha})\quad(\boldsymbol{\alpha}\in V)$;

3° 对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及数域 F 中任意数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,都有

$$f(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=k_1f(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2f(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_sf(\boldsymbol{\alpha}_s).$$

例 7 对 F^n中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$,定义 $f(\boldsymbol{\alpha})=x_1$,则 f 为 F^n的一个线性泛函.

一般地,在 F 中任意取定 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,定义

$$g(\boldsymbol{\alpha})=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

则 g 也是一个线性泛函.

(3) 设 V 为 F 上的线性空间,V 的全部线性泛函所成的集合为 $\widehat{V}$,定义 $\widehat{V}$ 的运算如下:

1° 加法　对 $\widehat{V}$ 中任意两个线性泛函 f,g,定义 $f+g$ 为

$$(f+g)(\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\alpha})+g(\boldsymbol{\alpha}).$$

易证 $f+g$ 也是 V 的一个线性泛函,称为 f 与 g 的和.

2° 数量乘法　对 F 中任意数 k 及 $\widehat{V}$ 中任意线性泛函 f,定义 kf 为

$$(kf)(\boldsymbol{\alpha})=kf(\boldsymbol{\alpha}),$$

则 kf 也是 V 的线性泛函,称为 k 与 f 的数量乘积.

易验证 $\widehat{V}$ 对于上面两种运算满足线性空间定义中的 8 条算律.因此 $\widehat{V}$ 是 F 上一个线性空间,称此空间 $\widehat{V}$ 为 V 的**对偶空间**.

(4) 设 V 是 F 上 n 维线性空间,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基.定义 V 的 n 个线性泛函 $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n$ 如下:

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n).\tag{5-1}$$

即 $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n)=x_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n$ 为 $\widehat{V}$ 的一组基,称为 V 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的**对偶基**.因而,$\widehat{V}$ 的维数等于 V 的维数.

例 8 设 $f\in\widehat{V},\boldsymbol{\alpha}\in V$,而 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 为 V 的基底,$\{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n\}$ 为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的对偶基底.试求 $f(\boldsymbol{\alpha})$.

解　设

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

$$f=b_1\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1+b_2\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+b_n\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n.$$

由(5-1)式得

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{\alpha})&=(b_1\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1+b_2\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+b_n\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n)(a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=(\sum_{i=1}^n b_i\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_i)(\sum_{j=1}^n a_j\boldsymbol{\alpha}_j)\\&=\sum_{i,j=1}^n b_ia_j\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_i(\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{i=1}^n b_ia_i\end{aligned}$$

$$= [b_1\ b_2 \cdots\ b_n]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \tag{5-2}$$

例 9　求对于 $\mathbf{R}^3$ 的基底

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1\ 0\ 0],\quad \boldsymbol{\alpha}_2 = [1\ 1\ 0],\quad \boldsymbol{\alpha}_3 = [1\ 1\ 1]$$

的对偶空间的对偶基底$\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3\}$.

解　设 $\boldsymbol{\alpha} = [x,y,z] \in \mathbf{R}^3$,归结求 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1(\boldsymbol{\alpha}),\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2(\boldsymbol{\alpha}),\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3(\boldsymbol{\alpha})$. 因 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \in \hat{V}$,根据(5-2)式,先求 a_1,a_2,a_3,使 $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha}_2 + a_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 由$[x\ y\ z] = [a_1 + a_2 + a_3\ \ a_2 + a_3\ \ a_3]$得到

$$a_1 + a_2 + a_3 = x,\quad a_2 + a_3 = y,\quad a_3 = z.$$

即

$$a_1 = x - y,\quad a_2 = y - z,\quad a_3 = z.$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha} = (x-y)\boldsymbol{\alpha}_1 + (y-z)\boldsymbol{\alpha}_2 + z\boldsymbol{\alpha}_3.$$

又

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 = 1\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 + 0\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2 + 0\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3,$$
$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2 = 0\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 + 1\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2 + 0\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3,$$
$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3 = 0\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 + 0\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2 + 1\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3.$$

由(5-2)式得到

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1(\boldsymbol{\alpha}) = [1\ 0\ 0]\begin{bmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{bmatrix} = x - y;$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2(\boldsymbol{\alpha}) = [0\ 1\ 0]\begin{bmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{bmatrix} = y - z;$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3(\boldsymbol{\alpha}) = [0\ 0\ 1]\begin{bmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{bmatrix} = z.$$

(5) V 的两组基的对偶基之间的关系. 设$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$和$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$为 n 维线性空间 V 的两组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,那么 n 维线性空间 V 的对偶空间 $\hat{V}$ 中相应的对偶基有关系:

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1,\hat{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{\beta}}_n) = (\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n)(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{5-3}$$

例 10　所有不超过 2 次的实系数多项式组成一实线性空间 $\mathbf{R}_2[x]$,取其两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 1,\boldsymbol{\alpha}_2 = x,\boldsymbol{\alpha}_3 = x^2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1 = 1,\boldsymbol{\beta}_2 = 1 + x,\boldsymbol{\beta}_3 = 1 + x + x^2$. 试求 $\mathbf{R}_2[x]$ 的

对偶空间 $\widehat{\mathbf{R}_2[x]}$ 中相应的对偶基 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3$ 到 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1,\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2,\widehat{\boldsymbol{\beta}}_3$ 的过渡矩阵．

解 由题设有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

再由(5-3)式即得

$$\begin{aligned}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1,\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2,\widehat{\boldsymbol{\beta}}_3)&=(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3)(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\\&=(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(6) $\widehat{V}$的对偶空间是 V，$\widehat{V}$的基底 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n$ 的对偶基底是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，即

$$\widehat{\widehat{V}}=V,\quad \widehat{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}}_i=\boldsymbol{\alpha}_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

这样，V可看成$\widehat{V}$的对偶空间，又$\widehat{V}$是 V的对偶空间，于是 V 和$\widehat{V}$互为对偶空间，这就是对偶空间名词的来由．

5.6.2 对偶变换

(1) 设 σ 为线性空间 V 的一个线性变换，f 是 V 的一个线性泛函．定义

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\alpha})=f(\sigma\boldsymbol{\alpha}),\quad \boldsymbol{\alpha}\in V,$$

则$\widehat{f}$为 V 的线性泛函．再定义 $\widehat{V}$的变换$\widehat{\sigma}$为

$$\widehat{\sigma}(f)=\widehat{f},\quad f\in\widehat{V},$$

则$\widehat{\sigma}$为$\widehat{V}$的一个线性变换，且称$\widehat{\sigma}$为 σ 的**对偶变换**．

(2) 设σ为n维线性空间V的一个线性变换，$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$是$V$的一组基．若 σ在这组基下的矩阵是$\boldsymbol{A}$，则$\widehat{\sigma}$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的对偶基$\{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n\}$下的矩阵是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(3) 设 V,U 是 F 上线性空间，σ 是 V 到 U 的线性变换，即

$$\widehat{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})=\widehat{\boldsymbol{\beta}}\sigma,\quad \widehat{\boldsymbol{\beta}}\in\widehat{U},$$

则$\widehat{\sigma}$是 $\widehat{U}$到 $\widehat{V}$的线性变换，这种线性变换称为 σ 的对偶变换．

(4) 假定 σ 是 V 到 U 的线性变换，则

1° σ 和其对偶变换$\widehat{\sigma}$有相同的秩；

2° 若σ对于V的基底$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$及 U 的基底$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$的矩阵是 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\widehat{\sigma}$对于对偶基底$\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1,\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\beta}}_m\}$及$\{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n\}$的矩阵是 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

6 欧氏空间与酉空间

6.1 欧氏空间的定义与性质

6.1.1 欧氏空间的定义

(1) 假定 V 是实空间，对于 V 中任意两向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，如果有一实数与其对应，记成 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，且还满足下列条件：

1° $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$；

2° $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，$k$ 是任意实数；

3° $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})$；

4° $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ 时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

那么这实数 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 叫做 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的**内积**.

(2) 一个实空间，如果其中任意两个向量有内积运算，则这个空间就叫做**欧氏空间**. 有时也称为(实)内积空间.

例1 在 $\mathbf{R}^n$ 中设

$$\boldsymbol{\alpha} = [a_1\ a_2 \cdots\ a_n]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta} = [b_1\ b_2 \cdots\ b_n]^{\mathrm{T}},$$

规定

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

则易验证，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 满足定义中各条件，所以 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是内积. 因而 $\mathbf{R}^n$ 对上述内积作成欧氏空间.

一个实(线性)空间有许多不同的内积，因而可对不同内积作成不同的欧氏空间. 但一般约定，对欧氏空间 $\mathbf{R}^n$，总是指 $\mathbf{R}^n$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

例2 在闭区间 $[a,b]$ 上，在所有 x 的连续函数形成的无穷维实空间 $C_{[a,b]}$ 中，对任意 $f(x),g(x)$，规定

$$(f(x),g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

根据积分性质，易验证，$C_{[a,b]}$ 是内积空间.

(3) **柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式**

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \leqslant (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}). \tag{6-1}$$

在内积空间 $\mathbf{R}^n$ 中，(6-1) 式就是不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right);$$

在内积空间 $C_{[a,b]}$ 中，(6-1) 式就是不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

6.1.2　欧氏空间的度量

(1) **向量的长**　向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长为 $|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$. 如果 $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$,那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为单位向量或标准向量.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为欧氏空间 V 的向量,c 为实数,则

1° $|c\boldsymbol{\alpha}| = |c||\boldsymbol{\alpha}|$,

2° $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$(柯西 - 施瓦兹不等式),当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时等号成立.

3° $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$.

上述性质与欧氏空间的维数无关.

(3) **向量的夹角**　在欧氏空间 V 中,两非零向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ 规定为

$$\theta = \arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}.$$

如果 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 为相互**正交向量**.

6.2　度量矩阵及其性质

6.2.1　度量矩阵的概念

假设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维欧氏空间 V 的基,那么

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n) \end{bmatrix}$$

称为基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的**度量矩阵**.

6.2.2　度量矩阵的性质

(1) 度量矩阵是正定矩阵.

(2) 向量的内积可由度量矩阵确定:

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{XAY}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的坐标.

(3) n 维欧氏空间 V 的不同基的度量矩阵是合同的,即如果关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 及 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 的度量矩阵分别是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$,且由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{P}$,则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}.$$

6.3　标准正交基

6.3.1　标准正交基的概念

(1) 假定$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是$n$维欧氏空间$V$的基．若它们都是单位向量，且两两正交，则$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$就称为 **$V$的标准正交基**．

(2) 任意$n(n>0)$维欧氏空间V都存在标准正交基，且V的基为标准正交基的充要条件是它的度量矩阵为单位矩阵．

(3) 由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵；反之，若两个基间的过渡矩阵是正交矩阵，且其中一个基是标准正交基，则另一个基也是标准正交基．

6.3.2　标准正交基的求法

使用正交化(**施密特(Schmidt)正交化程序**)、单位化的方法求标准正交基．因单位化不影响正交化，故常在正交化后单位化．为方便求出，也可在每一步正交化之后，随即单位化．

例3　在欧氏空间$\mathbf{R}^3$中，对于基$\boldsymbol{\alpha}_1=[1\ 1\ 1]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[0\ 1\ 2]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2\ 0\ 3]$施行正交化、单位化，求出$\mathbf{R}^3$的一个标准正交基．

解　第一步，取　$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|}=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

第二步，先取
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_2&=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}_1)}{(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1)}\boldsymbol{\eta}_1\\&=[0\ 1\ 2]-\sqrt{3}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\\&=[-1\ 0\ 1].\end{aligned}$$

然后再令　$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

第三步，取
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_1)}{(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1)}\boldsymbol{\eta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_2)}{(\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2)}\boldsymbol{\eta}_2\\&=[2\ 0\ 3]-\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\\&=\left[\frac{5}{6}\ -\frac{5}{3}\ \frac{5}{6}\right],\end{aligned}$$

再令　$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{|\boldsymbol{\beta}_3|}=\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right].$$

于是$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$就是$\mathbf{R}^3$的一组标准正交基．

6.3.3　关于欧氏空间中子空间的正交关系

(1) 设W_1,W_2是欧氏空间V的两个子空间，如果W_1中任意向量$\boldsymbol{\alpha}$与W_2中任一向量$\boldsymbol{\beta}$都正交，即

$$(\alpha,\beta)=0,\quad \forall \alpha\in W_1,\quad \beta\in W_2,$$

那么就说 W_1 与 W_2 正交,记作 $W_1\perp W_2$.

特别地,如果 V 中一向量 ξ 与子空间 W_1 中任一向量 η 都正交,即

$$(\xi,\eta)=0,\quad \forall \eta\in W_1,$$

那么就说向量 ξ 与子空间 W_1 正交,记作 $\xi\perp W_1$.

(2) 如果子空间 W_1 与 W_2 正交,那么 W_1+W_2 是直和.

(3) 欧氏空间 V 中与子空间 W 正交的 W 的余子空间称为 W 的**正交补**,即若

$$V=W\oplus W',\quad 且\quad W\perp W'$$

则称 W' 是 W 的正交补(由对称性,W 也是 W' 的正交补).

(4) n 维欧氏空间 V 的每一个子空间 W 都有唯一的正交补,子空间 W 的唯一的正交补常记成 $W^{\perp}$.

(5) $W^{\perp}$ 恰由所有与 W 正交的向量所组成.

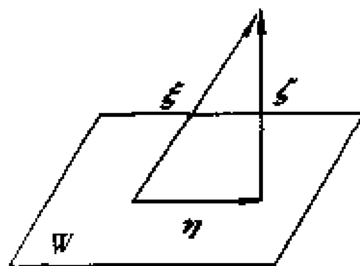


图 6-1

(6) 由分解式 $V=W\oplus W^{\perp}$ 可知,V 中任一向量 ξ 都可以唯一地分解成两个彼此正交的向量 $\eta(\eta\in W)$ 与 $\zeta(\zeta\in W^{\perp})$ 的和;称 η 为向量 ξ 在子空间 W 上的正射影或内射影.图 6-1 是以欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 为例作的说明.

6.4　欧氏空间的线性变换

6.4.1　对称变换

(1) 若欧氏空间 V 的线性变换 σ 满足

$$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta)),\quad \forall \alpha,\beta\in V,$$

那么称 σ 为 V 的**对称变换**.

(2) 设 V 为 n 维欧氏空间,σ 为其上线性变换,σ 为对称变换的充要条件是 σ 在 V 的任意标准正交基下的方阵为实对称矩阵.

(3) 对称变换的特征根都是实数.

(4) 若 σ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换,则存在 V 的标准正交基,使得 σ 关于这组标准正交基的矩阵是对角形矩阵.

例 4　设 σ,τ 是 n 维欧氏空间 V 的两个对称变换,证明 $\sigma\tau+\tau\sigma$ 也是 V 的对称变换.

证　任取 $\alpha,\beta\in V$.因 σ,τ 为 V 上的对称变换,故

$$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta)),\quad (\tau(\alpha),\beta)=(\alpha,\tau(\beta)).$$

于是有

$$\begin{aligned}((\sigma\tau+\tau\sigma)\alpha,\beta)&=(\sigma\tau(\alpha)+\tau\sigma(\alpha),\beta)\\&=(\sigma\tau(\alpha),\beta)+(\tau\sigma(\alpha),\beta)\\&=(\tau(\alpha),\sigma(\beta))+(\sigma(\alpha),\tau\beta)\\&=(\alpha,\tau\sigma(\beta))+(\alpha,\sigma\tau(\beta))\end{aligned}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}, (\sigma\tau + \tau\sigma)\boldsymbol{\beta}).$$

故 $\sigma\tau + \tau\sigma$ 为 V 的对称变换．

6.4.2　正交变换

(1) 设 σ 是欧氏空间 V 的一个线性变换．如果对于任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，都有 $|\sigma\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}|$，那么称 σ 为 V 的一个**正交变换**．换言之，正交变换是保长的线性变换．

(2) σ 是欧氏空间 V 的一个线性变换．下面4个条件都是 σ 为正交变换的充要条件：

1° σ 保持两向量的内积不变；

2° 保持向量长不变；

3° σ 把标准正交基仍然变为标准正交基；

4° σ 关于标准正交基的矩阵是正交矩阵．

6.4.3　欧氏空间的同构(变换)

(1) 假定 V, U 是两个欧氏空间，如果 σ 是作为线性空间 V 到 U 的一个同构变换，且还满足

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \sigma(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V,$$

那么 σ 叫做欧氏空间 V 到 U 的一个同构变换．如果欧氏空间 V 和 U 间存在一个同构映射，就说 V 和 U 同构．

(2) 两个有穷维欧氏空间同构的充要条件是它们有相同的维数．特别是 n 维欧氏空间都与欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 同构．

6.5　酉　空　间

6.5.1　酉空间的定义

假如 V 是复空间，如果对于 V 中任意两向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 有一个复数与其对应，记成 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$，若此复数又满足下列各条件，那么这复数 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 叫做 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的内积，V 称为**酉空间**，又称为复内积空间：

1° $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \overline{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}$，这里 $\overline{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}$ 是 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$ 的共轭复数；

2° $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = 0$ 时等号成立；

3° $(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}) = k_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta})$，对任意 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta} \in V, k_1, k_2 \in F$ 成立．

这里与欧氏空间定义的内积只是条件1°不同．$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 一般是复数，但根据条件1°，$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \overline{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$ 时，$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ 就是实数．没有该规定，条件2°就没有意义了．

6.5.2　酉空间的简单性质

(1) 酉空间中内积性质

1° $(\boldsymbol{\alpha}, b\boldsymbol{\beta}) = \overline{b}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$；

2° $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1)+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_2)$;

3° 一般地,若 $a_i,b_i\in F,\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i\in V(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{i=1}^{n}b_i\boldsymbol{\beta}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i);$$

4° $(\boldsymbol{\alpha},0)=(0,\boldsymbol{\beta})=0$.

(2) 酉空间 V 的度量矩阵

假设 V 是 n 维酉空间,$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是它的基底,$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 中任意两向量. 由内积性质,有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i,j=1}^{n}x_i\bar{y}_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}.$$

其中 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,而 $a_{ij}=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)(i,j=1,2,\cdots,n)$,$\boldsymbol{X}=[x_1\ x_2\cdots\ x_n]$,$\overline{\boldsymbol{Y}}=[\bar{y}_1\ \bar{y}_2\ \cdots\ \bar{y}_n]$. $\boldsymbol{A}$ 称为 V 关于基底 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的度量矩阵.

6.5.3 酉空间的度量

(1) 若 $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$,则称 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 为酉空间向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长,或称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模. 长为 1 的向量称为单位向量或标准向量.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为酉空间 V 的向量,k 为一复数,则

1° $|k\boldsymbol{\alpha}|=|k||\boldsymbol{\alpha}|$.

2° $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时等号成立.

3° $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$(三角不等式).

因酉空间中的内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$一般为复数,故向量之间不易定义夹角,但仍引入两向量正交概念.

(3) 酉空间 V 中,若$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$,则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交,或互相垂直.

(4) 酉空间中,任意一组两两正交的非零向量是线性无关的. 如果一组单位向量两两正交,则称其为一个标准正交组,若这个正交组又生成整个空间 V,则称它为 V 的标准正交基.

(5) 设 V 为复数域上的酉空间,S 为 V 的一个子空间. 若

1° $S\oplus T=V$;

2° 对 $\boldsymbol{\alpha}\in S$ 和 $\boldsymbol{\beta}\in T$,有$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$,

则称 T 为 S 的正交补空间,记为 $T=S^{\perp}$.

(6) 若 S 是有限维酉空间 V 的一个子空间,则 V 中有唯一一个子空间 T 为 S 的正交补空间.

6.5.4 酉空间上线性变换及其性质

(1) 假如酉空间 V 的线性变换 σ,使 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长不变,即

$$|\sigma(\boldsymbol{\alpha})|=|\boldsymbol{\alpha}|,$$

那么 σ 称为 V 的**酉交变换**.

(2) 酉交变换有以下性质

1° 酉空间V的线性变换σ为酉交变换的充要条件是

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

2° 酉空间V的线性变换σ为酉交变换的充要条件是σ把V的标准正交基仍然变为标准正交基．

3° 酉空间V的线性变换σ关于V的标准正交基的矩阵为$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,则σ为酉交变换的充要条件是$\boldsymbol{A}$为酉交矩阵．

4° 酉交变换是满秩线性变换,因此也是一对一的线性变换．

5° 酉交变换的特征根的绝对值都是1.

(3) 设σ为酉空间V上的线性变换,由关系式

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\sigma^*(\boldsymbol{\beta})),\quad \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$$

所定义的变换σ^*是线性变换,且称σ^*为σ的**共轭变换**．

(4) 共轭变换有以下性质：

1° $(\sigma^*)^*=\sigma^{**}=\sigma$.

2° $(k\sigma)^*=\bar{k}\sigma^*,k\in F$.

3° $(\sigma_1+\sigma_2)^*=\sigma_1^*+\sigma_2^*$.

4° $(\sigma_1\sigma_2)^*=\sigma_2^*\sigma_1^*$.

5° 若σ是可逆线性变换,则σ^*也是可逆线性变换,且$(\sigma^*)^{-1}=(\sigma^{-1})^*$.

6° 若在某一标准正交基下σ的矩阵为$\boldsymbol{A}$,则共轭变换σ^*关于同一组基的矩阵为A的共轭转置矩阵$\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$.

(5) 若$\sigma=\sigma^*$,有$(\sigma\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\sigma\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,则$\sigma$是对称变换,又称$\sigma$为自共轭变换或埃尔米特(Hermite)变换．

(6) 自共轭变换有以下性质

1° V的线性变换σ为自共轭变换的充要条件:对于V中任意向量$\boldsymbol{\alpha}$,$(\sigma\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$是实数．

2° 在标准正交基下,自共轭变换的矩阵是埃尔米特矩阵;反之,若线性变换关于一标准正交基的矩阵是埃尔米特矩阵,则必为自共轭变换．

3° 自共轭变换的特征根是实数,它的属于不同特征根的特征向量必正交．

7 二次型与双线性型

7.1 二次型及其矩阵

7.1.1 二次型的矩阵表示

(1) 二次型可表示为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\quad(a_{ij}=a_{ji}),$$

其中对称矩阵 $A = [a_{ij}]$ 称为**二次型 f 的矩阵**，A 的秩又称为 f 的秩．

当 A 为对称矩阵时，f 可用 A 唯一地表示为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$.

当 A 不为对称矩阵时，上述表示不唯一．

(2) F 上二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$，经线性变换 $X = PY$，仍得到 F 上的二次型，即

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = Y^T(P^T AP)Y.$$

它的矩阵是 $P^T AP$.

7.1.2 合同矩阵及其性质

(1) 设 A, B 是数域 F 上两个 n 阶矩阵．如果 F 上存在一个 n 阶可逆矩阵 C，使

$$B = C^T AC,$$

那么就说 B 与 A 合同，记为 $B \backsimeq A$.

(2) 设 f 与 g 是数域 F 上的两个二次型，如果存在一个（系数在 F 中的）满秩线性变换把 f 变为 g，则称二次型 f 与 g 等价．

(3) 数域 F 上两个二次型等价，当且仅当它们的矩阵合同．

(4) 合同的矩阵，其秩相等．

(5) 矩阵之间的合同关系具有反身性、对称性、传递性，因而数域 F 上的所有 n 阶矩阵可按合同关系进行分类．

7.2 二次型化为平方和

(1) 二次型也可按等价关系分类：两个二次型属于同一个等价类，当且仅当它们的对应矩阵属于同一个合同类．这样，用满秩线性变换化简二次型的问题，就相当于在二次型矩阵所在的合同类里找一个最简单的对称矩阵．

(2) 二次型中最简单的一种二次型是只含平方项的二次型即平方和，它称为二次型的标准形．

(3) 数域 F 上任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$，都可经满秩线性变换 $X = CY$ 化为标准形（平方和）：

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2,\ d_i \neq 0,\quad (i = 1, 2, \cdots, r). \tag{7-1}$$

其中平方项的个数 r 等于 f 的秩.

(4) 化二次型为平方和的方法，常用的有配平方法及初等变换法等．

7.3 复数域上与实数域上二次型的分类

7.3.1 复数域上二次型的分类

(1) 复数域上秩为 r 的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，可以用适当的满秩线性变换化为规范形：

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2. \tag{7-2}$$

(2) (7-2) 式用矩阵语言叙述就是：对于复数域上秩为 r 的对称矩阵 A，存在满秩矩阵 C，使得

$$C^T AC = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \tag{7-3}$$

（其中 1 共 r 个）

即任一复对称矩阵都合同于一个形如(7-3)式的对角矩阵，其中 1 的个数等于该矩阵的秩．

(3) 两个同阶复对称矩阵合同的充要条件是它们的秩相等．

(4) 在复数域内秩相同的二次型有相同的规范形，因而相互等价．二次型的秩可以等于 $0,1,2,\cdots,n$，共有 $n+1$ 种可能．所以复数域上的二次型共有 $n+1$ 个不同的等价类．

7.3.2　实数域上二次型的分类

(1) 秩为 r 的实二次型 f 可以用适当的实满秩线性变换化为规范形：

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_r^2. \tag{7-4}$$

(2) (7-4) 式用矩阵的语言叙述就是：对于秩为 r 的实对称矩阵 A，存在一个实满秩矩阵 C，使得

$$C^T AC = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{7-5}$$

（其中 1 共 p 个，-1 共 $r-p$ 个）

(3) 与复数域的情形不同，秩为 r 的任意实二次型的规范形不一定相同，但对于每个实二次型 f 来说，它们规范形又是唯一的，这就是下面的惯性定理．

(4) **惯性定理**　在秩为 r 的一个实二次型的规范形 $f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_r^2$ 中，正项个数 p 是唯一的，因而负项个数 $r-p$ 也是唯一的．显然，规范形由 r,p 这两个数唯一决定．

在实二次型的规范形中，正项个数 p 叫做实二次型的正惯性指数，负项个数 $r-p$ 叫做负惯性指数，正惯性指数与负惯性指数的差称为实二次型的符号差，而其和等于实二次型的秩 r．

(5) 两个实二次型等价的充要条件是它们的秩相等，正惯性指数也相等；或者是其正惯性指数相等，负惯性指数也相等．

这就完全解决了实二次型的分类问题．

例 1　试证：实二次型 f 的秩 r 与符号差 s 同为奇数或同为偶数，且 $|s| \leqslant r$．

证　设 f 的正惯性指数为 p，则负惯性指数为 $r-p$，于是其符号差为

$$s = p-(r-p) = 2p-r.$$

因此 r 与 s 同为奇数或同为偶数，且

$$|s|=|p-(r-p)|\leqslant|p|+|r-p|=r.$$

(6) 当一个实二次型对每组不全为零的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，均使

$$X^TAX>0, X^TAX<0, X^TAX\geqslant 0, \text{或 } X^TAX\leqslant 0,$$

则分别称二次型为正定的，负定的，半正定的，半负定的．其它一切实二次型称为不定的(即 X^TAX 的符号与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有关)或恒等于零的二次型．

(7) **正(负)定二次型的判定**

实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 为正(负)定的充要条件常用的有下面 3 个：

1° f 的正(负)惯性指数为 n；

2° $A=[a_{ij}]$ 的左上角各阶主子式都大于零(左上角各阶主子式负、正相间)；

3° A 的特征根都大(小)于零．

例 2　求 λ 的值，使实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3+x_4^2$$

是正定的，并讨论 $\lambda\leqslant 2$ 时的情形．

解　f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda & -1 & 0\\ 1 & -1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

它的左上角各阶主子式为

$$a_{11}=\lambda,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-2),$$

$$|A|=(\lambda+1)^2(\lambda-2).$$

要使所给实二次型为正定，必有

$$\begin{cases}\lambda>0,\\ \lambda^2-1>0,\\ (\lambda+1)^2(\lambda-2)>0,\end{cases}$$

解之得到

$$\lambda>2,$$

即 $\lambda>2$ 时，f 是正定的．当 $\lambda\leqslant 2$ 时，由于 $|A|\leqslant 0$，f 既不是正定的，也不是负定的，因而 f 是不定的．

7.4 双线性型

7.4.1 双线性型及其矩阵表示

(1) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m$ 为两组变量．若多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 既对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是齐次线性的，又对 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 是齐次线性的，则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 必取下列形式

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)\\
&= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1m}x_1y_m + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \\
&\quad \cdots + a_{2m}x_2y_m + \cdots + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \cdots + a_{nm}x_ny_m\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_iy_j.
\end{aligned} \tag{7-6}$$

形如(7-6)式中那样的多项式，称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的**双线性型**．而矩阵

$$A = [a_{ij}]_{n\times m}$$

称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 的矩阵，A 的秩 r 称为 f 的秩．

(2) 与二次型类似，令 $X = [x_1\ x_2\cdots\ x_n]^T, Y = [y_1\ y_2\cdots\ y_m]^T$，则(7-6)式可改写成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m) = X^TAY. \tag{7-7}$$

7.4.2 双线性型的标准形

(1) 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 分别经过满秩线性变换

$$\begin{cases} X = PU,\text{其中 } P = [p_{ij}]_{n\times n}, U = [u_1\ u_2\cdots\ u_n]^T,\\ Y = QV,\text{其中 } Q = [q_{ij}]_{m\times m}, V = [v_1\ v_2\cdots\ v_m]^T,\end{cases} \tag{7-8}$$

则(7-7)式化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m) = U^TP^TAQV. \tag{7-9}$$

(2) 如秩$(A) = r$，则存在满秩矩阵 $P = [p_{ij}]_{n\times n}, Q = [q_{ij}]_{m\times m}$，使双线型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m) = X^TAY$ 经过满秩线性变换(7-8)式化为标准形：

$$f = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_rv_r.$$

7.4.3 对称双线性型及其基本性质

(1) 如果 $m = n$，且 A 是对称矩阵，则双线性型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 称为对称双线性型，一般可写成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n) = f(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j = X^TAY.$$

当 $y_j = x_j$ 时，f 即成为二次型．因此，二次型是双线性型的特例．

(2) 在双线性型 $f(X,Y)$ 中，X,Y 经同一满秩线性变换，当 f 是对称双线性型时，仍然变为对称双线性型．

(3) 如 $f(X,Y)=X^TAY$ 的秩为 r，则有满秩变换使 f 化为标准形，即

$$f=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_rv_r.$$

7.4.4 实对称双线性型

(1) 如果 f 的矩阵 A 是实对称矩阵，则 f 称为实对称双线性型．

(2) 实对称双线性型同实二次型一样，也满足惯性定律，即在 f 的标准形

$$f=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_pv_p-u_{p+1}v_{p+1}-u_{p+2}v_{p+2}-\cdots-u_rv_r$$

中，正项个数 p 是唯一确定的，负项个数 $r-p$ 也是唯一确定的．因此，同样有正惯性指数、负惯性指数的概念．

7.4.5 埃尔米特二次型

(1) $2n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n;\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ 的一个双线性型

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\bar{x}_ix_j,$$

称为埃尔米特(Hermite)二次型，式中 a_{ij} 是复数，且 $a_{ij}=a_{ji}$，因而 a_{ij} 都是实数．

(2) 令 $X=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T,\bar{X}=[\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \cdots\ \bar{x}_n]^T,A=[a_{ij}]_{n\times n}$，则

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bar{X}^TAX.$$

(3) 采用适当的满秩复线性变换，可将埃尔米特二次型化为标准形，即

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\bar{x}_ix_j=b_1\bar{y}_1y_1+b_2\bar{y}_2y_2+\cdots+b_r\bar{y}_ry_r.$$

其中 r 为 $A=[a_{ij}]$ 的秩，$b_1,b_2,\cdots,b_r$ 为实数．

(4) 埃尔米特二次型同实对称双线性型一样，也满足惯性定律．即在 H 的标准形

$$\bar{z}_1z_1+\bar{z}_2z_2+\cdots+\bar{z}_pz_p-\bar{z}_{p+1}z_{p+1}-z_{p+2}\bar{z}_{p+2}-\cdots-\bar{z}_rz_r$$

中，正项个数 p 是唯一确定的，负项个数 $r-p$ 也是唯一确定的．因此，同样有正惯性指数、负惯性指数等概念．

参 考 文 献

1 北京大学数学系．高等代数．第 2 版．北京：高等教育出版社，1988.

2 熊全淹，叶明训．线性代数．第 3 版．北京：高等教育出版社，1987.

3 周伯壎．高等代数．北京：人民教育出版社，1978.

4 日本数学会．数学百科辞典．北京：科学出版社，1984.

·经典数学卷·

第4篇

矩阵论

编　者　钱吉林
审校者　王萼芳

目　录

引　　言

矩阵这个词是在1850年首先由英国数学家西尔维斯特(Sylvester)引进的．英国数学家凯莱(Cayley)被誉为矩阵论的创立者，他在1855年的一篇《矩阵论的研究报告》中，引进了有关矩阵论的一系列重要概念：零矩阵、单位阵，矩阵的加法，数乘矩阵，矩阵的乘法，转置矩阵，逆矩阵，方阵的特征值等．此外对矩阵论的发展作出过重要贡献的数学家，还有德国的弗罗尼乌斯(Frobenius)、亨泽尔(Hensel)、雅可比(Jacobi)，英国的史密斯(Smith)，法国的约当(Jordan)、埃尔米特(Hermite)等．

矩阵的主要研究对象有以下4个方面：

(1) 矩阵的运算及其性质，以及矩阵的3个特征数——秩、行列式(方阵)、特征值(方阵)．

(2) 矩阵的3个标准形——等价标准形，合同标准形，相似标准形．

(3) 矩阵表述的代数结构——线性方程组，二次型线性空间(含欧氏空间)，线性变换．

(4) 矩阵分析——矩阵范数，矩阵的极限、导数、积分、级数等等．

矩阵论是数学各分支、自然科学、工程技术的基础，特别是物理、化学、计算机、测量学、网络学、经济理论等不可缺少的数学工具．

1　矩阵及其运算

1.1　矩阵的概念

1. 矩阵

由数域 F 中的 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[a_{ij}]_{m\times n} \tag{1-1}$$

叫做数域 F 上的 $m\times n$ **矩阵**．矩阵常用英文大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示．

式(1-1)中的 a_{ij} 叫做 A 的第 i 行第 j 列元素．(1-1)式也可简记为 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $A=[a_{ij}]$ 或 $A_{m\times n}$ 等．

元素全是实数的矩阵叫做**实矩阵**，元素为复数的矩阵叫做**复矩阵**．

元素全是零的 $m\times n$ 矩阵，叫做零矩阵，记为 $\mathbf{0}_{m\times n}$ 或 $\mathbf{0}$.

2. 方阵

当 $m=n$ 时，$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 称为 **n 阶方阵**，并称 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元.

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，则可定义如下概念：

1° $a_{ij}=0,(i>j;i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角阵**.

2° $a_{ij}=0,(i<j;i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**下三角阵**.

3° $a_{ij}=0,(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角阵**，这时也可记为

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}[a_{11}\ a_{22}\cdots\ a_{nn}].$$

4° 如果 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}[1\ 1\ \cdots\ 1]$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶单位阵**，单位阵记为 $\boldsymbol{I}_n$ 或简记为 $\boldsymbol{I}$（有些书上记为 $\boldsymbol{E}$）.

3. 行矩阵和列矩阵

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=[a_1\ a_2\cdots\ a_n]$$

叫做**行矩阵**(或行向量). 只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

叫做**列矩阵**(或列向量).

4. 矩阵相等

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n},\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，如果它们对应的元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.2 矩阵的运算

1. 矩阵加减法

(1) 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n},\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n},\boldsymbol{C}=[c_{ij}]_{m\times n}$，如果满足

$$a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

令 $\boldsymbol{D}=[-b_{ij}]_{m\times n}$，称 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{B}$.

称 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之差，记为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

例1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&5&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&6&9\\-1&-3&5\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},-\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$.

解 $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&5&11\\-1&2&8\end{bmatrix},\quad -\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\0&-5&-3\end{bmatrix},$$

$$A-B=\begin{bmatrix}-2 & -7 & -7\\ 1 & 8 & -2\end{bmatrix},\quad B-A=\begin{bmatrix}2 & 7 & 7\\ -1 & -8 & 2\end{bmatrix}.$$

(2) 矩阵的加法满足 4 条算律(称为加群性质):设 A、B、C 都是$m\times n$矩阵,则

1° 交换律 $A+B=B+A$;

2° 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3° 存在零元 $0+A=A$,其中 0 是$m\times n$零矩阵;

4° 存在负元 $(-A)+A=0$.

由上面 4 个条件可以得到

5° 移项律 若 $A+B=C$,则 $B=C-A$.

2. 数乘矩阵

(1) 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$,k 是数,称$(ka_{ij})_{m\times n}$为 k 与 A 的乘积,记为 $k\cdot A$,简记为 kA.

(2) 数乘矩阵满足下面 4 条算律:设 A,B 是$m\times n$矩阵,k,l 是数,则

1° $1\cdot A=A$;

2° $k(lA)=(kl)A$;

3° $(k+l)A=kA+lA$;

4° $k(A+B)=kA+kB$.

(3) 设 $\mathbf{C}^{m\times n}$(或 $\mathbf{R}^{m\times n}$)表示复(或实)数域上一切$m\times n$矩阵全体所成集合(下同,不再重述). 则 $\mathbf{C}^{m\times n}$关于矩阵加法和数乘矩阵两种运算构成 $\mathbf{C}$(或 $\mathbf{R}$)上一个$m\times n$维线性空间 .

3. 矩阵乘法

(1) 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$,$B=[b_{ij}]_{n\times s}$,则称 $C=[c_{ij}]_{m\times s}$为 A 与 B 之积,记为 AB,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s).$$

(2) 矩阵乘法满足下面 5 条算律:

1° $A0=0$,$0A=0$,其中 $A0$ 与 $0A$ 都要可乘;

2° 结合律 $(AB)C=A(BC)$,其中 AB 可乘,BC 可乘;

3° 左分配律 $A(B+C)=AB+AC$,

右分配律 $(B+C)D=BD+CD$;

4° 有单位元 $IA=A$,$AI=A$,其中 AI 与 IA 可乘;

5° $k(AB)=A(kB)=(kA)B$,其中 AB 可乘,k 是数 .

(3) $\mathbf{C}^{n\times n}$(或 $\mathbf{R}^{n\times n}$)关于加法和乘法两种运算构成环 .

(4) 矩阵乘法有 3 条与数的乘法不同的特性:

1° 不满足交换律 . 一般 AB 有意义,不一定 BA 有意义,即使两个都有意义也不一定相等 . 比如

$$C=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{bmatrix},$$

则

$$CD=\begin{bmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{bmatrix},\quad DC=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

2° 有零因子，即存在 $A \neq 0, B \neq 0$ 而 $AB = 0$. 比如上面 DC 即是 .

3° 左(或右)消去律不成立，即若 $AB = AC$(或 $BD = CD$)成立，不能得出 $B = C$.

例2 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix},$$

求 $AB - 2CD + 6DC + 7C$.

解 $AB = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$, $CD = \begin{bmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$, $DC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

所以 $$AB - 2CD + 6DC + 7C = \begin{bmatrix} 16 & 91 \\ -3 & -35 \end{bmatrix}.$$

4. 矩阵的幂与矩阵多项式

(1) **方阵的幂** 设 A 是 n 阶方阵，规定

$$A^m = \begin{cases} AA\cdots A(m\text{ 个}), & m \in N, \\ I, & m = 0. \end{cases}$$

称 A^m 为方阵 A 的幂，其中 m 为非负整数 .

(2) 方阵的幂满足以下算律：设 m, k 是非负整数，A 为 n 阶方阵，则

1° $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$;

2° $(A^m)^k = A^{mk}$.

但与数的幂性质不同的是：$(AB)^m \neq A^m \cdot B^m$.

(3) **矩阵多项式** 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵，且

$$f(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

是 F 上的多项式，规定

$$f(A) = b_m A^m + b_{m-1} A^{m-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I,$$

并称 $f(A)$ 为 A 的矩阵多项式 .

显然 $f(A)$ 仍为 F 上的 n 阶方阵.

例3 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 - 5x + 4$, 求 $f(A)$.

解 $f(A) = A^2 - 5A + 4I = I$.

(4) 矩阵多项式满足以下算律：设 A 为 n 阶方阵，$f(x), g(x)$ 是任意两个复系数多项式，则

1° $f(A) + g(A) = g(A) + f(A)$;

2° $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

5. 矩阵的转置

(1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，如果把 A 的行换成同序数的列，得到的新矩阵，称为 A 的**转置矩阵**，记为 A^T(或 A').

显然 A^T 是 $n \times m$ 矩阵，比如

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\0 & 3 & 6\end{bmatrix},\quad 则\quad A^{T}=\begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & 3\\1 & 6\end{bmatrix}.$$

(2) 矩阵的转置是一种一元运算,它满足以下算律:

1° 对合律 $(A^{T})^{T}=A$;

2° 线性性 $(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$, $(kA)^{T}=kA^{T}$;

3° 穿脱律 $(AB)^{T}=B^{T}A^{T}$,其中 AB 可乘.

(3) 对称阵与反对称阵.

1° 对称阵 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$,若 $A^{T}=A$,则称 A 为对称阵.

显然 A 为对称阵的充要条件是 $a_{ij}=a_{ji}$, $(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$.

2° 反对称阵 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$,若 $A^{T}=-A$,则称 A 为**反对称阵**.

显然 A 为反对称阵的充要条件是

$$a_{ij}+a_{ji}=0,\ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

特别地,反对称阵的主对角元 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$.

例 4 设 $A=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{m\times n}$,证明 $AA^{T}=\mathbf{0}$ 的充要条件是 $A=\mathbf{0}$.

证 充分性显然成立.下证必要性.

设 $B=[b_{ij}]=AA^{T}$.则 $B=\mathbf{0}$是 m 阶零矩阵.那么

$$0=b_{ii}=a_{i1}^{2}+a_{i2}^{2}+\cdots+a_{in}^{2}\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

由于 a_{ij}都是实数,由上式得

$$a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

从而有 $A=\mathbf{0}$.

6. 行列式

(1) 设 $A=[a_{ij}]$为 n 阶方阵,由 A 的元素按原来的位置所构成的行列式,叫做方阵 A 的行列式,记为$|A|$或 $\det A$.

(2) 方阵的行列式是一个数,这个数值是反映 A 的特征的一个数.它满足以下算律:

1° $|A^{T}|=|A|$;

2° $|kA|=k^{n}|A|$,其中 A 为 n 阶方阵,k 是数;

3° $|AB|=|A|\cdot|B|$,其中 A,B 均为 n 阶方阵.一般有

$$|A_1A_2\cdots A_m|=|A_1|\cdot|A_2|\cdots|A_m|.$$

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$都是 n 阶方阵.

(3) 非奇异阵 设 A 是 n 阶方阵,若$|A|\neq0$,则称 A 为**非奇异阵**,或称为满秩矩阵.否则称 A 为**奇异阵**,或称为降秩矩阵.

显然,若 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$都是 n 阶方阵,则 $A_1\cdots A_m$ 为非奇异阵的充要条件是一切$A_i(i=1,2,\cdots,m)$都是非奇异阵.

7. 共轭矩阵

(1) 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$是复矩阵,称$[\bar{a}_{ij}]_{m\times n}$为$A$ 的**共轭矩阵**,记为 $\overline{A}$,其中$\overline{a_{ij}}$为 a_{ij}的共轭复数.比如

$$A=\begin{bmatrix} 1+i & 0 & -3-2i \\ -5i & 1-i & i \end{bmatrix} \quad 则 \quad \overline{A}=\begin{bmatrix} 1-i & 0 & -3+2i \\ 5i & 1+i & -i \end{bmatrix}.$$

(2) 矩阵的共轭也是一元运算,它满足以下算律:

1° $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

2° $\overline{kA}=\overline{k}\cdot\overline{A}$,其中 k 是复数;

3° $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$,其中 AB 可乘;

4° $\overline{A^{T}}=(\overline{A})^{T}$;

5° 设 A 是 n 阶方阵,则 $|\overline{A}|=\overline{|A|}$.

8. 伴随矩阵

(1) 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$,称下面 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵,记为 A^*,其中 A_{ij}为$|A|$中 a_{ij}的代数余子式. 比如

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

则

$$A^*=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(2) 伴随矩阵是一元运算,它具有以下算律:

1° $AA^*=A^*A=|A|I$;

2° 设 A 是 n 阶方阵($n\geqslant2$),则 $|A^*|=|A|^{n-1}$;

3° 设 A 是 n 阶方阵,k 是数,则 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$;

4° $(A^*)^T=(A^T)^*$;

5° $(AB)^*=B^*A^*$,其中 A,B 都是 n 阶方阵.

9. 矩阵的拉直

(1) 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$,称列矩阵

$$[a_{11}\ a_{12}\cdots\ a_{1n}\ a_{21}\ a_{22}\cdots\ a_{2n}\cdots\ a_{m1}\ a_{m2}\cdots\ a_{mn}]^T$$

为 A 的拉直,记为 $\overrightarrow{A}$. 比如设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

则

$$\overrightarrow{A}=[1\quad 3\quad 2\quad -1\quad 5\quad 6]^T.$$

(2) 矩阵的拉直满足以下算律：

1° $\overrightarrow{A+B}=\vec{A}+\vec{B}$；

2° $\overrightarrow{kA}=k\vec{A}$，其中 k 是数．

10. 矩阵的直积

(1) 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，B 是 $s\times r$ 矩阵，称矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

为 A 与 B 的直积(或克罗内克(Kronecker)积)，记为 $A\otimes B$. 比如

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

则

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & b\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ d\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & e\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & bx & cx \\ ay & by & cy \\ dx & ex & fx \\ dy & ey & fy \end{bmatrix},$$

$$B\otimes A=\begin{bmatrix} x\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \\ y\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & bx & cx \\ dx & ex & fx \\ ay & by & cy \\ dy & ey & fy \end{bmatrix}.$$

(2) 矩阵直积是二元运算，它满足以下算律：

1° $0\otimes A=0$，$A\otimes 0=0$；

2° $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$；

3° $(A+B)\otimes C=(A\otimes C)+(B\otimes C)$，

  $C\otimes(A+B)=(C\otimes A)+(C\otimes B)$；

4° $(kA)\otimes(lB)=(kl)(A\otimes B)$，其中 k,l 是数；

5° $(A\otimes B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}}$；

6° $(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD$，其中 AC 可乘，BD 可乘；

7° $I_n\otimes I_m=I_{nm}$；

8° $|A\otimes B|=|A|^n\cdot|B|^m$，其中 A,B 分别为 m 阶和 n 阶方阵；

9° $\overrightarrow{ABC}=(A\otimes C^{\mathrm{T}})\vec{B}$，其中 ABC 可乘．

11. 逆矩阵

(1) 设 A 是 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使 $AB=BA=I$，则称 A 是可逆阵，且称 B 是 A 的一个**逆矩阵**．

(2) 矩阵的逆具有下面性质：

1° 设 A 是 n 阶方阵，则 A 是可逆阵的充分必要条件是 $|A|\neq 0$；

2° 设 A 是可逆阵，则它的逆矩阵是唯一的，记为 A^{-1}，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*;$$

3° 当 A 可逆时，$(A^{-1})^{-1}=A$；

4° 当 A,B 都是 n 阶可逆阵，则

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1};$$

5° 当 A 可逆时，$k\neq 0$，则

$$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1};$$

6° 设 A 是可逆阵，则 A^{T} 也可逆，且

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}};$$

7° 设 A 是可逆阵，则 A^* 也可逆，且

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A;$$

8° 设 A 是 n 阶可逆阵，B 是 m 阶可逆阵，则 $A\otimes B$ 可逆，且

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1};$$

9° 称 $A=\begin{bmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{bmatrix}$为准对角阵，其中 A_i 是 $n_i\times n_i$ 方阵，则 A 可逆的充要条件是 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$都可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1}\end{bmatrix}.$$

1.3 分块阵的运算

1. 分块阵的性质

设 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m1} & \cdots & A_{mn}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{m1} & \cdots & B_{mn}\end{bmatrix}$，其中 A_{ij},B_{ij}都是 $s_i\times t_j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$矩阵，则

$$A\pm B=\begin{bmatrix}A_{11}\pm B_{11} & \cdots & A_{1n}\pm B_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m1}\pm B_{m1} & \cdots & A_{mn}\pm B_{mn}\end{bmatrix},$$

$$kA=\begin{bmatrix}kA_{11} & \cdots & kA_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ kA_{m1} & \cdots & kA_{mn}\end{bmatrix},$$

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{m1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{mn}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

再令

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nt} \end{bmatrix},$$

其中 C_{jk} 为 $t_j\times r_k(j=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,t)$矩阵,则

$$AC=\begin{bmatrix} A_{11}C_{11}+\cdots+A_{1n}C_{n1} & \cdots & A_{11}C_{1t}+\cdots+A_{1n}C_{nt} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}C_{11}+\cdots+A_{mn}C_{n1} & \cdots & A_{m1}C_{1t}+\cdots+A_{mn}C_{nt} \end{bmatrix}.$$

例 5 设 $A=\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ C & I_2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} D & G \\ M & F \end{bmatrix}$,其中 $C=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $G=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,求 $2A-B$、AB 及 B^{T}.

解
$$2A-B=\begin{bmatrix} 2I_2-D & -G \\ 2C-M & 2I_2-F \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$AB=\begin{bmatrix} I_2D+0M & I_2G+0F \\ CD+I_2M & CG+I_2F \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} D^{\mathrm{T}} & M^{\mathrm{T}} \\ G^{\mathrm{T}} & F^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. 分块阵的行列式

(1) 第一降阶定理(舒尔(Schur)定理) 设 A,D 分别为 n 阶和 m 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{cases} |A|\cdot|D-CA^{-1}B|, & \text{其中 } A \text{ 可逆}, \\ |D|\cdot|A-BD^{-1}C|, & \text{其中 } D \text{ 可逆}. \end{cases}$$

(2) 设 $A,B,C、D$ 均为 n 阶方阵,且 $AC=CA$,则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

3. 分块阵的逆

(1) $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$,其中 A,B 分别为 n 阶与 m 阶可逆阵.

(2) $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$，其中 A，B 分别为 n 阶与 m 阶可逆阵.

(3) 设 A，D 分别为 n 阶与 m 阶可逆阵，则

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

(4) 设 $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中 A，D 分别为 n 阶与 m 阶可逆阵，H 可逆，则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M & -MBD^{-1} \\ -D^{-1}CM & D^{-1}CMBD^{-1} + D^{-1} \end{bmatrix},$$

其中

$$M = (A - BD^{-1}C)^{-1}.$$

2 矩阵的秩及其等价标准形

2.1 矩阵的初等变换

1. 矩阵的初等变换

(1) 下面3种变换都叫做矩阵的初等行变换：

1° 对调两行(对调第 i 行与第 j 行，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$)；

2° 以非零数 k 乘某一行中所有元素(第 i 行乘 k，记为 kr_i)；

3° 把某一行所有元素 k 倍加到另一行对应的元素上去(第 i 行的 k 倍加到第 j 行，记为 $r_j + kr_i$).

(2) 类似可定义初等列变换，但所用记号"r"换成"c"，比如对调第3列与第5列，记为 $c_3 \leftrightarrow c_5$.

(3) 矩阵的初等行变换和初等列变换，统称为**矩阵的初等变换**.

2. 矩阵的等价

(1) 如果 $m \times n$ 矩阵 A 经过有限次初等变换，得到 $m \times n$ 矩阵 B，则称 A 与 B 等价，记为 $A \simeq B$.

(2) 等价是一种等价关系，即满足以下3个条件：

1° 自反性　$A \simeq A$；

2° 对称性　若 $A \simeq B$，则 $B \simeq A$；

3° 传递性　若 $A \simeq B$，$B \simeq C$，则 $A \simeq C$.

3. 初等方阵

(1) 下面3种方阵统称为**初等方阵**：

$$
I(i,j)=\begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&\\
&\ddots&&&&&&&\\
&&1&&&&&&\\
&&&0&\cdots&1&&&\\
&&&&1&&&&\\
&&&\vdots&\ddots&\vdots&&&\\
&&&&&1&&&\\
&&&1&\cdots&0&&&\\
&&&&&&1&&\\
&&&&&&&\ddots&\\
&&&&&&&&1
\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ (i)\\ \\ \\ \\ (j)\\ \\ \\ \\ \end{matrix},
$$

$$
I(i(k))=\begin{bmatrix}
1&&&&&\\
&\ddots&&&&\\
&&1&&&\\
&&&k&&\\
&&&&1&\\
&&&&&\ddots&\\
&&&&&&1
\end{bmatrix}(i)(k\neq 0),
$$

$$
I(j(k),i)=\begin{bmatrix}
1&&&&\\
&\ddots&&&\\
&&1&\cdots&k&&\\
&&&\ddots&\vdots&&\\
&&&&1&&\\
&&&&&\ddots&\\
&&&&&&1
\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ (i)\\ \\ (j)\\ \\ \\ \end{matrix}.
$$

(2) 初等方阵都是可逆阵，且它们的逆矩阵是同一类矩阵，即

$$[I(i,j)]^{-1}=I(i,j),$$

$$[I(i(k))]^{-1}=I(i(\frac{1}{k})),$$

$$[I(j(k),i)]^{-1}=I(j(-k),i).$$

(3) A 是 n 阶方阵，则 A 为可逆的充要条件是 A 可表成若干个初等方阵之积.

(4) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行(或列)变换，相当于 A 的左(或右)边乘一个 m(或 n)阶初等方阵.

(5) A 可逆的充要条件是 $A\simeq I$.

(6) A、B 都是 $m\times n$ 矩阵，则 $A\simeq B$ 的充要条件是存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q 使 $B=PAQ$.

4. 用初等行变换求逆矩阵

设 A 是 n 阶可逆阵，在 A 的右边拼一个 n 阶方阵，得分块阵 $[A \mid I]$，再对此 n

$\times 2n$ 矩阵进行若干次行初等变换，使 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{I}$，则右边 $\boldsymbol{I}$ 相应变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

例1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&4\\2&-1&0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 因为 $[\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{I}]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&1&4&0&1&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right]$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&-3&-8&0&-2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&-2&3&-2&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&6&-3&2\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&-2&3&-2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&-2&3&-2&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\4&-2&1\\-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

2.2　分块阵的初等变换

1. 初等分块方阵

下面5种矩阵都叫做初等分块方阵：

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_n\\\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{0}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{m\times m}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}_{n\times n}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_4=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{S}_{m\times n}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_5=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{R}_{n\times m}&\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 都是可逆阵.

类似地可定义分块阵的初等变换.

初等分块方阵都是可逆阵.

2. 初等分块方阵的性质

设　$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $\boldsymbol{A}_{m\times m},\boldsymbol{D}_{n\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n},\boldsymbol{C}_{n\times m}$，则

1° 用 $\boldsymbol{H}_1$ 左乘 $\boldsymbol{M}$，相当于交换 $\boldsymbol{M}$ 的两行，即

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}.$$

2° 用 H_2 左乘 M，相当于 M 的第一行元素都左乘 P、其它元素不变，即

$$H_2M = \begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}.$$

类似有

$$H_3M = \begin{bmatrix} A & B \\ QC & QD \end{bmatrix}.$$

3° 用 H_4 左乘 M 相当于 M 第二行左乘 S 加到第一行上去，即

$$H_4M = \begin{bmatrix} A+SC & B+SD \\ C & D \end{bmatrix}.$$

类似有

$$H_5M = \begin{bmatrix} A & B \\ C+RA & D+RB \end{bmatrix}.$$

4° 如果右乘初等分块方阵，相当于对 M 作列变换．

3. 用分块阵的初等变换求分块阵的逆

用分块阵的初等变换可求分块阵的逆．方法与例 1 类似．

例 2 设 $B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$，其中 A、D 分别为 n 阶与 m 阶可逆阵，求 B^{-1}.

解 因为 $\left[\begin{array}{cc:cc} A & 0 & I_n & 0 \\ C & D & 0 & I_m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:cc} I_n & 0 & A^{-1} & 0 \\ C & D & 0 & I_m \end{array}\right]$

$$\to \left[\begin{array}{cc:cc} I_n & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & D & -CA^{-1} & I_m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:cc} I_n & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & I_m & -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{array}\right].$$

那么

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

2.3 矩阵的秩

1. 概念与性质

(1) 设 A 是 $m \times n$ 非零矩阵，若 A 中存在一个 r 阶子式不等于零，而一切 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)都等于零．则称矩阵 A 的秩为 r，记为 $R(A)=r$.

若 $A=0$，规定 $R(A)=0$.

(2) 秩是反映矩阵特征的一个数，它具有以下几个性质：

1° $R(A^T) = R(A) = R(\overline{A})^T = R(\overline{A^T}A) = R(A\overline{A^T})$;

2° $R(kA) = R(A)$，其中 $k \neq 0$，特别有 $R(A) = R(-A)$;

3° $R(A \pm B) \leqslant R(A) + R(B)$;

4° $R(A_{m\times n}) \leqslant \min\{m, n\}$;

5° 设 A，B 分别为 $m \times n$ 与 $n \times s$ 矩阵，则

$$R(A) + R(B) - n \leqslant R(AB) \leqslant \min\{R(A), R(B)\};$$

6° $A \simeq B$ 的充要条件是 $R(A)=R(B)$；

7° 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，P,Q 分别为 m 阶与 n 阶可逆阵，则

$$R(A)=R(PA)=R(AQ)=R(PAQ);$$

8° 设 A 是 n 阶方阵，则

$$R(A^*)=\begin{cases}R(A), & \text{当 } R(A)=n \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } R(A)=n-1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } R(A)<n-1 \text{ 时};\end{cases}$$

9° $R(A\otimes B)=[R(A)]\cdot[R(B)]$；

10° 设 $A=\begin{bmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m\end{bmatrix}$ 是准对角阵，则

$$R(A)=\sum_{i=1}^{m}R(A_i);$$

11° 设 A 是 n 阶方阵，则 A 可逆的充要条件是 $R(A)=n$.

2. 矩阵秩的求法

(1) 如果一个矩阵 A，它的任一行从第一个元素起至该行的第一个非零元素所在下方全为零；如果该行全为零，则它的下面全为零，则称 A 为**阶梯形矩阵**．比如下面的矩阵都是阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}.$$

(2) 任意一个矩阵经过一系列初等行变换总能变成阶梯形矩阵．

(3) 阶梯形矩阵的秩等于它不为零的行数．

利用上述事实可求矩阵的秩．

例3　设 $A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 2 & 6 & -6\\ 1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 6 & -3 & 6 & 4\end{bmatrix}$，求 $R(A)$.

解　对 A 施行初等行变换，使它变成阶梯形矩阵，即

$$A\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6\\ 3 & -6 & -3 & 6 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

所以

$$R(A)=2.$$

例4　设 A,B 都是 n 阶方阵，$R(A+B)=R(A-B)=n$，$D=\begin{bmatrix}A & B\\ B & A\end{bmatrix}$，求

$R(D)$.

解 对分块阵进行初等变换.

因为 $R(A+B)=R(A-B)=n$,因此 $A+B$ 与 $A-B$ 都是可逆阵.那么

$$D=\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I & I \\ B & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & A-B \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A-B \end{bmatrix}$$

所以

$$R(D)=R(I)+R(A-B)=n+n=2n.$$

3. 矩阵的等价标准形

设 A 是 $m\times n$ 矩阵,则存在 m 阶可逆阵 P 与 n 阶可逆阵 Q,使

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $r=R(A)$.上式右端称为**矩阵 A 的等价标准形**.

3 方阵的特征值与特征向量

3.1 概 念

1. 特征值

设 A 是数域 F 上 n 阶方阵,称 $\lambda I-A$ 为 A 的**特征矩阵**,称 $|\lambda I-A|$ 为 A 的**特征多项式**.$|\lambda I-A|=0$ 在 F 中的根都称为 A 的**特征值**或**特征根**.

若 F 是复数域,则 A 一定有 n 个特征值.若 F 是实数域,A 最多有 n 个特征值.

2. 特征向量

(1) 设 λ_0 是 A 的一个特征值,线性方程组 $(\lambda_0 I-A)x=0$ 的非零解,称为 **A 属于特征值 λ_0 的特征向量**.

例1 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$

所以 A 的 3 个特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda=-1$ 时,由 $((-1)I-A)x=0$,得基础解系

$$\alpha_1=[1\ 0\ 1]^{\mathrm{T}},$$

因此 A 属于特征值 $\lambda=-1$ 的全部特征向量为 $k\alpha$,其中 k 为任意非零常数.

当 $\lambda=2$ 时，由 $(2I-A)x=0$，得基础解系

$$\alpha_2=[0\ 1\ -1]^T,\quad \alpha_3=[1\ 0\ 4]^T,$$

因此 A 属于特征值 $\lambda=2$ 的全部特征向量为 $m\alpha_2+l\alpha_3$，其中 m,l 为不同时为零的任意非零常数．

3. 相似矩阵

(1) 设 A,B 都是 n 阶方阵，若存在可逆阵 T，使 $B=T^{-1}AT$，则称 A 与 B 为相似矩阵，记为 $A\sim B$．

(2) 相似是一种等价关系，即

1° $A\sim A$；

2° 若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$；

3° 若 $A\sim B$，则 $B\sim A$．

(3) 设 $D_1=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$，$D_2=\begin{bmatrix}A_2 & 0\\ 0 & B_2\end{bmatrix}$，若 $A_1\sim A_2$，$B_1\sim B_2$ 则 $D_1\sim D_2$．

(4) 若 $A\sim B$，$g(x)$ 是任意多项式，则 $g(A)\sim g(B)$．

3.2　特征值与特征向量的性质

1. 特征值的性质

(1) 设 $A\sim B$，则 A 与 B 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值．

(2) 设 A 是 n 阶方阵，则 $A\sim A^T$，从而它们有相同的特征值．

(3) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 $A=[a_{ij}]$ 的全部特征值，则

1° $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$；

2° $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$；

3° A 可逆的充要条件为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都不为零．

4° 设 $g(x)$ 是任意多项式，那么 $g(A)$ 的全部特征值为 $g(\lambda_1),g(\lambda_2),\cdots,g(\lambda_n)$．

5° 当 A 可逆时，则 A^{-1} 的 n 个特征值为 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$．

6° 当 $R(A)=n$ 时，A^* 的全部特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$．

当 $R(A)=n-1$ 时，A^* 的全部特征值为 $A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn},0,\cdots,0$，其中 A_{ij} 为 $|A|$ 的代数余子式．

当 $R(A)<n-1$ 时，A^* 的全部特征值为 $0,0,\cdots,0$．

7° 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，且 $m\geqslant n$，则

$$|\lambda I-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda I-BA|,$$

这就是说 AB 与 BA 有相同的非零特征值．

例2　设 $D=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$，求 D 的全部特征值．

解 因为 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{AB}$,其中

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=[a_1\ a_2\cdots\ a_n]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}=[b_1\ b_2\cdots\ b_n].$$

那么

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB}|=\lambda^{n-1}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{BA}|$$
$$=\lambda^{n-1}[\lambda-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)],$$

所以 $\boldsymbol{D}$ 的全部特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,$$
$$\lambda_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

2. 矩阵特征值的估计

(1) 盖氏圆 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$是 n 阶复方阵,称

$$D_i(\boldsymbol{A})=\left\{z\,\middle|\,|z-a_{ii}|\leqslant R_i,R_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right\},(i=1,2,\cdots,n)$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个盖氏(盖斯戈林(Gerschgorin))圆

(2) **圆盘定理 1** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵,λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,则 $\lambda\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}D_i(\boldsymbol{A})$,其中 $D_i(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个盖氏圆.

这就是说,每一特征值必位于这 n 个盖氏圆内.

(3) **圆盘定理 2** 设在 $\boldsymbol{A}$ 的盖氏圆中,有 s 个盖氏圆盘组成一个连通域,且与其它 $n-s$ 个圆盘隔开,则在此连通域中恰有 s 个 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(4) 谱半径 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,称

$$\rho(\boldsymbol{A})=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径.

(5) $\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\max\limits_{j}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)=c_1,$

$$\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\max_{i}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)=c_2.$$

其中 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$,$c_1$ 为列和范数,c_2 为行和范数.

例 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0.1&0.2&0.3\\0.5&3&0.1&0.2\\1&0.3&-1&0.5\\0.2&0.3&0.1&-4\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的所有盖氏圆列和范数与行和范数,并估计特征值的分布,以及谱半径的上界.

解 因为

$$D_1(\boldsymbol{A})=\{z\,|\,|z-1|\leqslant0.6\},\quad D_2(\boldsymbol{A})=\{z\,|\,|z-3|\leqslant0.8\},$$
$$D_3(\boldsymbol{A})=\{z\,|\,|z+1|\leqslant1.8\},\quad D_4(\boldsymbol{A})=\{z\,|\,|z+4|\leqslant0.6\}.$$

所以 $c_1=5,c_2=4.6.$

由于 $D_1(\boldsymbol{A})$与 $D_3(\boldsymbol{A})$构成一个连通域,因此在这两个圆盘内有 $\boldsymbol{A}$ 的 2 个特征值.在 $D_2(\boldsymbol{A})$与 $D_4(\boldsymbol{A})$中各有 $\boldsymbol{A}$ 的 1 个特征值.

谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})\leqslant4.6.$

3. 特征向量的性质

(1) 不同特征值的相应特征向量是线性无关的．

(2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵的充分必要条件是它有 n 个线性无关的特征向量．若存在可逆阵 $\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n]$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\mathrm{diag}[\lambda_1\ \lambda_1\cdots\ \lambda_n]$，那么 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征向量，$\boldsymbol{T}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为相应于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量．

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵，则不同特征值的特征向量是彼此正交的(从而也是线性无关的)．

(4) 设 λ_0 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，则

$$V_{\lambda_0}=\{\boldsymbol{\alpha}\in P^{n\times 1}\mid \boldsymbol{A\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}\}$$

构成数域 P 上线性空间，称为特征子空间．且

$$\dim V_{\lambda_0}=n-R(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}),$$

并称 $\dim V_{\lambda_0}$ 为**特征值** λ_0 **的几何重数**．而且几何重数不超过**特征值** λ_0 **的代数重数**(特征根的重数)．

例4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&&\\&2&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&2\end{bmatrix}_{n\times n}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，并指出它的几何重数与代数重数．

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^n$，故 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=2$. 即特征值 2 的代数重数为 n. 但

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix},\quad R(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-1,$$

$$\dim V_2=n-R(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-(n-1)=1.$$

因此特征值 2 的几何重数为 1.

4 复方阵的相似标准形

4.1 特征矩阵的标准形

1. 初等变换

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等变换是指下面 3 种之一：

1° 交换两行(或列)；

2° 用非零常数 k 乘某一行(或列)；

3° 把第 j 行(或列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到第 i 行(或列)上去，其中 $\varphi(\lambda)$ 为 λ 的多项

式.

2. 等价

特征矩阵 $\lambda I - A$ 经过若干次初等变换得到新矩阵 $B(\lambda)$,则称 $\lambda I - A \simeq B(\lambda)$.

3. 史密斯标准形

设 A 是 n 阶方阵,则

$$\lambda I - A \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{4-1}$$

其中 $d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,n)$是首项系数为 1 的多项式,且

$$d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) \quad (i=1,2,\cdots,n-1).$$

称(4-1)式右端为 $\lambda I - A$ 的**史密斯标准形**,并称 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 为 $\lambda I - A$ 的**不变因子**.

例 1 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$,求 $\lambda I - A$ 的标准形与不变因子.

解 $\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & -8 \\ -3 & \lambda+1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & -8 \\ -1 & \lambda+1 & \lambda-1 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{bmatrix}$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda-3 & 0 & -8 \\ -2 & 0 & \lambda+5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & \lambda+1 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda^2-4\lambda-5 \\ 0 & 2\lambda+2 & 3\lambda+3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda-3) & \lambda^2-4\lambda-5 \\ 0 & \lambda+1 & \frac{3}{2}(\lambda+1) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & \frac{3}{2}(\lambda+1) \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda-3) & \lambda^2-4\lambda-5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix} = B(\lambda).$$

则 $B(\lambda)$为 $\lambda I - A$ 的史密斯标准形,它的不变因子为 $1, \lambda+1, (\lambda+1)^2$.

4. 矩阵相似的条件

设 A, B 都是 n 阶方阵. 那么

1° $A \sim B$ 的充分必要条件是 $\lambda I - A \simeq \lambda I - B$;

2° $A \sim B$ 的充分必要条件是 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 有相同的不变因子.

4.2 方阵的约当标准形

1. 初等因子

(1) 设 A 是 n 阶方阵,$\lambda I - A$ 的不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$,把其中

次数大于零的 $d_i(\lambda)$ 分解为互不相同的一次因式的方幂的乘积,所有这些一次因式的方幂(相同的必须按出现次数计算),称为 A 的初等因子.

(2) $A \sim B$ 的充要条件是 A 与 B 有相同的初等因子(若不计它们顺序).

2. 约当标准形

(1) 约当块 称

$$J_0=\begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{bmatrix}_{n\times n}$$

为约当块.则

$$1^\circ\ \lambda I - J_0 \simeq \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda-a)^n \end{bmatrix};$$

2° $\lambda I - J_0$ 的不变因子为 $1,\cdots,1,(\lambda-a)^n$;

3° J_0 的初等因子为 $(\lambda-a)^n$.

(2) 约当型矩阵.

1° 称准对角阵

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

为约当型矩阵,其中 $J_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是 $n_i\times n_i$ 的约当块.

2° J 的初等因子为 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$,其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为约当块 J_i 的对角元.

(3) 约当标准形.

任何 n 阶复方阵 A 都相似于一个约当型矩阵,且在不计约当块顺序的意义下是唯一的.

这就是方阵相似标准形.即 $A\in C^{n\times n}$,存在 n 阶可逆阵 T,使 $T^{-1}AT=J$,其中 J 为约当型矩阵.并称 J 为 A 的约当标准形.

例2 设 $A=\begin{bmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{bmatrix}$,求 A 的约当标准形及相应的变换矩阵 T.

解 因为

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-17 & 0 & 25 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ -9 & 0 & \lambda+13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda+8 & 0 & 25 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ \lambda+4 & 0 & \lambda+13 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}4 & 0 & -\lambda+12\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ \lambda+4 & 0 & \lambda+13\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -\dfrac{\lambda}{4}+3\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ \lambda+4 & 0 & \lambda+13\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-3)(\lambda-2)^2\end{bmatrix}.$$

所以 A 的初等因子为 $\lambda-3,(\lambda-2)^2$.因此 A 的约当标准形为

$$J=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

再求 T. 设 $T=[X_1,X_2,X_3]$,由 $T^{-1}AT=J$,那么 $A[X_1,X_2,X_3]=[X_1,X_2,X_3]J$,所以得

$$AX_1=3X_1,\quad AX_2=2X_2,\quad AX_3=X_2+2X_3.$$

分别解齐次线性方程组

$$(3I-A)X_1=0,\quad (2I-A)X_2=0,$$

得　$X_1=[0\ 1\ 0]^T,X_2=[5\ 0\ 3]^T$.将 X_2 代入

$$(2I-A)X_3=-X_2,$$

解得　$X_3=[2\ 0\ 1]^T$,故所求变换矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}0 & 5 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

5　方阵相似于对角阵的条件

5.1　最小多项式

1. 概念

(1) 零化多项式　设 A 是方阵,若存在数域 F 上多项式 $g(x)$,使 $g(A)=0$,则称 $g(x)$ 以 A 为根,并称 $g(x)$ 是 A 的一个零化多项式.

(2) 最小多项式　设 A 是方阵,在以 A 为根的多项式中,次数最低的首项系数为1的多项式,称为 A 的**最小多项式**.

2. 性质

(1) **凯莱-哈密顿定理**　设 A 是 n 阶方阵,令 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$,则 $f(A)=0$.即 $f(\lambda)$ 是 A 的一个零化多项式.

(2) 设 A 是 n 阶方阵,若 $\varphi(x)$ 是 A 的最小多项式,$g(x)$ 是 A 的零化多项式,则 $\varphi(x)$ 可以整除 $g(x)$.

(3) 相似矩阵有相同的最小多项式．

(4) **存在唯一性定理** 设 A 是 n 阶方阵，$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$是 $\lambda I-A$ 的不变因子，$\varphi(x)$是 A 的最小多项式，则

1° $\varphi(\lambda)=d_n(\lambda)$；

2° $|\lambda I-A|=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$，从而 $\varphi(\lambda)$是特征多项式的因式；

3° 特征多项式$|\lambda I-A|$与最小多项式 $d_n(\lambda)$有相同的根集，它们的根仅只可能是重数不同．

(5) 设 A 为准对角阵，即

$$A=\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{bmatrix},$$

$\varphi(\lambda)$为 A 的最小多项式，$g_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,s)$为 B_i 的最小多项式．则

$$\varphi(\lambda)=[g_1(\lambda)\ \ g_2(\lambda)\ \ \cdots\ \ g_s(\lambda)],$$

其中$[g_1(\lambda)\ \ g_2(\lambda)\ \ \cdots\ \ g_s(\lambda)]$表示它们的最小公倍式．

2. 求法

例1 求 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$的最小多项式．

解 可以将 $\lambda I-A$ 化为史密斯标准形，求最后一个不变因子 $d_3(\lambda)$即可．也可先求出 A 的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\lambda^3.$$

设 $\varphi(\lambda)$是 A 的最小多项式，由于 $\varphi(\lambda)$是 λ^3 的因式，从而只有 3 种可能，即 $\lambda,\lambda^2,\lambda^3$，经验算知 $A^2=0$. 因此 $\varphi(\lambda)=\lambda^2$.

5.2 复方阵相似于对角阵的条件

1. 充要条件

(1) 方阵 A 相似于对角阵的充要条件是A 的初等因子都是一次式．

(2) 方阵 A 相似于对角阵的充要条件是它的最小多项式无重根．

(3) 方阵 A 相似于对角阵的充要条件是它的每一个特征值的几何重数都等于它的代数重数．

(4) n 阶方阵A 相似于对角阵的充要条件是它有 n 个线性无关的特征向量．

2. 充分条件

下面两个条件具有广泛的应用：

(1) 设 $g(\lambda)$是 n 阶方阵A 的零化多项式，若 $g(\lambda)$无重根，则 $A\sim\mathrm{diag}[\lambda_1\ \lambda_2\cdots\lambda_n]$，其中 $g(\lambda_i)=0(i=1,2,\cdots,n)$.

例2 设 n 阶方阵A 满足$A^2+A+I=0$，证明 A 相似于对角阵．

证 因为 $g(\lambda)=\lambda^2+\lambda+1$ 为 A 的零化多项式，又 $g(\lambda)$ 无重根．所以 A 相似于对角阵 $\mathrm{diag}[\lambda_1\ \lambda_2\cdots\ \lambda_n]$．又

$$\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1),$$

因此 A 的特征根都是 $g(\lambda)$ 的根，从而

$$\lambda_k=\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

(2) 设 A 是正规方阵，即 $A\overline{A}^{\mathrm{T}}=\overline{A}^{\mathrm{T}}A$，则 A 相似于对角阵．

5.3 一些常见的相似于对角阵的矩阵

1. 幂等阵

(1) 若 $A^2=A$，则称 A 为**幂等阵**．

(2) 幂等阵 A 相似于对角阵

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

其中 $r=R(A)$．

2. 幂幺阵

(1) 若存在自然数 m，使 $A^m=I$，则称 A 为**幂幺阵**．

(2) 幂幺阵相似于对角阵 $\mathrm{diag}[\lambda_1\ \lambda_2\cdots\ \lambda_n]$，其中 $\lambda_i^m=1(i=1,2,\cdots,n)$．

3. 酉矩阵

(1) 若 $A\overline{A}^{\mathrm{T}}=\overline{A}^{\mathrm{T}}A=I$，则称 A 为**酉矩阵**．

(2) 酉矩阵相似于对角阵 $\mathrm{diag}[\lambda_1\ \lambda_2\cdots\ \lambda_n]$，其中 $|\lambda_i|=1(i=1,2,\cdots,n)$

(3) 实酉矩阵 A 称为正交阵，即 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=I$．

(4) 正交阵相似于对角阵，正交阵的特征值的模等于 1．

4. 置换阵

(1) 每行每列只有一个 1，其余元素均为 0 的 n 阶方阵，称为**置换阵**．

(2) 置换阵是幂幺阵，从而置换阵相似于对角阵，其特征值是单位根．

5. 循环阵

(1) 形如下面的方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

称为**循环阵**．

(2) 循环阵 A 相似于对角阵

$$\mathrm{diag}[f(1)\ \ f(\omega)\ \ \cdots\ \ f(\omega^{n-1})]$$

其中 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$．

6. 阿达马(Hadamard)矩阵

(1) 设 $H=[a_{ij}]$是 n 阶方阵，其中 $a_{ij}=1$ 或 $-1(i,j=1,2,\cdots,n)$，且 $HH^{\mathrm{T}}=nI$，则称 H 是阿达马矩阵.

(2) 阿达马矩阵相似于对角阵.

7. 埃尔米特(Hermite)矩阵

(1) 若$\overline{A}^{\mathrm{T}}=A$，则称 A 为埃尔米特矩阵.

实埃尔米特矩阵就是实对称阵.

(2) 埃尔米特阵相似于对角阵 $\mathrm{diag}[\lambda_1\ \lambda_2\cdots\ \lambda_n]$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为实数.

(3) 设 A 为实对称阵，则存在正交阵 P，使

$$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}[\lambda_1\ \lambda_2\cdots\ \lambda_n],$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为实数.

8. 反埃尔米特阵

(1) 若$\overline{A}^{\mathrm{T}}=-A$，则称 A 为反埃尔米特阵.

实反埃尔米特阵就是实反对称阵.

(2) 反埃尔米特阵(或实反对称阵)都相似于对角阵.

6 广义逆矩阵

6.1 减号广义逆

1. 定义

设 A 是$n\times m$ 复矩阵，若存在 $m\times n$ 复矩阵 X，使 $AXA=A$ 成立，则称 X 为 A 的一个减号广义逆，简称减号逆.

令 $A\{1\}$表示 A 的减号逆全体所成之集.

2. 存在性

若 $A\{1\}\neq\varnothing$，那么

(1) 当 $A=0_{m\times n}$时，则 $A\{1\}=\mathbf{C}^{m\times m}$.

(2) 当 $R(A)=r>0$ 时，设 A 的等价标准形为

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

其中 A 是$m\times n$ 矩阵，P 是m 阶可逆阵，Q 是n 阶可逆阵，则

$$A\{1\}=\left\{Q\begin{bmatrix} I_r & *\\ * & *\end{bmatrix}P \;\middle|\; *\text{为任意复矩阵}\right\}.$$

由此可见 $A\{1\}$一般是无限集，它的元素常记为$A^-,A_1^-,A_2^-,\cdots$.

例1 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$，求 $A\{1\}$.

解　在 A 的右方与下方各拼一个单位阵，用来记录所作的行初等变换与列初等变换．再将 A 化成标准形，得

$$\begin{bmatrix} A & I_2 \\ I_3 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -2 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 2 & 4 & 1 & & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -7 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 2 & 1 & 4 & & \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -7 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 2 & 1 & 4 & & \end{bmatrix}.$$

令

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

那么 $PAQ = [I_2 \quad 0]$，

$$A\{1\} = \left\{ Q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix} P \,\middle|\, * \text{为任意复数} \right\}.$$

3. 性质

(1) $A\{1\}$ 为单元素集的充要条件是 A 为方阵，且 $|A| \neq 0$. 此时 $A\{1\} = \{A^{-1}\}$.

(2) $R(A) \leqslant R(A^-)$.

(3) $R(AA^-) = R(A^-A) = R(A)$.

6.2　加号广义逆

1. 定义

设 A 是 $m \times n$ 复矩阵，若存在 $n \times m$ 复矩阵 X，满足

1° $AXA = A$；

2° $XAX = X$；

3° $\overline{(AX)}^{\mathrm{T}} = AX$；

4° $\overline{(XA)}^{\mathrm{T}} = XA$.

则称 X 为 A 的一个加号广义逆,或穆尔-彭罗斯(Moore-Penrose)逆,简称加号逆,记为 A^+. 由此有

$$AA^+A=A,\quad A^+AA^+=A^+,\quad \overline{(AA^+)}^T=AA^+,\quad \overline{(A^+A)}^T=A^+A.$$

$A^+\in A\{1\}$,从而具有减号逆的一切性质.

2. 存在唯一性

(1) 若 A 的加号逆存在,则一定唯一.

(2) $0^+=0$.

(3) 设 A 是 $n\times m$ 矩阵,$R(A)=r>0$,设 A 的满秩分解(见 7 章)为 $A=PQ^T$,其中 P,Q^T 分别为 $n\times r$ 与 $r\times m$ 矩阵,且 $r=R(P)=R(Q^T)$. 则

$$A^+=Q(Q^TQ)^{-1}(P^TP)^{-1}P^T.$$

例 2　设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&0\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}$,求 A^+.

解　仿例 1 的方法,可求得可逆矩阵 P_1 与 Q_1,使得

$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix}I_2&0\\0&0\end{bmatrix},$$

其中 $R(A)=2$,

$$P_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&-\frac{1}{2}&0&0\\-1&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},\quad Q_1=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

则
$$A=P_1^{-1}\begin{bmatrix}I_2&0\\0&0\end{bmatrix}Q_1^{-1}=PQ^T,$$

其中
$$P=P_1^{-1}\begin{bmatrix}I_2\\0\end{bmatrix},\quad Q^T=[I_2\ 0]Q_1^{-1}.$$

所以

$$A^+=Q(Q^TQ)^{-1}(P^TP)^{-1}P^T=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}2&3&-1&1\\8&2&6&-6\\-2&-3&1&1\end{bmatrix}.$$

3. 性质

(1) $(A^+)^+=A$;

(2) $(A^T)^+=(A^+)^T$;

(3) $A^+=(A^TA)^+A^T$;

(4) $A^+=A^T(AA^T)^+$;

(5) $R(A)=R(A^+)$;

(6) $(A\otimes B)^+=A^+\otimes B^+$.

6.3 线性方程组的通解公式

(1) 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵,令 $N(A)$ 为齐次线性方程组的解空间,则

$$N(A)=\{(I-A^{+}A)u\mid u\in\mathbf{R}^{n\times 1}\}.$$

(2) 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵,且非齐次线性方程组 $AX=B$ 有解,并设其解集为 M,则

$$M=\{A^{+}B+(I-A^{+}A)u\mid u\in\mathbf{R}^{n\times 1}\}.$$

由此可见 M 是单元素集(即 $AX=B$ 有唯一解,$M=\{A^{+}B\}$)的充要条件是 $R(A)=n$,或 $I=A^{+}A$.

(3) 设 A,B 分别为 $m\times n$ 与 $s\times t$ 实矩阵,称 $AXB=0$ 为齐次矩阵方程,设 $N(A,B)$ 为它的解空间,则

$$N(A,B)=\{Y-A^{+}AYBB^{+}\mid Y\in\mathbf{R}^{n\times s}\}.$$

(4) 设 $AXB=D$ 是非齐次矩阵方程,其解集为 M,则

1° $M\neq\varnothing$ 的充要条件是 $AA^{+}DB^{+}B=D$;

2° 当 $M\neq\varnothing$ 时,有

$$M=\{A^{+}DB^{+}+Y-A^{+}AYBB^{+}\mid Y\in\mathbf{R}^{n\times s}\}.$$

7 矩阵的分解

矩阵的分解是指将一个已知矩阵表示成若干个特殊矩阵的积或和.

7.1 分解为积的情况

1. 满秩分解

设 A 是 $n\times m$ 矩阵,$R(A)=r$,则 $A=BC$,其中 B、C 分别为 $n\times r$ 与 $r\times m$ 矩阵,且 $R(B)=R(C)=r$.

2. 极分解

设 A 是 n 阶实可逆阵,则 $A=BC$(或 $A=C_1B_1$),其中 B(或 B_1)是 n 阶正定阵,C(或 C_1)是 n 阶正交阵.

3. QR 分解

设 A 是 n 阶实可逆阵,则 $A=BC$,其中 B 是 n 阶正交阵,C 为主对角元全为正的上三角阵.

4. 楚列斯基(Cholesky)分解(双三角分解)

设 A 是 n 阶正定阵,则 $A=B^{\mathrm{T}}B$,其中 B 为主对角元全为正的上三角阵.

5. 沃斯(Voss)分解(双对称分解)

设 A 是 n 阶复方阵,则 $A=BC$,其中 $B^{\mathrm{T}}=B$,$C^{\mathrm{T}}=C$,且 B,C 中至少有一个是可逆阵.

6. LR 分解

设 A 的各阶顺序主子式都不等于 0,则 $A = BC$,其中 B 为主对角元全是 1 的下三角矩阵,C 为上三角矩阵.

7. LDR 分解

设 A 的各阶顺序主子式都不等于 0,则 $A = BDC$,其中 B 为主对角元全是 1 的下三角矩阵,C 为主对角元全是 1 的上三角矩阵,D 为对角阵.

8. 奇异值分解

设 A 为 $n \times m$ 实矩阵,$R(A) = r$.则 $A = BDC$,其中 B,C 分别为 n 阶与 m 阶正交阵,

$$D = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \mathrm{diag}[\, d_1 \ d_2 \cdots \ d_r \,]$$

而 $d_i = \sqrt{\lambda_i}\,(i = 1,2,\cdots,r)$,$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0$ 是矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的非零特征值(称为奇异值).

7.2 分解为和的情况

1. 谱分解

设 n 阶方阵 A 相似于对角阵,则 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$,其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值(也称为谱),$A_i = \alpha_i \beta_i^{\mathrm{T}}(i = 1,2,\cdots,n)$,而 α_i 为 A 属于特征值 λ_i 的特征向量.β_i 为 A^{T} 属于 $\lambda_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的特征向量.

2. 对称与反对称分解

设 A 是 n 阶方阵,则 $A = B + C$,其中 B 是对称阵,C 是反对称阵.

3. 幂零对角分解

设 A 是 n 阶复方阵,则 $A = B + C$,其中 B 相似于对角阵,C 为幂零阵(即存在 $m \in N$,使 $C^m = 0$),且 $BC = CB$.

8 矩阵的范数

8.1 向量的范数

1. 定义

设 V 是数域 $\mathbf{R}$ 的线性空间,映射 $\sigma: V \to \mathbf{R}$ 如下:

$$\sigma(x) = \| x \|, \quad \forall x \in V,$$

如果满足

1° 非负性 $\forall x \in V$ 都有 $\| x \| \geqslant 0$;当且仅当 $\| x \| = 0$ 的充要条件是 $x = 0$.

2° 齐次性 $\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$, $\forall k \in \mathbf{R}, x \in V$.

3° 三角不等式 $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$.

则称实数 $\|x\|$ 为**向量 x 的范数**.

2. 性质

设 $\|x\|$ 是线性空间 V 的向量范数,则

1° $\|x\| = \|-x\|$, $\forall x \in V$;

2° $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$, $\forall x, y \in V$.

3. 几种重要的向量范数

设 $V = \mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbf{R}\}$,令 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,则有

1° 1- 范数:$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$;

2° 2- 范数:$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

3° ∞ - 范数:$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$;

4° p- 范数:$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$,其中 p 是自然数.

4. 向量范数之间关系

设 $V = \mathbf{R}^n$, $\|x\|_\alpha$ 和 $\|x\|_\beta$ 为任意两种向量范数,则存在正数 c_1, c_2,使 $c_1\|x\|_\beta \leqslant \|x\|_\alpha \leqslant c_2\|x\|_\beta$.

8.2 矩阵的范数

1. 定义

设 $\mathbf{C}^{m\times n}$为一切 $m \times n$ 矩阵,若映射 $\sigma: \mathbf{C}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ 如下:

$$\sigma(A) = \|A\|,$$

满足

1° 非负性 $\|A\| \geqslant 0$,当且仅当 $\|A\| = 0$ 时 $A = \mathbf{0}$.

2° 齐次性 $\|kA\| = |k| \cdot \|A\|$, k 为任意复数.

3° 三角不等式 $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

4° 矩阵乘法相容性 $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$,其中 A, B 可乘.

则称实数 $\|A\|$ 为**矩阵 A 的范数**.

2. 几种重要的矩阵范数

设 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{C}^{m\times n}$,则有

1° 列和范数:$\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\right)$;

2° 谱范数:$\|A\|_2 = \max_j (\lambda_j(A^H A))^{\frac{1}{2}}$,

其中 $A^H = \overline{A^T}$, $\lambda_j(A^H A)$ 表示矩阵 $A^H A$ 的第 j 个特征值.

3° 行和范数：$\| A \|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \right)$；

4° 弗罗尼乌斯(Frobenius) 范数：$\| A \|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

3. 矩阵范数之间关系

设 $\| A \|_\alpha$，$\| A \|_\beta$ 是任意两种矩阵范数，则存在两个正数 c_1, c_2，使

$$c_1 \| A \|_\beta \leqslant \| A \|_\alpha \leqslant c_2 \| A \|_\beta.$$

8.3　矩阵的谱半径

1. 定义

设 $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值，称

$$\rho(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (| \lambda_i |)$$

为 A 的谱半径.

2. 性质

(1) $\rho(A) \leqslant \| A \|$，其中 $\| A \|$ 是 A 的任意一种范数.

(2) 设 A 是正规矩阵(即 $\overline{A}^{\mathrm{T}} A = A \overline{A}^{\mathrm{T}}$)，则

$$\rho(A) = \| A \|_2,$$

其中 $\| A \|_2$ 是谱范数.

9　矩阵的极限、微分与积分

9.1　矩阵的极限

1. 定义

设矩阵序列 $\{A_n\}$，其中 $A_n = [a_{ij}^{(n)}] \in \mathbf{C}^{m \times n}$，如果满足

$$\lim_{n \to \infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots m; j = 1,2,\cdots,n),$$

则称此矩阵序列有极限 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{C}^{m \times n}$，记为 $\lim_{n \to \infty} A_n = A$. 并称矩阵序列 $\{A_n\}$ 是收敛的. 否则称矩阵序列 $\{A_n\}$ 是发散的.

例 1　判断下面矩阵序列的敛散性：

① $A_n = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{n} & 2 - \frac{1}{n^2} \\ 1 + \mathrm{i} & 5 \end{bmatrix}$，　$n = 1,2,\cdots$

② $B_n = \begin{bmatrix} 5 + \mathrm{i} & \frac{2n^2 + 1}{n} & 3 + \frac{1}{n} \end{bmatrix}$，　$n = 1,2,\cdots$

解 ① $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1+\mathrm{i} & 5 \end{bmatrix}$.

② 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n} = \infty$，因此矩阵序列 $\{\boldsymbol{B}_n\}$ 是发散的.

2. 性质

(1) 收敛的矩阵序列的极限是唯一的.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} \| \boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{A} \| = 0$，其中矩阵范数 $\| \boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{A} \|$ 为任何一种范数.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}$，$\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{B}$，则

$\lim\limits_{n\to\infty} (k\boldsymbol{A}_n + l\boldsymbol{B}_n) = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{B}$,

其中 k, l 为数.

(4) 设 $\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{B}_n \in \mathbf{C}^{m\times m}(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}$，$\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{B}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.$$

(5) 设 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{A}_n \in \mathbf{C}^{m\times m}(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$.

(6) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_n(n=1,2,\cdots)$ 均可逆，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n = \mathbf{0}$ 的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$，其中 $\rho(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径.

9.2 函数矩阵的导数与微分

1. 函数矩阵的极限与连续

(1) 函数矩阵　$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}(x) = [a_{ij}(x)]$ 称为**函数矩阵**，其中 $a_{ij}(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的实函数 $(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$.

(2) 极限　设 $\boldsymbol{A}(x) = [a_{ij}(x)]$ 是定义在 $[a,b]$ 上的 $m\times n$ 函数矩阵，如果 $x_0 \in [a,b]$，有

$$\lim_{x\to x_0} a_{ij}(x) = a_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n),$$

则称 $\boldsymbol{A}(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极限 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{A}$.

例如，设 $\boldsymbol{A}(x) = \begin{bmatrix} x-1 & \sin x & \tan x \\ \cos x & x^2+1 & 1-\cos x \end{bmatrix}$，则

$$\lim_{x\to 0} \boldsymbol{A}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) 连续　设 $\boldsymbol{A}(x) = [a_{ij}(x)]$ 是定义在 $[a,b]$ 上的 $m\times n$ 函数矩阵，如果 $x_0 \in [a,b]$，且

$$\lim_{x\to x_0} a_{ij}(x) = a_{ij}(x_0) \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots n),$$

$$\boldsymbol{A}(x_0) = [a_{ij}(x_0)]_{m\times n}.$$

则称 $\boldsymbol{A}(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 否则就称 $\boldsymbol{A}(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续.

例如，$A(x)=[a_1(x)\ \ a_2(x)]$，其中

$$a_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$
$$a_2(x)=1,$$

那么 $A(x)$在 $x=0$处不连续.因为

$$\lim_{x\to 0}A(x)=[1\ \ 1]\quad 而\quad A(0)=[0\ \ 1].$$

2. 函数矩阵的导数

(1) 定义　设 $A(x)=[a_{ij}(x)]$是定义在$[a,b]$上的 $m\times n$ 矩阵，如果所有元

$$a_{ij}(x)\ \ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

在 $x=x_0(x_0\in[a,b])$处可导，则称 $A(x)$在点 $x=x_0$ 可导，记为 $A'(x_0)=[a_{ij}'(x_0)]$.

例如，设 $A(x)=\begin{bmatrix}x-1 & \sin x & 3\\ \cos x & x^2+1 & -5x\end{bmatrix}$定义在$(-\infty,+\infty)$上，则

$$A'(x)=\begin{bmatrix}1 & \cos x & 0\\ -\sin x & 2x & -5\end{bmatrix}.$$

(2) 性质

1° $A(x)$是常数矩阵的充要条件是 $A'(x)=0$.

2° 设$A(x)=[a_{ij}(x)]_{m\times n}$与$B(x)=[b_{ij}(x)]_{m\times n}$均可导，则

$$[A(x)+B(x)]'=A'(x)+B'(x).$$

3° $[kA(x)]'=kA'(x)$，其中 k 为常数.

4° 设$A(x)$，$B(x)$分别为定义在$[a,b]$上的 $m\times n$ 与 $n\times s$ 函数矩阵，则

$$[A(x)B(x)]'=A'(x)B(x)+A(x)B'(x).$$

但是当 $A(x)$是 $n\times n$ 函数矩阵时，

$$[A^2(x)]'\neq 2A(x)\cdot A'(x),$$

而是

$$[A^2(x)]'=A'(x)A(x)+A(x)A'(x).$$

5° 如果$A(x)$，$A^{-1}(x)$都可导，则

$$(A^{-1}(x))'=-A^{-1}(x)A'(x)A^{-1}(x).$$

3. 函数矩阵的积分

(1) 定义　设 $A(x)=[a_{ij}(x)]_{m\times n}$ 定义在$[a,b]$上，如果$\int_a^b a_{ij}(x)\mathrm{d}x(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$都存在，则称 $A(x)$ 可积，且记为

$$\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\left[\int_a^b a_{ij}(x)\mathrm{d}x\right].$$

例2　设 $A(x)=\begin{bmatrix}x-1 & \sin x & 1\\ \cos x & x^2+1 & 5\end{bmatrix}$，求$\int_0^1 A(x)\mathrm{d}x$，

解 $$\int_0^1 A(x)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \int_0^1 (x-1)\mathrm{d}x & \int_0^1 \sin x\mathrm{d}x & \int_0^1 1\mathrm{d}x \\ \int_0^1 \cos x\mathrm{d}x & \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{d}x & \int_0^1 5\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1-\cos 1 & 1 \\ \sin 1 & \frac{4}{3} & 5 \end{bmatrix}.$$

(2) 性质

1° $\int_a^b kA(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$,其中 k 是常数;

2° $\int_a^b (A(x)+B(x))\mathrm{d}x = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x + \int_a^b B(x)\mathrm{d}x$.

10 矩阵幂级数与矩阵函数

10.1 矩 阵 级 数

1. 定义

(1) 设有一个 m 阶方阵序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$,称下面和式

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

为方阵的级数,记为 $\sum_{n=0}^{\infty} A_0$.

(2) 设有一个方阵级数为 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$,令

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} A_k \quad (N = 0,1,2,\cdots).$$

若 $\lim_{N\to\infty} S_N = S$ 存在,则称**矩阵级数** $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ **收敛**,并记为 $S = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$. 否则称**矩阵级数发散**.

(3) 设 $A_k = [a_{ij}^{(k)}]_{m\times m}$,令 $B_k = [|a_{ij}^{(k)}|]_{m\times m}$ $(k = 0,1,2,\cdots)$,若矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} B_k$ 收敛,则称**矩阵级数** $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ **绝对收敛**.

2. 性质

(1) 若矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 绝对收敛,则它一定收敛. 且任意交换各项秩序,所得新级数仍收敛,且和不变.

(2) 矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 绝对收敛的充要条件是 $\sum_{k=0}^{\infty} \| A_k \|$ 收敛,其中 $\| A_k \|$ 是任意一种范数.

(3) 矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k = S$ 收敛,P,Q 与 A_k 是同阶方阵,则 $\sum_{k=0}^{\infty} PA_kQ$ 也收敛,且

$$\sum_{k=0}^{\infty} PA_kQ = PSQ = P(\sum_{k=0}^{\infty} A_k)Q.$$

10.2 矩阵幂级数

1. 定义

设 A 是 m 阶复方阵,称

$$c_0I + c_1A + c_2A^2 + \cdots + c_nA^n + \cdots$$

为矩阵 A 的幂级数,记为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_nA^n$,其中 $c_k(k = 0,1,2,\cdots)$ 为复数.

2. 性质

(1) 设复变数幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n$ 的收敛半径为 R,方阵 A 的谱半径为 $\rho(A)$,那么

1° 当 $\rho(A) < R$ 时,$\sum_{n=0}^{\infty} c_nA^n$ 绝对收敛.

2° 当 $\rho(A) > R$ 时,$\sum_{n=0}^{\infty} c_nA^n$ 发散.

例 1 设 $A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.6 & -0.1 \\ -0.6 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & -0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$,证明 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ 绝对收敛.

证 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛半径 $R = 1$.而

$$\| A \|_{\infty} = 0.9,$$
$$\rho(A) \leqslant \| A \|_{\infty} = 0.9 < R = 1.$$

因此 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ 绝对收敛.

(2) 若复数幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 R,设 m 阶方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,那么

1° 当 $|\lambda_i - a| < R$ 时,$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(A - aI)^n$ 绝对收敛.

2° 若存在某个 λ_j,使 $|\lambda_j - a| > R$,则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(A - aI)^n$ 发散.

(3) 若复数幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在整个复平面上收敛，则对任意 m 阶方阵 A，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ 也在整个复平面上收敛.

10.3 矩阵函数

1. 定义

若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n (|z| < R)$，其中 $c_n (n = 0,1,2,\cdots)$ 是复数，且 $\rho(A) < R$，则定义

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n,$$

并称 $f(A)$ 为矩阵 A 的函数.

2. 一些常用的矩阵函数

(1) 指数函数　由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 在整个复平面上收敛于 e^z，因此定义

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

(2) 正弦函数与余弦函数　由于在整个复平面上有

$$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

因此定义矩阵的正弦函数与余弦函数为

$$\sin A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{A^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cos A = I + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!}.$$

(3) 对数函数与幂函数　类似可定义

$$\ln(I + A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} A^n \quad (\rho(A) < 1),$$

$$(I + A)^\alpha = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} A^n \quad (\rho(A) < 1).$$

特别有

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad (\rho(A) < 1).$$

3. 计算

(1) $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵的情况 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶方阵,且

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\operatorname{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m]\boldsymbol{P},$$

则

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}^{-1}\operatorname{diag}[f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_m)]\boldsymbol{P}.$$

例2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}$,求 $e^{\boldsymbol{A}}$,$\sin\boldsymbol{A}$ 与 $\cos\boldsymbol{A}$.

解 因为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)$.那么 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$.求出它们相应的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix},\quad 则\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0&\\&2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\quad f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}f(0)&\\&f(2)\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

故

$$e^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^0&\\&e^2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\\0&e^2\end{bmatrix}.$$

$$\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\sin0&\\&\sin2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\sin2\\0&\sin2\end{bmatrix}.$$

$$\cos\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\cos0&\\&\cos2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\cos2-\frac{1}{2}\\0&\cos2\end{bmatrix}.$$

(2) 一般情况 设 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&\boldsymbol{J}_s(\lambda_s)\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{J}_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i&1&&&\\&\lambda_i&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\lambda_i&1\\&&&&\lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}\qquad(i=1,2,\cdots,s)$$

从而有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}$,则

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}f(\boldsymbol{J}_1)&&\\&\ddots&\\&&f(\boldsymbol{J}_s)\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

其中

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!}f^{(n_i-1)}(\lambda_i) \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n_i-2)!}f^{(n_i-2)}(\lambda_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}.$$

$$(i=1,2,\cdots,s).$$

例 3 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & -1 & 3\end{bmatrix}$，求 e^A，$\sin A$ 与 $\cos A$.

解 将 A 的特征矩阵 $\lambda I-A$ 化成史密斯标准形，得

$$\lambda I-A\simeq\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & (\lambda-2)^2\end{bmatrix}.$$

则 A 的初等因子为 $\lambda-2,(\lambda-2)^2$. 从而 A 的约当标准形为

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & \\ & J_2\end{bmatrix},$$

其中 $J_1=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$，$J_2=[2]$. 再由

$$AP=PJ$$

求得

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

从而

$$\begin{aligned} f(J)&=P\begin{bmatrix}f(J_1) & \\ & f(J_2)\end{bmatrix}P^{-1}\\ &=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(2) & f'(2) & 0\\0 & f(2) & 0\\0 & 0 & f(2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}f(2) & 0 & 0\\f'(2) & f(2)-f'(2) & f'(2)\\f'(2) & -f'(2) & f'(2)+f(2)\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1° 当 $f(x)=e^x$ 时，$f(2)=f'(2)=e^2$. 所以

$$e^A=\begin{bmatrix}e^2 & 0 & 0\\e^2 & 0 & e^2\\e^2 & -e^2 & 2e^2\end{bmatrix}.$$

2° 当 $f(x)=\sin x$ 时，$f(2)=\sin 2$，$f'(2)=\cos 2$，所以

$$\sin A=\begin{bmatrix}\sin 2 & 0 & 0\\ \cos 2 & \sin 2-\cos 2 & \cos 2\\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2+\cos 2\end{bmatrix}.$$

3° 当$f(x)=\cos x$时,则$f(2)=\cos 2, f'(2)=-\sin 2$,所以

$$\cos A=\begin{bmatrix}\cos 2 & 0 & 0\\ -\sin 2 & \cos 2+\sin 2 & -\sin 2\\ -\sin 2 & \sin 2 & \cos 2-\sin 2\end{bmatrix}.$$

11　非负矩阵与M矩阵

11.1　非负矩阵

1. 正矩阵与非负矩阵概念

设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$都是实数域$\mathbf{R}$上的$m\times n$矩阵.

(1) 若$a_{ij}>0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称$\boldsymbol{A}$为**正矩阵**.

(2) 若$a_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称$\boldsymbol{A}$为**非负矩阵**.

(3) 若$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\geqslant\boldsymbol{0}$(或$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}>\boldsymbol{0}$),则称$\boldsymbol{A}$不小于$\boldsymbol{B}$(或$\boldsymbol{A}$大于$\boldsymbol{B}$),记为$\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$(或$\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$).

2. 可约矩阵

设$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,若存在$n$阶置换阵$\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{A}_{11}$是k阶方阵$(1\leqslant k\leqslant n-1)$,则称$\boldsymbol{A}$是**可约矩阵**. 否则就称$\boldsymbol{A}$是**不可约矩阵**.

显然正矩阵都是不可约的.

3. 非负矩阵的性质

(1) 佩龙(Perron)性质　设$\boldsymbol{A}$是n阶正矩阵,$\rho(\boldsymbol{A})$是谱半径,则

1° $\rho(\boldsymbol{A})$是$\boldsymbol{A}$的正特征值,其对应特征向量为正向量;

2° 对于$\boldsymbol{A}$的任何其他特征值λ,都有$|\lambda|<\rho(\boldsymbol{A})$;

3° $\rho(\boldsymbol{A})$是$\boldsymbol{A}$的单特征值.

例如,设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

则$\boldsymbol{A}$是正矩阵,由于

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-3),\quad \lambda_1=\lambda_2=0,\quad \lambda_3=3=\rho(\boldsymbol{A}),$$

则$\rho(\boldsymbol{A})$是$\boldsymbol{A}$的单特征值. 且当$\lambda=3$时,相应特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}=[1,1,1]^{\mathrm{T}},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 是正特征向量.

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非负矩阵,且 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$,则 $\rho(\boldsymbol{A})\geqslant\rho(\boldsymbol{B})$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是非负矩阵,则存在正矩阵序列 $\{\boldsymbol{B}_m\}$,使

$$\boldsymbol{A}=\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{B}_m.$$

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非负矩阵,则

1° $\boldsymbol{A}$ 存在非负特征值 r;

2° 对于 $\boldsymbol{A}$ 的任意其他特征值 λ,都有 $|\lambda|\leqslant r$;

3° 特征值 r 对应非负特征向量.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非负矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 为不可约矩阵的充要条件是存在正整数 $m\leqslant n-1$ 使 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^m$ 是正矩阵.

例如,设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\1&1&1\\0&2&2\end{bmatrix}$ 是非负矩阵,则

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^2=\begin{bmatrix}3&2&0\\1&2&1\\0&2&3\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}11&10&2\\5&8&5\\2&10&11\end{bmatrix}>\boldsymbol{0}.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是正矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征向量,$\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征向量,则

$$\lim_{m\to\infty}(\rho(\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A})^m=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}.$$

11.2 M 矩 阵

M 矩阵又称为闵可夫斯基(Minkowski)矩阵.

1. 定义

(1) 设 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实矩阵,$\boldsymbol{B}\geqslant 0$,$a>0$.那么

1° 若 $a\geqslant\rho(\boldsymbol{B})$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 **M 矩阵**;

2° 若 $a>\rho(\boldsymbol{B})$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 M 矩阵.

(2) 令 $\mathbf{Z}^{n\times n}=\{\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}\mid a_{ij}\leqslant 0,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n\}$,令 $M^{n\times n}$ 为一切 n 阶 M 矩阵全体,显然 $M^{n\times n}\subseteq\mathbf{Z}^{n\times n}$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是 n 阶复矩阵,那么

1° 若 $|a_{ii}|\geqslant\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\ (i=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为行对角占优矩阵.

2° 若 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\ (i=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为行**严格对角占优矩阵**.

2. 性质

(1) 非奇异 M 矩阵的每个实特征值均是正数.从而它的行列式大于 0.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 M 矩阵,$\boldsymbol{D}\in\mathbf{Z}^{n\times n}$,且 $\boldsymbol{D}\geqslant\boldsymbol{A}$.则

1° A^{-1}与 D^{-1}都存在，且 $A^{-1}\geqslant D^{-1}\geqslant 0$；

2° D 的每个实特征值为正数；

3° $|D|\geqslant|A|>0$；

4° D 也是非奇异 M 矩阵.

(3) 非奇异 M 矩阵的等价条件　设 $A\in Z^{n\times n}$，则下面几个条件彼此等价：

1° A 为非奇异 M 矩阵；

2° 存在非负向量 α，使 $A\alpha>0$；

3° 存在正向量 α，使 $A\alpha>0$；

4° 存在正对角矩阵 D，使 AD 为严格对角占优矩阵，且 AD 所有主对角元为正数；

5° 若 $B\in Z^{n\times n}$，且 $B\geqslant A$，则 B 非奇异；

6° A 的任意主子阵的每个实特征值为正数；

7° A 的所有主子式大于 0；

8° A 的所有 k 阶($1\leqslant k\leqslant n$)主子式之和大于 0；

9° A 的每个实特征值为正数；

10° 存在非负矩阵 P^{-1}与 Q，使 $A=P-Q$ 且 $\rho(P^{-1}Q)<1$；

11° A 可逆且 $A^{-1}\geqslant 0$.

(4) M 矩阵等价条件　设 $A\in Z^{n\times n}$，则下面几个条件彼此等价：

1° A 是 M 矩阵；

2° $\forall\epsilon>0, A+\epsilon I$ 是非奇异 M 矩阵；

3° A 的任意主子阵的每个实特征值非负；

4° A 的所有主子式非负；

5° A 的所有 k($1\leqslant k\leqslant n$)阶主子式之和为非负数；

6° A 的每个实特征值非负.

参考文献

1 钱吉林，李照海．矩阵及其广义逆．武汉：华中师范大学出版社，1988.

2 樊恽，钱吉林等．代数学辞典．武汉：华中师范大学出版社，1994.

3 王萼芳．高等代数．上海：上海科学技术出版社，1981.

4 钱吉林，陈良植．高等代数方法导论．武汉：华中师范大学出版社，1990.

5 史荣昌．矩阵分析．北京：北京理工大学出版社，1996.

6 北京大学数学系．高等代数．第2版．北京：高等教育出版社，1988.

7 威尔金森 J H．代数特征值问题．石钟慈，邓健新译．北京：科学技术出版社，1987.

8 合恩 R A，约翰逊 C R．矩阵分析．杨奇译．天津：天津大学出版社，1989.

9 罗家洪．矩阵分析引论．广州：华南理工大学出版社，1992.

·经典数学卷·

第5篇

微分几何

编　者　杨文茂
审校者　任德麟

目　录

引　言

微分几何是用数学分析作工具研究空间形式的一个数学分支.经典的微分几何主要讨论三维欧氏空间的曲线与曲面的局部性质.现代的微分几何却已发展到研究高维微分流形(包括欧氏空间、仿射空间与射影空间等)中各维子流形(包括曲线,各维曲面与超曲面等)的局部与整体性质.

微分几何几乎是与数学分析同时诞生的.牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibniz)创立微积分的目的之一就是为了解决诸如曲线的切线,曲线的长度以及用曲线围成图形的面积等几何问题.欧拉(Euler)与蒙日(Monge)对曲线与曲面的理论最先作出了贡献.塞莱(Serret)与弗雷内(Frenet)完成了曲线的局部理论.高斯(Gauss)的内蕴几何使曲面的局部理论趋于完美.随后黎曼(Riemann)把内蕴几何发展到高维,创立了以他的名字命名的几何学,开创了微分几何的新篇章.20世纪以来整体微分几何逐渐发展起来,并与微分方程、代数、拓扑等其他分支相互渗透成为数学的一个重要分支.加当(Cartan)的外微分形式与陈省身(S.S.Chen)的纤维丛理论是这分支中具有里程碑意义的工作。

微分几何在理论物理、引力理论、工程力学、大地测量、机械传动等领域中有着广泛的应用。

1　曲　线　论

1.1　平面曲线

1.1.1　平面曲线的方程、切线与法线

(1) 平面曲线方程　在选取直角坐标系 Oxy 的欧氏平面或二维欧氏空间 E^2 中的曲线 C 可用下列方程表示:

一般式
$$y = f(x), \tag{1-1}$$
或
$$F(x,y) = 0. \tag{1-2}$$

参数式
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in I(\text{区间}). \tag{1-3}$$

在此对函数 f, F, x, y 都要求具有一定阶的可微分性质.

(2) 切线方程　曲线(1-1) ~ (1-3)在点 $t = t_0, x = x(t_0) = x_0, y = y(t_0) = y_0$ 处的切线方程分别为

一般式
$$y - y_0 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x - x_0), \tag{1-4}$$
或
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) = 0. \tag{1-5}$$
参数式
$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t - t_0), \\ y = y_0 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t - t_0). \end{cases} \tag{1-6}$$
其中各式所出现的导数分别在 t_0, x_0, y_0 处取值.

(3) 法线方程　曲线(1-1) ~ (1-3) 在点 t_0 或(x_0, y_0) 处的法线方程分别为

一般式
$$x - x_0 + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(y - y_0) = 0,$$
或
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x - x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(y - y_0) = 0.$$
参数式
$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t - t_0), \\ y = y_0 - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t - t_0). \end{cases}$$

一般说来,曲线(1-1) 在$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$,$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$,$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$不为零的点,称为正则点.在曲线的正则点有唯一一条切线和一条法线.在曲线上不存在切线和法线,或有多于一条切线和法线的点,称为奇点.

切线(1-4) ~ (1-6) 的斜率 $k = \tan\varphi$(其中 φ 为切线的倾角) 分别为
$$k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

1.1.2　平面曲线的弧长

(1) 曲线(1-1) ~ (1-3) 从点 t_0 到 t 的弧长为积分
$$\begin{aligned} s = s(t) &= \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[\frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
(2) 在平面极坐标系 $O\rho\theta$ 中,曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 的弧长为

$$s = s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

(3) 用弧长 s 作为参数的曲线方程为

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad s \in I.$$

此曲线方程称为 C 的**自然方程**,弧长参数也称为**自然参数**. 一般参数 t 为自然参数的充分必要条件是

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1.$$

1.1.3 平面曲线的曲率

(1) 当点沿曲线 C 运动时,其切线方向不断变化,切线的倾角 φ 关于弧长 s 的变化率 $\frac{d\varphi}{ds}$ 称为 C 在该点的**曲率**,它刻画了曲线在这点邻近的弯曲程度. 曲率的计算公式为

$$\kappa = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{d^2y}{dx^2}\right| \Big/ \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)^3 = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3}. \qquad (1\text{-}7)$$

在(1-7)式中用"′"表示对参数 t 的求导.

(2) 通过 C 上点 t_0 和另外两个不同的邻近点 t_1 与 t_2 的圆,在 t_1 与 t_2 趋近于 t_0 时此圆的极限位置称为 C 在点 t_0 处的**密切圆**或**曲率圆**. 密切圆的中心称为 C 在点 t_0 处的**曲率中心**,其半径称为 C 在点 t_0 处的**曲率半径**,它等于这点曲率的倒数(当 $\kappa \neq 0$ 时),即 $R = \frac{1}{\kappa}$. 曲率中心坐标为

$$\begin{cases} x_\kappa = x_0 - R\dfrac{dy}{ds}, \\ y_\kappa = y_0 + R\dfrac{dx}{ds}. \end{cases}$$

其中曲率半径为

$$R = \frac{1}{\kappa} = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)^3 \Big/ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3}{|x'y'' - y'x''|}.$$

且两个关于弧长 s 的导数为

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \\[2ex] \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{\frac{ds}{dx}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \end{cases}$$

(3) 在平面极坐标系 $O\rho\theta$ 中,曲率的计算公式为

$$\kappa = \frac{1}{R} = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{ds}\right| = \frac{\left|\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right|}{\left(\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\right)^3},$$

其中角 ψ 是 C 的切线与径向量之间的夹角，且

$$\tan\psi = \rho\Big/\frac{d\rho}{d\theta}.$$

1.1.4 平面曲线的基本定理

设 $\kappa(s)$ 为区间 $[s_0, s_1]$ 上已知连续函数，而点 (x_0, y_0) 与单位向量 $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ 为已知，则在平面上存在唯一一条曲线 C，它以 s 为自然（弧长）参数，以 $\kappa(s)$ 为曲率，且在 $s = s_0$ 时的切线沿已知单位向量的方向. 这就是关于平面曲线的**唯一存在定理**，也称关于平面曲线的基本定理. 这条曲线的方程为

$$\begin{cases} x = \int_{s_0}^{s}\cos\varphi(s)ds + x_0, \\ y = \int_{s_0}^{s}\sin\varphi(s)ds + y_0, \end{cases} \tag{1-8}$$

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s}\kappa(s)ds + \varphi_0. \tag{1-9}$$

例如，如所知圆是平面上的常曲率（κ = const）曲线，从(1-9)式可得 $\varphi(s) = \kappa(s - s_0) + \varphi_0$，再由(1-8)式可得到圆的参数方程

$$\begin{cases} x = -R\sin[\kappa(s - s_0) + \varphi_0] + x_0, \\ y = R\cos[\kappa(s - s_0) + \varphi_0] + y_0. \end{cases}$$

1.1.5 平面曲线族

对含有参数 λ 的方程

$$F(x, y, \lambda) = 0, \tag{1-10}$$

当参数 λ 在某区间上连续变化时，给出平面上的单参数曲线族 (C_λ). 族 (C_λ) 的包络线是与族中每条曲线都相切的曲线，或是包含族中每条曲线的奇点的曲线 Γ. 由方程(1-10)对 λ 求导，得

$$\frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial\lambda} = 0. \tag{1-11}$$

从(1-10)式与(1-11)式中消去 λ 得到族的包络线 Γ 的方程.

如果一条曲线 Γ 与族 (C_λ) 中每一条曲线都相交于定角 α，则称 Γ 为族的**等角轨线**. 其微分方程为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial F}{\partial y}\sin\alpha\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\alpha\right)dy = 0.$$

特例，当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，即 Γ 与每个 C_λ 正交或垂直时，称 Γ 为族的正交轨线，其方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}x = 0, \tag{1-12}$$

例如，以坐标原点为圆心的同心圆族的方程为

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 = 0.$$

那么$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$，从方程(1-12)得其正交轨线的微分方程为

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0.$$

此方程之解为 $y = kx$，但这正是通过坐标原点的直线族.

1.2　空间曲线

1.2.1　空间曲线的方程与弧长

(1) 在选取直角坐标系 $Oxyz$ 或 $Oe_1e_2e_3$ 的三维欧氏空间 E^3 中的曲线 C 可用下列方程表示：

一般式

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases} \tag{1-13}$$

其中第一，二两个方程分别表示空间的曲面 S_1 与 S_2，而曲线 $C = S_1 \cap S_2$ 为它们的交线.

参数式

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad t \in I(\text{区间}), \tag{1-14}$$

$$\boldsymbol{r} = (x,y,z), \quad \boldsymbol{r}(t) = (x(t),y(t),z(t)).$$

函数 F,G,x,y,z 都要求具有一定阶的可微分性质.

在一般式(1-13)中，满足矩阵秩

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} = 2$$

的点 $\boldsymbol{r}$ 称为曲线上的正常点.这是由于在此条件下依据隐函数存在定理，在此点的邻近方程(1-13)可以改写为以某个坐标(如 x)为参数的形式

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases} \quad x \in I.$$

(2) 在曲线 C 上从点 t_0 到点 t 的弧长为积分

$$\begin{aligned} s = s(t) &= \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{r}'$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$.

以弧长 s 作为曲线方程的参数具有明显的几何意义，其方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

称为 C 的自然方程，s 称为自然参数.一般参数 t 为自然参数的充分必要条件是

$$|\boldsymbol{r}'|=1,\quad t\in I,$$

即 $\boldsymbol{r}'$ 是曲线的单位切向量.关于自然参数 s 的求导我们记为"·"号,即 $\dot{\boldsymbol{r}}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$.而对一般参数 t 的求导用"′"表示.

(3) 在 $\boldsymbol{E}^3$ 中的直角坐标系里,曲线的弧微分平方为

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2;$$

而在柱面坐标系 $O\rho\theta z$ 里,曲线的弧微分平方为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{d}z^2;$$

在球面坐标系 $O\rho\theta\varphi$ 里,曲线的弧微分平方为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\sin^2\varphi\mathrm{d}\theta^2+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2.$$

上述3种坐标系之间的变换关系为

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z;$$

$$x=\rho\cos\theta\sin\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\varphi.$$

(4) 圆柱螺线 **圆柱螺线**是动点在空间作螺旋运动的轨迹.一个动点在圆柱形螺丝钉的螺纹上运动时,它一方面绕螺钉轴作圆周运动,另一方面沿轴线方向移动.设动点在 $t=0$ 时刻位于点$(a,0,0)$(见图1-1),旋转的角速度为 ω,移动的线速度为 v,则圆柱螺线的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=(a\cos\omega t,a\sin\omega t,vt),$$

$$0\leqslant t<+\infty.$$

设 $\omega t=\theta,b=v/\omega$,则上述参数方程可改写为

$$\boldsymbol{r}=(a\cos\theta,a\sin\theta,b\theta),t\in[0,+\infty).$$

圆柱螺线的弧微分与弧长分别为

$$\mathrm{d}s=|\boldsymbol{r}_\theta'|\mathrm{d}\theta=c\mathrm{d}\theta,\quad s=c\theta,$$

其中

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

其自然方程为

$$\boldsymbol{r}=\left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right),a\sin\left(\frac{s}{c}\right),\frac{bs}{c}\right).\qquad(1\text{-}15)$$

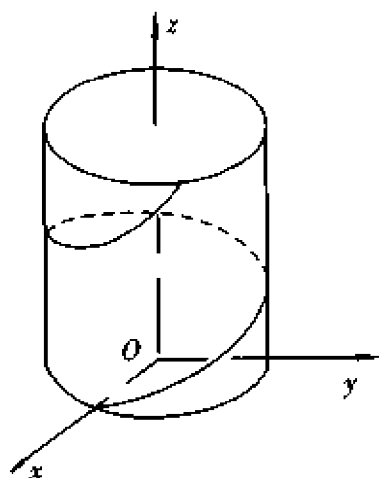


图1-1

1.2.2 空间曲线的基本三棱形

(1) 基本三棱形 由方程(1-14)表示的曲线,其 $\boldsymbol{r}'(t)\neq\boldsymbol{0}$ 的点称为正常点,在此点处曲线有唯一的切线,且切线平行于切向量 $\boldsymbol{r}'(t)$.满足 $\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\neq\boldsymbol{0}$ 的点称为非逗留点,否则称为逗留点.对于曲线的非逗留点,存在唯一的正交标架 $\{\boldsymbol{r}(t);\boldsymbol{\alpha}(t),\boldsymbol{\beta}(t),\boldsymbol{\gamma}(t)\}$,此正交标架称为曲线在这点的弗雷内标形(架)、活动标形或**基本三棱形**(见图1-2).此标形的3个基本向

量是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$.

1° $\boldsymbol{\alpha}$ 为(单位)**切向量**,通过点 $\boldsymbol{r}$ 平行于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的直线 L_α 称为 C 在这点的**切线**,而通过点 $\boldsymbol{r}$ 且垂直于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的平面 π_α 称为 C 在这点的**法(平)面**.

2° $\boldsymbol{\beta}$ 为(单位)**主法向量**,通过点 $\boldsymbol{r}$ 平行于 $\boldsymbol{\beta}$ 的直线 L_β 称为 C 在这点的**主法线**,而通过点 $\boldsymbol{r}$ 且垂直于 $\boldsymbol{\beta}$ 的平面 π_β 称为 C 在这点的**从切(平)面**.

3° $\boldsymbol{\gamma}$ 为(单位)**副法向量**,通过点 $\boldsymbol{r}$ 平行于 $\boldsymbol{\gamma}$ 的直线 L_γ 称为 C 在这点的**副法线**,而通过点 $\boldsymbol{r}$ 垂直于 $\boldsymbol{\gamma}$ 的平面 π_γ 称为 C 在这点的**密切(平)面**.

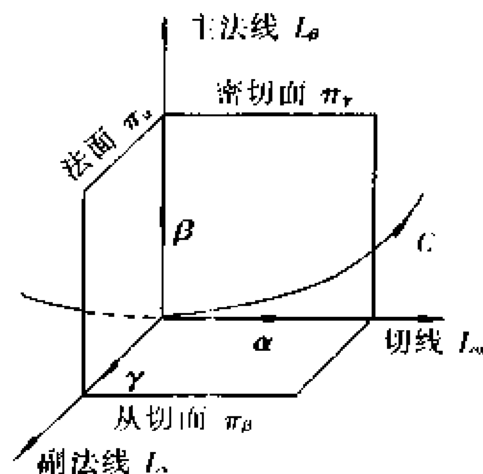


图 1-2

(2) 基本向量的计算公式　3 个基本向量的计算公式如表 1-1 所示.

表 1-1

名　称	记　号	用自然参数 s	用一般参数 t
切向量	$\boldsymbol{\alpha}$	$\dot{\boldsymbol{r}}$	$\dfrac{\boldsymbol{r}'}{\lvert\boldsymbol{r}'\rvert}$
主法向量	$\boldsymbol{\beta}$	$\dfrac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{\lvert\ddot{\boldsymbol{r}}\rvert}$	$\dfrac{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\times\boldsymbol{r}'}{\lvert(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\times\boldsymbol{r}'\rvert}$
副法向量	$\boldsymbol{\gamma}$	$\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{\lvert\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\rvert}$	$\dfrac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{\lvert\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\rvert}$

(3) 基本直线方程　3 条基本直线的方程如下:

切线　$L_\alpha:\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{\alpha}$;

主法线　$L_\beta:\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{\beta}$,　$\lambda\in(-\infty,+\infty)$,$\boldsymbol{\rho}$ 为直线上动点径向量;

副法线　$L_\gamma:\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{\gamma}$.

(4) 基本平面方程　3 个基本平面的方程如下:

法平面　$\pi_\alpha:\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})=0$;

从切面　$\pi_\beta:\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})=0$;　$\boldsymbol{\rho}$ 为平面上动点的径向量;

密切面　$\pi_\gamma:\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})=0$.

例 1　求 1.2.1 节(4) 中的圆柱螺线的 3 个基向量.

解　对自然方程(1-15) 关于 s 求导,得

$$\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{r}}=\left(-a\sin\left(\frac{s}{c}\right),a\cos\left(\frac{s}{c}\right),b\right)\Big/c.$$

上式再对 s 求导,得

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right),a\sin\left(\frac{s}{c}\right),0\right)\Big/c^2.$$

将上式化为单位向量,得

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|} = -\left(\cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right).$$

最后计算副法向量,得

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \left(-b\sin\left(\frac{s}{c}\right), -b\cos\left(\frac{s}{c}\right), a\right)\Big/c.$$

例2 求三次挠曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = (at, bt^2, ct^3)$$

的3条基本直线与3个基本平面.

解 对 $\boldsymbol{r}(t) = (at, bt^2, ct^3)$ 关于 t 求导,得

$\boldsymbol{r}' = (a, 2bt, 3ct^2)$, $\boldsymbol{r}'' = (0, 2b, 6ct)$,

$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = (6bct^2, -6act, 2ab)$,

$(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'') \times \boldsymbol{r}' = (-2at(9c^2t^2 + 2b^2), -2b(9c^2t^4 - a^2), 6ct(2b^2t^2 + a^2))$.

3条基本直线方程为

$$L_\alpha:\ \frac{x - at}{a} = \frac{y - bt^2}{2bt} = \frac{z - ct^3}{3ct^2},$$

$$L_\beta:\ \frac{x - at}{2at(9c^2t^2 + 2b^2)} = \frac{y - bt^2}{2b(9c^2t^4 - a^2)} = \frac{z - ct^3}{-6ct(2b^2t^2 + a^2)},$$

$$L_\gamma:\ \frac{x - at}{6bct^2} = \frac{y - bt^2}{-6act^2} = \frac{z - ct^3}{2ab}.$$

3个基本平面方程为

$$\pi_\alpha:\ a(x - at) + 2bt(y - bt^2) + 3ct^2(z - ct^3) = 0,$$

$$\pi_\beta:\ 2at(9c^2t^2 + 2b^2)(x - at) + 2b(9c^2t^4 - a^2)(y - bt^2) - 6ct(2b^2t^2 + a^2)(z - ct^3) = 0,$$

$$\pi_\gamma:\ 6bct^2(x - at) - 6act^2(y - bt^2) + 2ab(z - ct^3) = 0.$$

1.2.3 空间曲线的基本公式

(1) 弗雷内 - 塞莱公式

1° 微分运算是微分几何中的主导方法.对空间曲线的基本三棱形$(\boldsymbol{r};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$关于曲线的弧长求导,得到曲线的基本公式.由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是互相正交的单位向量,对它们求导后的系数矩阵是一个反对称矩阵,其系数给出了曲线的基本量,这就是曲线的曲率和挠率.这组求导公式为

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\alpha}; \tag{1-16}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \kappa\boldsymbol{\beta}, \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} = -\kappa\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\tau\boldsymbol{\beta}. \end{cases} \tag{1-17}$$

(1-16)式与(1-17)式称为空间曲线的基本公式,(1-17)式又称为弗雷内 - 塞莱

(Frenet-Serret) 公式. 它们几乎包含局部微分几何学的全部内容. 公式中出现的两个系数

$$\kappa = |\ddot{\boldsymbol{r}}| = |\dot{\boldsymbol{\alpha}}|, \qquad (1\text{-}18)$$

$$\tau = \dot{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\gamma}}$$

分别称为曲线在点 $\boldsymbol{r}$ 处的**曲率**与**挠率**. 当它们非零时, 其倒数 $1/\kappa$ 与 $1/\tau$ 分别为**曲率半径**与**挠率半径**. 长度为曲率半径且与主法向量一致的向量 $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \kappa\boldsymbol{\beta}$ 称为曲线的曲率向量.

2° 曲线的基本三棱形的**瞬时旋转向量**或**达布(Darboux)向量**为

$$\boldsymbol{\Omega} = \tau\boldsymbol{\alpha} + \kappa\boldsymbol{\gamma}. \qquad (1\text{-}19)$$

用(1-19) 式改写公式(1-17), 得

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\alpha}, \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\beta}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}. \end{cases} \qquad (1\text{-}20)$$

这是弗雷内 - 塞莱公式的另外一种形式, 它反映了基本三棱形在运动学中的意义.

(2) 弗雷内 - 塞莱公式在运动学中的意义　当点 $\boldsymbol{r}$ 在曲线 C 上运动时, 基本三棱形($\boldsymbol{r};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$) 作为刚体运动, 由两种运动合成. 一种是三棱形的顶点 $\boldsymbol{r}$ 沿 C 的移动, 另一种是三棱形($\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$) 绕点 $\boldsymbol{r}$ 的转动. 为简单起见, 不妨设顶点在 C 上以匀速 $\frac{ds}{dt} = 1$($s = t$ 为时间) 移动. (1-16) 式表明其移动速度向量为 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\alpha}$; 而采用(1-20) 式描述三棱形的转动, 须要用到运动学中的定理: 凡绕一定点转动的刚体, 每个时刻都有一条瞬时转动轴和一个瞬时转动速度向量 $\boldsymbol{\Omega}$. 对于固定在刚体上的正交标架($\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$), 其速度向量 $\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}},\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ 所须满足的正是形如(1-20) 式所示的公式. 于是表明 $\boldsymbol{\Omega}$ 正是三棱形的瞬时转动速度向量.

(1-19) 式表示 $\boldsymbol{\Omega}$ 是位于从切平面上的向量. 它在曲线切方向的分量为挠率 τ, 而在副法方向的分量为曲率 κ, 在曲线的法方向无分量. 由此得到 κ 与 τ 的运动学意义:

1° 曲率 κ 是基本三棱形绕副法线的转动分量, 或者说 κ 为曲线的切向量关于弧长的转动率, 这可以从 $|\dot{\boldsymbol{\alpha}}| = \kappa$ 看出.

2° 挠率 τ 是基本三棱形绕切线的转动分量, 或者说 τ 是曲线的密切平面(绕切线转动) 关于弧长的转动率, 这可以从 $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}| = |\tau|$ 看出, 因为 $\boldsymbol{\gamma}$ 是密切平面的法向量.

(3) 曲率与挠率的计算公式　曲线的曲率与挠率的计算公式如表 1-2 所示.

注意: 比较(1-7) 与(1-18) 两式, 可见平面曲线的曲率与空间曲线的曲率定义是不相同的. 前者为 $\kappa = \frac{d\varphi}{ds}$, 可正可负, 但后者定义为 $\kappa = |\ddot{\boldsymbol{r}}| = |\dot{\boldsymbol{\alpha}}|$, 不可为负.

表 1-2

名　称	记　号	用自然参数 s	用一般参数 t
曲率	κ	$\lvert\ddot{\boldsymbol{r}}\rvert,\lvert\dot{\boldsymbol{\alpha}}\rvert$	$\dfrac{\lvert\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\rvert}{\lvert\boldsymbol{r}'\rvert^3}$
挠率	τ	$(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}}),\dddot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\beta},(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})$	$\dfrac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{\lvert\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\rvert^2}$

1.2.4　空间曲线的基本定理

(1) 从基本三棱形的求导可得到曲线的基本公式.反过来,从基本公式的求解,或者说使用积分的运算解常微分方程组,则可得到空间曲线的基本定理.也就是说,从曲率与挠率给出为弧长 s 的函数,不计空间的位置,可以唯一确定一条空间曲线.

(2) 空间曲线唯一存在定理　在区间 $I=[s_0,s_1]$ 上已知两个连续函数 $\kappa(s)>0,\tau(s)$,而$(\boldsymbol{r}_0;\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$ 为某已知三棱形,则存在唯一一条空间曲线 $C(\subset \boldsymbol{E}^3)$,使得 s 为它的弧长参数,$\kappa(s),\tau(s)$ 分别为它的曲率与挠率,且在 $s=s_0$ 时 C 的基本三棱形为$(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$.也可以将此结论表述为下面两个定理.

1° 空间曲线存在定理　在区间 I 上给出连续函数$\kappa(s)>0,\tau(s)$,则存在某些曲线 C,分别以 s、κ、τ 为其弧长、曲率、挠率.

2° 空间曲线唯一定理　在空间两条不含逗留点的曲线 C 与 $\overline{C}$ 可以通过$\boldsymbol{E}^3$ 中的一个运动互相迭合的充分必要条件是适当选取它们的公共自然参数 s,使得在对应点两条曲线有相同的曲率和挠率,即 $\kappa(s)=\overline{\kappa}(s),\tau(s)=\overline{\tau(s)}$.

(3) 空间曲线的自然方程或禀性方程是指方程组

$$\kappa=\kappa(s),\tau=\tau(s),\quad s\in I. \tag{1-21}$$

据上述基本定理,自然方程不计空间中的位置可以唯一确定一条曲线.由自然方程确定曲线,也就是方程组(1-21)的积分问题,实际上是求解曲线的基本公式(1-16),(1-17).即先解方程组

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\kappa\boldsymbol{\beta},\\ \dot{\boldsymbol{\beta}}=-\kappa\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma},\\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}=-\tau\boldsymbol{\beta},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}\mid_{s_0}=\boldsymbol{\alpha}_0,\\ \boldsymbol{\beta}\mid_{s_0}=\boldsymbol{\beta}_0,\\ \boldsymbol{\gamma}\mid_{s_0}=\boldsymbol{\gamma}_0,\end{cases}$$

以求 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$,再解方程组

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{r}\mid_{s_0}=\boldsymbol{\alpha}_0,$$

以求 $\boldsymbol{r}$.从而得到曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$.这个问题不是初等的,它并不能类似于平面曲线给出用(1-8),(1-9)式表示的曲线.但在一些简单情况下可以给出显解,如直线

的自然方程,平面曲线的自然方程,圆柱螺线的自然方程等.

(4) 由曲率与挠率或它们的关系确定的曲线如表 1-3 所示.

表 1-3

曲线名称	曲率 κ	挠率 τ
直线	$\kappa = 0$	$\tau = 0$
圆	$\kappa = \text{const} \neq 0$	$\tau = 0$
平面曲线		$\tau = 0$
圆柱螺线	$\kappa = \text{const} \neq 0$	$\tau = \text{const} \neq 0$
球面曲线	当 $\tau \neq 0$ 记 $R = \frac{1}{\kappa}, R\tau + \frac{d}{ds}(\frac{\dot{R}}{\tau}) = 0$	
柱面螺线	$\tau = \lambda\kappa, \lambda = \text{const} \neq 0$	
贝特朗曲线	$\lambda\kappa + \mu\tau = 1, \quad \lambda, \mu = \text{const} \neq 0$	
孟恩哈姆曲线	$\lambda(\kappa^2 + \tau^2) = \kappa, \quad \lambda = \text{const} \neq 0$	

例如,直线的自然方程为 $\kappa = 0, \tau = 0$. 平面曲线的自然方程为 $\tau = 0$. 当 $\kappa = \frac{1}{R}$ 为常数得到圆.

再例如,1.2.1 节(4) 中的圆柱螺线,在例 1 中已求出其基本向量为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$,从方程(1-15) 求导两次得曲率

$$\kappa = |\ddot{\boldsymbol{r}}| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{(a^2 + b^2)},$$

对 $\boldsymbol{\beta} = -\left(\cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right)$ 关于 s 求导给出

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \left(\sin\left(\frac{s}{c}\right), -\cos\left(\frac{s}{c}\right), 0\right) \Big/ c,$$

得挠率

$$\tau = \dot{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\gamma} = \frac{b}{(a^2 + b^2)}.$$

可见其曲率和挠率都是常数. 由基本定理知曲率、挠率为常数的曲线为圆柱螺线.

(5) 柱面螺线　在一个一般柱面上与直母线族成等角的曲线 C 称为**柱面螺线**. 圆柱螺线是其特例. 设柱面母线的方向向量为 $\boldsymbol{e}$(单位常向量). 柱面螺线的基本三棱形为$(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$. 以下 4 条均为柱面螺线的特征:

1° $\boldsymbol{\alpha e} = \cos\varphi = \text{const}, \varphi = \text{const}$, C 的切线与定方向成定角;

2° $\boldsymbol{\beta e} = 0$, C 的主法线与定方向垂直;

3° $\boldsymbol{\gamma e} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, C 的副法线与定方向成定角;

4° $\tau = \lambda K, \lambda = \cot\varphi = \text{const}$, C 的曲率与挠率之比为常数.

(6) 贝特朗(Bertrand) 曲线　如果两条曲线 C 与 $\overline{C}$ 之间有点的一一对应关系,使得在对应点的主法线互相重合,则称 C 与 $\overline{C}$ 都为**贝特朗曲线**,且每一条称为另一

条曲线的伴线.它的自然方程为

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1, \quad \lambda, \mu = \text{const},$$

也就是说其曲率与挠率有一个常系数的线性组合,其值为1.

(7) 孟恩哈姆(Mannheim)曲线　如果两条曲线 C 与 $\overline{C}$ 之间有点的一一对应关系,使得在对应点 C 的主法线重合于 $\overline{C}$ 的副法线,称 C 为**孟恩哈姆曲线**,$\overline{C}$ 为 C 的伴线.孟恩哈姆曲线的自然方程为

$$\lambda(\kappa^2 + \tau^2) = \kappa, \quad \lambda = \text{const}.$$

1.2.5　空间曲线在一点邻近的形状

(1) 博卡特(Bouquet)公式　选曲线 C 的某定点 $\boldsymbol{r}_0$ 的基本三棱形($\boldsymbol{r}_0;\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\gamma}_0$)为坐标系.不妨取 $s_0 = 0$,设曲线 C 上与 $\boldsymbol{r}_0$ 邻近的点 $\boldsymbol{r}(s)$ 在此坐标系中的坐标为 ξ,η,ζ,则

$$\begin{cases} \xi = s - \dfrac{1}{6}\kappa_0^2 s^3 - \dfrac{1}{8}\kappa_0\dot{\kappa}_0 s^4 + \varepsilon_1 s^4, \\ \eta = \dfrac{1}{2}\kappa_0 s^2 + \dfrac{1}{6}\dot{\kappa}_0 s^3 + \dfrac{1}{24}(\ddot{\kappa}_0 - \kappa_0^3 - \kappa_0\tau_0^2)s^4 + \varepsilon_2 s^4, \\ \zeta = \dfrac{1}{6}\kappa_0\tau_0 s^3 + \dfrac{1}{24}(2\dot{\kappa}_0\tau_0 + \kappa_0\dot{\tau}_0)s^4 + \varepsilon_3 s^4. \end{cases} \tag{1-22}$$

此式称为博卡特公式.

(2) 曲线 C 在 $\boldsymbol{r}_0$ 邻近的形状　由方程

$$\overline{\boldsymbol{r}} = \left(s, \frac{1}{2}\kappa_0 s^2, \frac{1}{6}\kappa_0\tau_0 s^3\right) \tag{1-23}$$

在坐标系($\boldsymbol{r}_0;\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\gamma}_0$)中所确定的曲线为 $\overline{C}$,将(1-23)式与(1-22)式比较不难发现,$\overline{C}$ 与 C 在点 $\boldsymbol{r}_0$ 附近较为接近.故称 $\overline{C}$ 为 C 在这点的近似曲线.式中 s 为 C 的自然参数,但对 $\overline{C}$ 而言并非如此.从 $\overline{C}$ 的形状可以得到曲线 C 在一点 $\boldsymbol{r}_0$ 的邻近的基本形状(见图1-3)如下:

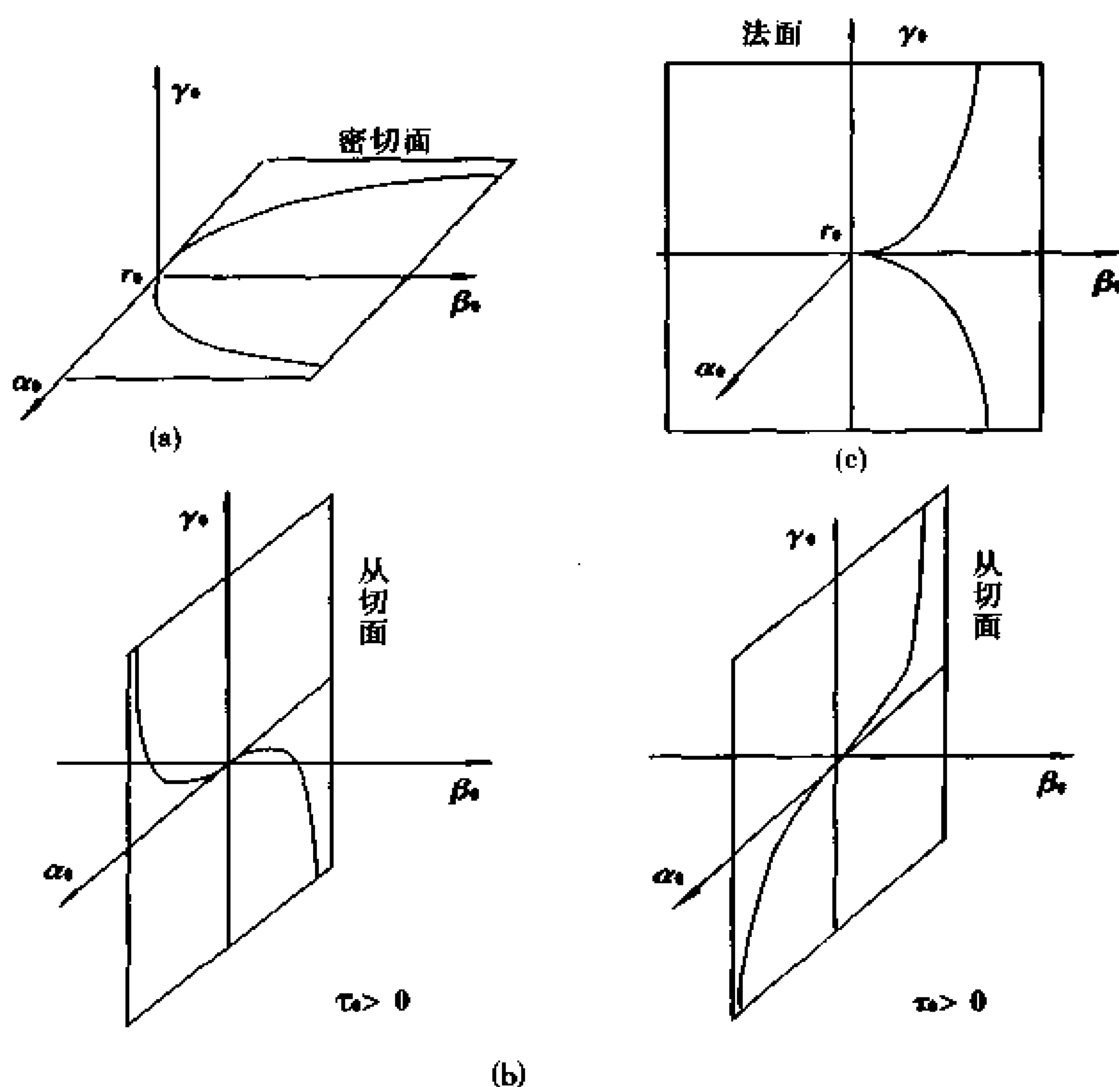
1° C 在 $\boldsymbol{r}_0$ 的密切面上的投影曲线近似于抛物线 $\overline{\boldsymbol{r}} = \left(s, \kappa_0\dfrac{s^2}{2}, 0\right)$,如图1-3(a)所示;

2° C 在 $\boldsymbol{r}_0$ 的从切面上的投影曲线近似于立方抛物线 $\overline{\boldsymbol{r}} = \left(s, 0, \kappa_0\tau_0\dfrac{s^3}{6}\right)$,如图1-3(b)所示.

3° C 在 $\boldsymbol{r}_0$ 的法面上的投影曲线近似于半立方抛物线 $\overline{\boldsymbol{r}} = \left(0, \kappa_0\dfrac{s^2}{2}, \kappa_0\tau_0\dfrac{s^3}{6}\right)$,如图1-3(c)所示.

另外,近似曲线 $\overline{C}$ 在点 $\boldsymbol{r}_0$ 处与曲线 C 有相同的基本三棱形、曲率和挠率.

(3) 曲线与基本平面的关系　曲线与基本三棱形3个平面的关系是曲线穿过法面与密切面,但不穿过从切面.此外,主法向量 $\boldsymbol{\beta}_0$ 总是指向曲线凹入的一方.这是因为主法向量的指向正是如此选取,从而确定了曲率 $\kappa \geqslant 0$.



(b)

图 1-3

1.2.6 空间曲线的密切圆与密切球

通过空间曲线上点 t_0 以及和它邻近的另外3个不同点 t_1, t_2, t_3 所作的球(面)，当 t_1, t_2, t_3 趋近于 t_0 时此球面的极限位置称为曲线在点 t_0 处的**密切球**，而密切球与曲线在这点的密切面的交线称为曲线在这点的**密切圆**. 密切圆的中心称为曲线的**曲率中心**，其半径称为**曲率半径**.

曲线的曲率中心与曲率半径分别为

$$\bar{c} = r + R\beta, \quad R = \frac{1}{\kappa}.$$

曲线的密切球中心与半径分别为

$$c = r + R\beta + \left(\frac{\dot{R}}{\tau}\right)\gamma, \quad r = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\dot{R}}{\tau}\right)^2}.$$

曲线如果在一个球面上，则称为球面曲线. 球面曲线每点的密切球面都是它所在的球面，因此非平面曲线为球面曲线的充分必要条件是其密切球中心 c 为常向量，即

$$R\tau + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\dot{R}}{\tau}\right) = 0.$$

通过曲线的曲率中心 $\bar{c}$ 且平行于曲线在这点副法线的直线

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\beta} + \lambda\boldsymbol{\gamma}, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty)$$

称为曲线在这点的曲率轴或极轴.显然曲线的密切球的中心 $\bar{c}\left(\lambda = \frac{\dot{R}}{\tau}\right)$ 也在极轴上.

1.2.7　空间曲线的渐伸线与渐缩线

如果曲线 C 的每一条切线都是另一条曲线 $\bar{C}$ 的法线,或者说在曲线 C 的切线所构成的切曲面上,$\bar{C}$ 是 C 的切线族的正交轨线,则称 $\bar{C}$ 是 C 的**渐伸线**或**渐**开线,C 是 $\bar{C}$ 的**渐缩线**或渐屈线.

曲线 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 的渐伸线为

$$\bar{C}: \bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(s) + (s_0 - s)\boldsymbol{\alpha}.$$

渐伸线的3个基本向量分别为

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \varepsilon\boldsymbol{\beta}, \ \varepsilon = \operatorname{sgn}(s_0 - s),$$

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\varepsilon(-\kappa\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma})}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}},$$

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{(\tau\boldsymbol{\alpha} + \kappa\boldsymbol{\gamma})}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}.$$

渐伸线的曲率和挠率分别为

$$\bar{\kappa} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{(s_0 - s)\kappa},$$

$$\bar{\tau} = \tau^2 \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)}{(s - s_0)\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}.$$

曲线 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 的渐缩线为

$$\bar{C}: \bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + R(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}\tan\theta),$$

$$\theta = -\int_{s_0}^{s} \tau \mathrm{d}s + \theta_0.$$

渐缩线的3个基本向量分别为

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \varepsilon(\boldsymbol{\beta}\cos\theta + \boldsymbol{\gamma}\sin\theta),$$

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = -\varepsilon_1\boldsymbol{\alpha},$$

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \varepsilon\varepsilon_1(-\boldsymbol{\beta}\sin\theta + \boldsymbol{\gamma}\cos\theta),$$

其中

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}[(\dot{R} - \tau R\tan\theta)\sec\theta],$$

$$\varepsilon_1 = \operatorname{sgn}(\cos\theta).$$

渐缩线的曲率和挠率分别为

$$\bar{\kappa} = \frac{\varepsilon\varepsilon_1\kappa\cos^2\theta}{(\dot{R} - \tau R\tan\theta)},$$

$$\bar{\tau} = -\frac{\kappa\sin\theta\cos\theta}{(\dot{R} - \tau R\tan\theta)}.$$

例如,平面曲线的渐缩线就是它的曲率中心轨迹.因为,对于平面曲线,挠率 $\tau = 0$, $\theta = \theta_0$ 为常数,θ_0 不妨取为零,从

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + R(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}\tan\theta),$$

得

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\beta},$$

这时主法向量即平面曲线的法向量,$\bar{\boldsymbol{r}}$ 正是曲线的曲率中心.对于空间曲线渐缩线依赖于 θ_0 的值,从而并非唯一一条.

1.3 曲线的整体性质

1.3.1 平面曲线的整体性质

(1) 旋转指标　设 $C(\subset E^2)$ 为闭曲线,其方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, s 为弧长参数, $s \in [0, L]$, L 为 C 的周长.可以将 $\boldsymbol{r}(s)$ 延拓为以 L 为周期的周期函数,即有

$$\boldsymbol{r}(s + L) = \boldsymbol{r}(s),$$

从而 C 的曲率 $\kappa(s)$ 也可如此延拓.沿 C 的积分

$$\hat{\kappa} = \int_C \kappa \mathrm{d}s = \int_C \mathrm{d}\varphi = 2\pi k$$

称为 C 的总曲率,其中 φ 是 C 的切向量关于坐标系的倾角.此积分是 2π 的整数(k)倍.总曲率 $\hat{\kappa}$ 也是曲线 C 的切线球面标线 $\bar{C}: \bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\alpha}(s)$ 的有向弧长的代数和,或是 $\bar{C}$ 的代数长度.数 k 称为 C 的旋转指标.

旋转指标定理　一条平面上的简单光滑闭曲线的旋转指标 $k = \pm 1$,或者说其总曲率 $\hat{\kappa} = \pm 2\pi$.此处简单曲线是指曲线上无自相交点.

(2) 凸闭曲线　设简单闭曲线在每点都有切线,且整个曲线都位于每一点切线的同一侧,称此曲线为凸闭曲线.曲线的凸性可用曲率不变号或切线倾角 φ 为 s 的单调函数来刻划.也就是说,平面上简单闭曲线 C 为凸的充分必要条件是曲率 κ 不变号.即适当选取 C 的正向可以使 $\kappa \geqslant 0$ 或 $\kappa \leqslant 0$, $s \in [0, L]$,或 φ 为单调函数.

如果有一条直线与凸闭曲线 C 相交于3个不同点,则通过这3点的整个线段都属于 C.

(3) **四顶点定理**　一条凸闭曲线上使曲率 κ 取逗留值的点称为 C 的顶点,即使得 $\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} = 0$ 的点为顶点.对于圆来说,κ 为常数,在每点都有 $\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} = 0$,故圆的每一点皆为顶点.对于椭圆来说有 4 个顶点,这就是椭圆与其两对称轴的 4 个交点.

平面凸闭曲线的四顶点定理　任意一条凸闭曲线至少有 4 个顶点.

实际上对于异于圆的凸闭曲线有较强于此定理的结论.即对曲率 κ 而言至少有4个极值点.长短半轴不等的椭圆正是在4个顶点上使曲率达到极大与极小值.

(4) 等周不等式　设 C 是平面简单闭曲线,其周长为 L,所围面积为 A,则有如下等周不等式定理.

等周不等式定理　对于平面简单曲线 C,则

1° 它的周长与所围面积之间满足

$$L^2 \geqslant 4\pi A;$$

2° 上式中等号成立的充分必要条件是 C 为圆.

此定理表明,在一切具有固定周长的平面简单闭曲线中,以圆的面积为最大,而别的曲线所围面积都较小,故称它为等周不等式.

1.3.2 空间曲线的整体性质

(1) 空间曲线的总曲率与总挠率　对于空间闭曲线 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$,设 κ, τ 为其曲率和挠率,称沿 C 的积分

$$\widehat{\kappa} = \int_C \kappa \mathrm{d}s, \quad \widehat{\tau} = \int_C \tau \mathrm{d}s$$

分别为 C 的总曲率与总挠率.

芬希尔(Fenchel)定理　一条空间闭曲线 C 的总曲率 $\widehat{\kappa} \geqslant 2\pi$,并且等式成立的充分必要条件是 C 为平面凸闭曲线.

对于空间曲线 C,如果以 C 为边界在空间所作的曲面 $S(\partial S = C)$ 同胚于圆盘(即 S 可连续变形到一个圆盘上),则称 C 是无扭结曲线,否则称 C 是有扭结的曲线.关于有扭结曲线,有如下定理:

法里-米尔诺(Fary-Milnor)定理　一个有扭结的空间简单闭曲线 C 的总曲率

$$\widehat{\kappa} \geqslant 4\pi.$$

关于闭曲线的总挠率,有如下定理:

球面闭曲线的总挠率定理　任意一条球面上闭曲线 C 的总挠率 $\widehat{\tau} = 0$.

(2) 空间曲线的球面标线　设 C 为空间曲线,以它的三基向量 $\boldsymbol{\alpha}$(切向量),$\boldsymbol{\beta}$(主法向量),$\boldsymbol{\gamma}$(副法向量),可以分别得到 C 的切线球面标线 $C_\alpha: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\alpha}(s)$,主法线球面标线 $C_\beta: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\beta}(s)$ 与副法线球面标线 $C_\gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\gamma}(s)$.

一条曲线 C 的切线球面标线 C_α 的弧长正是 C 的总曲率,因此有上述芬希尔定理与法里-米尔诺定理.对于曲线 C 的主法线标线 C_β 有如下定理:

雅可比(Jacobi)定理　设空间闭曲线 C 的曲率 κ 处处非零($\kappa(s) > 0$),它的主法线标线 C_β 是一条简单闭曲线,则 C_β 把单位球面分成面积相等(各为 2π)的两个部分.

球面上闭曲线挠曲比定理　在球面上的任意闭曲线 C,它的挠曲比沿此曲线的积分为零,即

$$\int_C \frac{\tau}{\kappa} \mathrm{d}s = 0.$$

2 曲 面 论

2.1 曲面的方程与基本三棱形

2.1.1 曲面的方程

在选取直角坐标系 $Oxyz$ 或 $Oe_1e_2e_3$ 的三维欧氏空间 E^3 中，曲面 S 常用一般式或参数式表示.

(1) 曲面的一般方程

1° 显式 $$S:\quad z=f(x,y),\tag{2-1}$$
其中 f 为 x,y 的连续可微的函数，$(x,y)\in D$（Oxy 平面上的某开区域），称 S 为简单曲面片. 方程(2-1) 又称曲面的蒙日(Monge) 表示，S 也称为蒙日片. 类似于(2-1)式，$x=g(y,z)$ 或 $y=h(z,x)$ 也表示简单曲面片. 一般所称的曲面是由一些简单曲面片构成. 在一个曲面上的某点，如果存在一个包含该点的简单曲面片，则称此点为曲面的正常点，否则称为奇点.

2° 隐式 $$S:\quad F(x,y,z)=0,$$
其中 F 为 x,y,z 的连续可微函数. 在曲面上，使得秩
$$\mathrm{rank}(F_x,F_y,F_z)=1$$
的点为 S 的正常点，此处记为 $F_x=\partial F/\partial x$ 等等.

(2) 曲面的参数方程
$$S:\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),(u,v)\in D(Ouv\text{ 平面上区域}),\tag{2-2}$$
$$\boldsymbol{r}=(x,y,z),\quad \boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$
其中 x,y,z 为 u,v 的连续可微函数. 在曲面上，使得秩
$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{bmatrix}=2$$
的点为 S 的正常点，此处记为 $x_u=\partial x/\partial u$ 等等.

对方程(2-2) 如果作参数变换
$$u=u(\bar u,\bar v),\quad v=v(\bar u,\bar v),\tag{2-3}$$
则曲面 S 也可以表示为
$$S:\quad \boldsymbol{r}=\bar{\boldsymbol{r}}(\bar u,\bar v)=\boldsymbol{r}(u(\bar u,\bar v),v(\bar u,\bar v)),$$
在此要求变换式(2-3) 满足条件
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar u,\bar v)}=\begin{vmatrix}u_{\bar u} & v_{\bar u}\\ v_{\bar v} & v_{\bar v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

2.1.2 曲面的基本三棱形

对于曲面 S，给出参数所满足的一个关系式，此关系式通常确定了 S 上的一条

曲线,例如

$$\varphi(u,v)=0 \quad 或 \quad v=\phi(u);$$

或

$$u=u(t),\quad v=v(t),\quad t\in I.$$

特别是,取 $v=v_0$(常数),当 u 在所属范围变化时在曲面上所定的曲线称为 u 线,即

$$C_{v_0}:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v_0),$$

同理在 S 上也可定义 v 线,即

$$C_{u_0}:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0,v).$$

一般用方程 $u=u(t),v=v(t)$ 在 S 上确定曲线的切向量,即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}_u u_t+\boldsymbol{r}_v v_t,$$

在此 $\boldsymbol{r}_u=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u},\boldsymbol{r}_v=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v},u_t=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},v_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. u 线的切向量是 $\boldsymbol{r}_u$,v 线的切向量为 $\boldsymbol{r}_v$. 在曲面的正常点 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$,通过此点的所有切向量是 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$ 的线性组合,生成 S 在这点的切平面,而向量

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$$

称为 S 在这点的**法向量**,将它单位化,得

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|}=\frac{(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}.$$

在曲面上的正常点有唯一一个三棱形:

$$(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}).$$

由于 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$ 不一定是单位向量,也不一定互相垂直,因此这个三棱形一般是仿射标架.

通过点 $\boldsymbol{r}$ 且由 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$ 决定的平面称为曲面在这点的**切平面**,其方程为

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})=0 \quad 或 \quad (\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})=0,$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ 为切平面上切点的径向量.

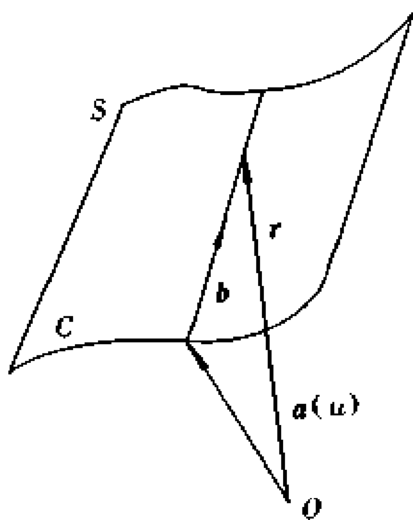


图 2-1

通过点 $\boldsymbol{r}$ 且平行于法向量的直线称为曲面在这点的**法线**,其方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{n} \text{ 或 } \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v,$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ 为法线上动点的径向量.

(1) 以空间曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)$ 为准线,直母线沿着常向量 $\boldsymbol{b}$ 的柱面(见图 2-1) 方程为

$$S:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b},\quad u\in I,v\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 以定点 $\boldsymbol{a}$ 为顶点,$\boldsymbol{b}(u)$ 为直母线方向的锥面(见图 2-2) 方程为

$$S:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}(u),\quad u\in I,v\in(-\infty,+\infty).$$

(3) 用空间曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)$ 的所有切线生成的曲面称为 C 的切线曲面(见图 2-3),方程为

$$S:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{a}'(u),\quad u\in I,v\in(-\infty,+\infty).$$

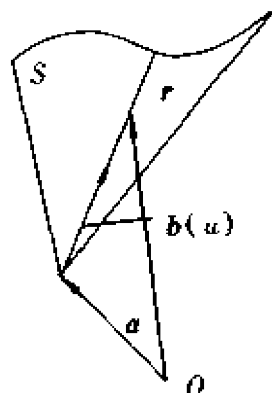


图 2-2

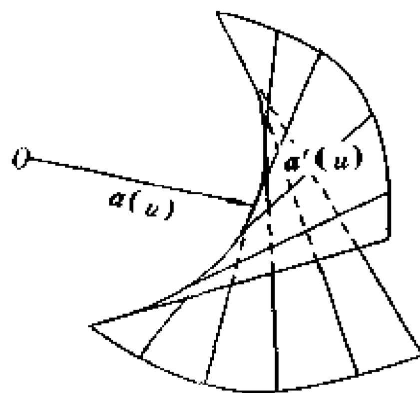


图 2-3

以上3种曲面合称为可展曲面，它是高斯曲率为零的曲面(见2.4.3小节特殊类型曲面).

(4) 把 Oxz 平面上曲线

$$C:\ x = f(u),\quad z = g(u), u \in I$$

绕 Oz 轴旋转一周所生成的曲面称为旋转曲面(见图2-4)，方程为

$$S:\ \boldsymbol{r} = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),$$
$$u \in I,\quad v \in [0,2\pi).$$

特别地，当 $f(u) = R\cos u, g(u) = R\sin u, u \in [-\pi,\pi]$，$R$ 为常数时，所得曲面是半径为 R 的球面，方程为

$$S:\ \boldsymbol{r} = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u).$$

(5) 把(4)中曲线 C 绕 Oz 轴旋转的同时还将沿 Oz 轴移动 av(a 为常数)，所得曲面称为螺旋曲面(见图2-5)，表示为

$$S:\ \boldsymbol{r} = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u) + av).$$

特别地，当 $f(u) \equiv u, g(u) \equiv 0$，所得曲面称为正螺面，表示为

$$S:\ \boldsymbol{r} = (u\cos v, u\sin v, av).$$

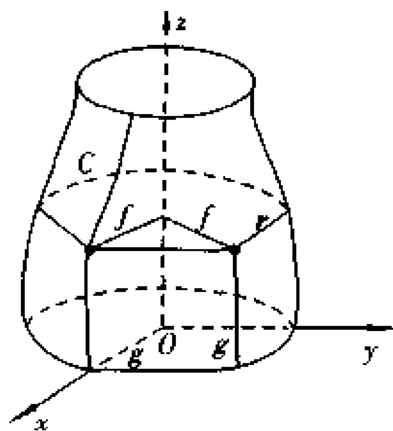


图 2-4

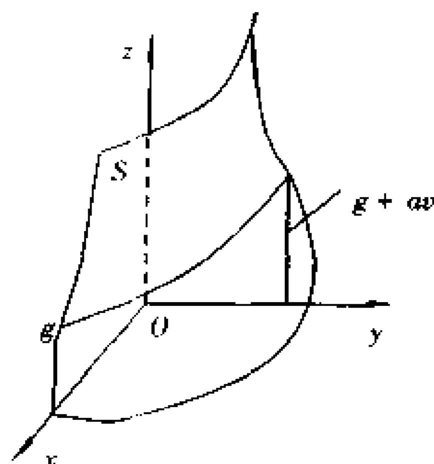


图 2-5

2.2 曲面的第一基本形式

2.2.1 曲面上曲线的弧微分与曲面的第一基本形式

在曲面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ 上的二次微分形式

$$I = \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2$$

称为**曲面 S 的第一基本形式**或齐式，其中

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2,$$

I 是 S 上曲线弧微分的平方，又称为曲面的线素．它是关于 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 的正定二次齐式，其系数 E,F,G 是 u,v 的函数，且满足

$$E > 0, \quad G > 0, \quad D^2 = EG - F^2 > 0.$$

曲面上的度量性质由 I 确定．

在曲面参数变换

$$u = u(\bar{u},\bar{v}), \quad v = v(\bar{u},\bar{v})$$

下，曲面的法向量变换式为

$$\boldsymbol{r}_{\bar{u}} \times \boldsymbol{r}_{\bar{v}} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v,$$

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{sgn}\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}.$$

而第一基本形式系数的变换式为

$$\bar{E} = E\,u_{\bar{u}}^2 + 2Fu_{\bar{u}}v_{\bar{u}} + Gv_{\bar{u}}^2,$$

$$\bar{F} = E\,u_{\bar{u}}u_{\bar{v}} + F(u_{\bar{v}}v_{\bar{u}} + u_{\bar{u}}v_{\bar{u}}) + Gv_{\bar{u}}v_{\bar{v}},$$

$$\bar{G} = E\,u_{\bar{v}}^2 + 2Fu_{\bar{v}}v_{\bar{v}} + Gv_{\bar{v}}^2.$$

而它的判别式变换式为

$$\bar{D}^2 = \bar{E}\,\bar{G} - \bar{F}^2 = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}D^2. \tag{2-4}$$

2.2.2 曲面上曲线的弧长与曲面的面积

曲面上曲线：$u = u(t), v = v(t)$ 从点 t_0 到 t 的弧长为积分

$$s = \int_{t_0}^{t}\sqrt{I} = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,\mathrm{d}t.$$

曲面上区域 $R: u_0 \leqslant u \leqslant u_1, v_0 \leqslant v \leqslant v_1$ 的面积为

$$A = \iint_R D\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_R \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

2.2.3 曲面上两曲线的夹角

曲面上两条曲线在交点处的两切线间的夹角定义为这两曲线在这点处的夹

角.设这两曲线的切向量分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v, \quad \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\delta u + \boldsymbol{r}_v\delta v,$$

则它们之间夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta = \frac{E\mathrm{d}u\delta u + F(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

u 线的切向量为 $\mathrm{d}u = 1, \mathrm{d}v = 0$, v 线的切向量为 $\delta u = 0, \delta v = 1$,从上式可知两参数曲线的夹角 ω 由下式确定

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

两族参数曲线构成的参数网也称为坐标网,坐标网为正交网的充分必要条件是 $F = 0$,即第一基本形式取标准形式,或不含混乘项:

$$I = E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2.$$

如果从逆着曲面在某点的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向看去,切平面上两个方向 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$(单位向量)之间的有向角为 φ,其计算公式为

$$\cos\varphi = \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{E\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 + F(\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_2 + \mathrm{d}u_2\mathrm{d}v_1) + G\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2},$$

$$\sin\varphi = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{n}) = D\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}s_1}\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}s_2} - \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}s_2}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}s_1}\right).$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i = \dfrac{\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u_i + \boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}s_i}, i = 1,2.$

(1) 柱面　柱面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(s) + v\boldsymbol{\tau}$,其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为常单位向量,即 $\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\tau}^2 = 1$. $\boldsymbol{\rho}(s)$ 是一条柱面母线的正交轨线的定位向量,于是 $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\alpha}$(切向量)与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直,即 $\dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\tau} = 0$,因此,柱面的第一基本形式

$$I = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2.$$

(2) 锥面　锥面 $\boldsymbol{r} = v\boldsymbol{\tau}(s)$,其中 $\boldsymbol{\tau}^2 = 1$,且 s 为锥面上锥线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\tau}(s)$ 的弧长参数,于是 $\boldsymbol{\tau}'^2 = 1$,从而锥面的第一基本形式

$$I = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2.$$

(3) 切线曲面　切面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(s) + v\boldsymbol{\alpha}(s)$,其中曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(s)$ 的切向量 $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\rho}}$,从而切线曲面的第一基本形式

$$I = (1 + v^2\kappa^2)\mathrm{d}u^2 + 2\mathrm{d}s\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2.$$

(4) 球面　球面 $\boldsymbol{r} = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$ 的第一基本形式

$$I = R^2[\mathrm{d}u^2 + (\cos^2 u)\mathrm{d}v^2].$$

2.2.4 曲面之间的映射

如果对于两个曲面

$$S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v),$$
$$\overline{S}: \overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(\overline{u}, \overline{v}),$$

有参数 (u, v) 与 $(\overline{u}, \overline{v})$ 之间的一一对应

$$\begin{cases}\bar{u}=\bar{u}(u,v), & \dfrac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}\neq 0,\\ \bar{v}=\bar{v}(u,v), & \end{cases} \tag{2-5}$$

使得 $\varphi: S\to\bar{S}, \boldsymbol{r}(u,v)\mapsto\bar{\boldsymbol{r}}(\bar{u},\bar{v})$，称 φ 为 S 到 $\bar{S}$ 的映射或变换.(2-5)式中的不等式保证 φ 在局部是可逆的一一对应.

(1) 等距映射　如果曲面 S 到 $\bar{S}$ 的映射 φ 保持任意对应曲线的弧长不变，称 φ 为**等距映射**，此时两个曲面称为等距等价的.

曲面 S 与 $\bar{S}$ 为等距等价的充分必要条件是适当选取公共的参数 u 与 v 时，它们有相同的第一基本形式，即 $I=\bar{I}$，或有相同的第一类基本量 $E=\bar{E}, F=\bar{F}, G=\bar{G}$. 由此可见，在曲面上仅由第一基本形式所确定的量都是等距映射下不变的量. 例如，曲线的弧长、夹角、曲面上某区域的面积等都是等距不变量. 通常把由 E, F, G(包括它们的各阶导数)所确定的量称为曲面的内在量或内蕴量. 由内在量确定的几何性质称为曲面的内在性质.

1° 正螺面 $\boldsymbol{r}=(u\cos v, u\sin v, av)(-\infty<u,v<+\infty)$ 与悬链面 $\bar{\boldsymbol{r}}=\left(a\cosh\dfrac{t}{a}\cos\theta, a\sinh\dfrac{t}{a}\sin\theta, t\right)(0\leqslant\theta<2\pi, -\infty<t<+\infty)$ 是等距的曲面.

正螺面的第一基本形式 $I=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$.

悬链面的第一基本形式 $\bar{I}=\left(\cosh\dfrac{t}{a}\right)^2(\mathrm{d}t^2+a^2\mathrm{d}\theta^2)$.

对正螺面作参数变换 $u=a\sinh\dfrac{t}{a}, v=\theta$，则有 $I=\bar{I}$，这表明在正螺面上取 $0\leqslant v<2\pi$ 的一段与整个悬链面等距等价.

2° 可展曲面与平面是等距的曲面，也称可展曲面与平面可以贴合(见2.4.3小节).

对于柱面 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+v\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha\tau}=0, \boldsymbol{\tau}^2=1$，第一基本形式为 $I=\mathrm{d}s^2+\mathrm{d}v^2$；对于锥面 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}_0+v\boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{\tau}^2=1, \dot{\boldsymbol{\tau}}^2=1, \boldsymbol{\tau}\dot{\boldsymbol{\tau}}=0$，第一基本形式为 $I=v^2\mathrm{d}s^2+\mathrm{d}v^2$；以上两种基本形式分别与平面在直角坐标系与极坐标系下的第一基本形式相同. 对于切线曲面 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+v\boldsymbol{\alpha}(s)$，第一基本形式为 $I=(1+\kappa^2v^2)\mathrm{d}s^2+2\mathrm{d}s\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2$，它完全由曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率确定，因此可以用曲率 $\kappa(s)$ 与挠率 $\tau=\tau(s)\equiv 0$ 来作一平面曲线，其切线曲面为一平面，其第一基本形式与切线曲面一致. 综上所述，可展曲面都与平面等距等价.

(2) 等角映射　如果曲面 S 到 $\bar{S}$ 的映射 φ 保持任意两条相交曲线的夹角不变，则称 φ 为**等角(或保角)映射**.

曲面 S 与 $\bar{S}$ 之间的映射 φ 是等角的充分必要条件是适当选取公共参数 u 与 v 时，它们的两个第一基本形式成比例，即 $I=\lambda^2\bar{I}$.

任意曲面在局部范围内与平面之间存在等角映射. 从理论上讲此问题等价于任意曲面都存在局部的等温网，使曲面的第一基本形式写成 $I=\lambda^2(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2), \lambda=\lambda(u,v)\neq 0$，而 $\bar{I}=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2$ 正是平面的第一基本形式，从而曲面与平面有等角映射(见2.3.3小节).

下面对单位球面作这种等角映射. 设单位球面为

$$r = (\cos v\cos u, \cos v\sin u, \sin v),\quad u \in [0,2\pi), v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

单位球面第一基本形式为

$$I = du^2\cos^2 v + dv^2.$$

对于平面,在直角坐标系 Oxy 下,单位球面第一基本形式为

$$\bar{I} = dx^2 + dy^2.$$

作对应

$$\varphi:\ x = u, y = \ln\left|\tan\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

则有

$$\bar{I} = dx^2 + dy^2 = \frac{1}{\cos^2 v}(du^2\cos^2 v + dv^2) = \frac{1}{\cos^2 v}I.$$

由此可见,整个球面与平面上一个带形 $0 \leqslant x < 2\pi$ 是等角映射的.

(3) 等积映射. 如果曲面 S 到 $\bar{S}$ 的映射 φ 保持任意对应区域的面积不变,称 φ 为保积或**等积映射**.

曲面 S 与 $\bar{S}$ 之间的映射是等积的充分必要条件是适当选取公共参数时,它们的第一基本形式的判别式相等,即

$$EG - F^2 = \bar{E}\,\bar{G} - \bar{F}^2.$$

2.3　曲面的第二基本形式与各种曲率

2.3.1　曲面的第二,三基本形式

(1) 曲面的第二基本形式　曲面 $S: r = r(u,v)$ 的定位向量的二阶微分 $d^2 r$ 在曲面于这点的法向量 n(或法线)上的投影

$$\mathrm{II} = n d^2 r = -dn dr = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

称为**曲面 S 的第二基本形式**或齐式,其中

$$L = n r_{uu} = -n_u r_u = (r_u, r_v, r_{uu})/D,$$

$$M = n r_{uv} = -n_u r_v = -n_v r_u = (r_u, r_v, r_{uv})/D,$$

$$N = n r_{vv} = -n_v r_v = (r_u, r_v, r_{vv})/D,$$

$$D^2 = EG - F^2.$$

第二基本形式的几何意义:设曲面 S 在点 r_0 的切平面为 π,而 r 是 S 上与 r_0 邻近的点. 则 r 到 π 的有向距离

$$\delta(r,\pi) = n_0(r - r_0) = \frac{1}{2}\mathrm{II}_0 + \frac{1}{2}n_0\varepsilon(\Delta s)^2.$$

换句话说,有向距离 δ 的主部是曲面在点 r_0 的第二基本形式 II_0 之半. 或者说点 r_0 的第二基本形式近似于邻近点到切平面有向距离的两倍. 见图 2-6.

(2) 曲面的第三基本形式　曲面 S 的球面映射或高斯映射 g 是 $g: S \to S^1$(单位球面),它使曲面上点 r 对应于单位球面 S^1 上点 $\bar{r} = n(u,v)$(n 是 S 在点 r 的法向量). S 的球面映射象是指曲面 $g(S) = \bar{S}: \bar{r} = n(u,v)$. $\bar{S}$ 的第一基本形式 $\bar{I} =$

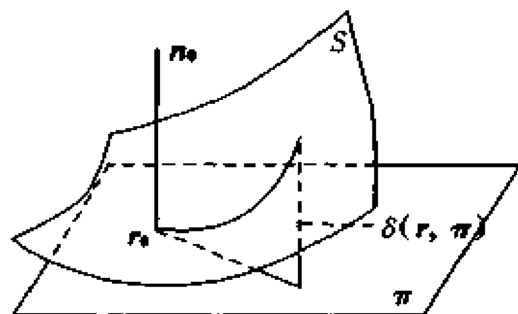


图 2-6

dn^2 称为曲面 S 的第三基本形式，即

$$\mathrm{III} = \bar{I} = dn^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2,$$

其中

$$e = n_u^2,\quad f = n_u n_v,\quad g = n_v^2.$$

也就是说，曲面 S 的第三基本形式是其球面映射像 $\bar{S} = g(S)$ 的第一基本形式.

曲面的3个基本形式之间满足公式

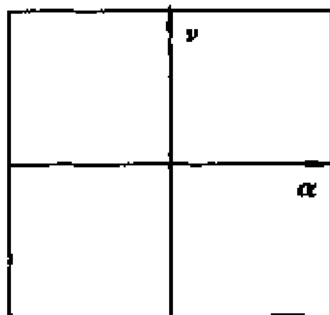
$$K\mathrm{I} - 2H\mathrm{II} + \mathrm{III} = 0,$$

其中 K 与 H 分别为曲面的全曲率与平均曲率(见2.3.2小节).

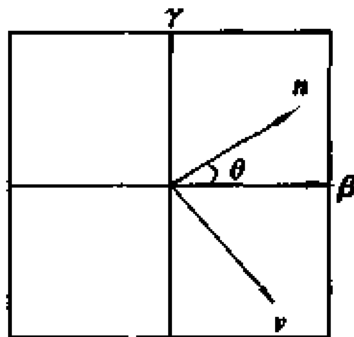
2.3.2 曲面的各种曲率

1. 法曲率与测地曲率

曲面 S 上的曲线 C 除它自己的切向量、主法向量和副法向量构成的基本三棱形$(\boldsymbol{r};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$之外，还有和 S 有关的第二种基本三棱形$(\boldsymbol{r};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{n})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 C 的切向量，$\boldsymbol{n}$ 为在这点处 S 的法向量，而 $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha}$ 是 S 的切平面上与 $\boldsymbol{\alpha}$ 垂直的单位向量(见图2-7)，记 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 θ.



在 S 的切平面上



在 C 的法平面上

图 2-7

将曲线 C 的曲率向量 $\ddot{\boldsymbol{r}} = \kappa\boldsymbol{\beta}$ 分别向第二种基本三棱形$(\boldsymbol{r};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{n})$中法平面上的向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{\nu}$ 的方向作投影得出曲面上两种重要的曲率.

(1) 法曲率　将 $\ddot{\boldsymbol{r}} = \kappa\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 作内积，得到在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影

$$\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{n}d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \kappa\boldsymbol{n}\boldsymbol{\beta} = \kappa\cos\theta.$$

定义

$$\kappa_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \tag{2-6}$$

为曲面在点 $\boldsymbol{r}$ 处沿切方向$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$的**法曲率**.因此有

$$\kappa_n = \kappa\cos\theta, \tag{2-7}$$

即曲线的曲率 κ 与沿其切方向的法曲率κ_n 之间满足(2-7)式或 $\kappa_n/\kappa = \cos\theta$,其中 θ 是曲线主法向量与曲面法向量之间的夹角.

1° 法曲率的几何意义　通过 S 在某点的法线的平面与 S 的交线 C 称为 S 在这点的法截线,其主法向量与 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 平行,$\overline{\boldsymbol{\beta}} = \pm \boldsymbol{n}$,$\theta = 0$或$\pi$.从(2-7)式得 $\kappa_n = \pm \overline{\kappa}$,或 $\overline{\kappa} = |\kappa_n|$.这样一来,法曲率的绝对值就是曲面在这点沿此切方向的法截线的曲率.使法曲率 κ_n 或第二基本形式 Ⅱ 为零的方向$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$称为曲面在这点的渐近方向.

2° 对于非渐近方向,$\kappa_n \neq 0$,设 $\kappa \neq 0$,记 $R_n = \dfrac{1}{\kappa_n}$,$R = \dfrac{1}{\kappa}$,将(2-7)式改写为

$$R = R_n\cos\theta, \tag{2-8}$$

R_n 与 R 分别为曲线 $\overline{C}$(法截线)与曲线 $C(\subset S)$ 的曲率半径.下述定理揭示了公式(2-8)的几何意义.

默尼埃(Meusnier)定理　若点 $\boldsymbol{r}\in C \subset S$,而 C 的切方向并非 S 在这点的渐近方向,则 C 在点 $\boldsymbol{r}$ 的曲率中心 O 是沿此切方向的法截线 $\overline{C}$ 的曲率中心 $\overline{O}$ 在 C 的密切平面上的投影.如图 2-8 所示.

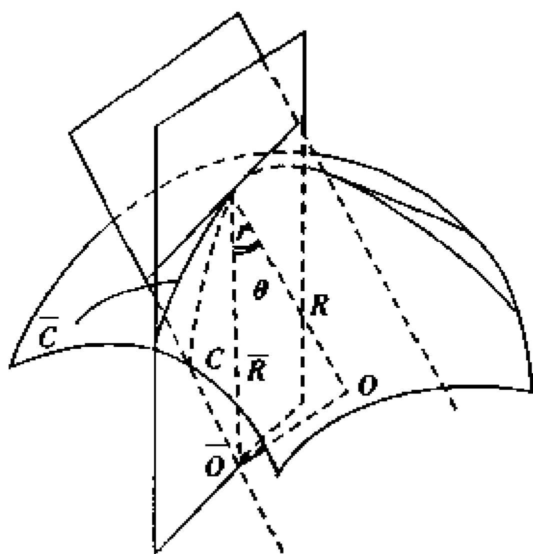


图 2-8

(2) 测地曲率　将 $\ddot{\boldsymbol{r}} = \kappa\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 作内积,得到在 $\boldsymbol{v}$ 上的投影

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}\ddot{\boldsymbol{r}} &= (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{n},\dot{\boldsymbol{r}}\,\ddot{\boldsymbol{r}}) \\ &= \kappa(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta} = \kappa\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{n} \\ &= \pm\,\kappa\sin\theta. \end{aligned}$$

定义

$$\kappa_g = (\boldsymbol{n},\dot{\boldsymbol{r}}'\ddot{\boldsymbol{r}}') = \kappa\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{n} = \pm\,\kappa\sin\theta$$

为曲面上曲线 C 在这点关于曲面 S 的**测地曲率**.

1° 测地曲率的几何意义　若点 $\boldsymbol{r}\in C\subset S$,而 S 在点 $\boldsymbol{r}$ 的切平面为 π,C 在 π 上的投影曲线为 $\overline{C}$,则 $\overline{C}$ 在点 $\boldsymbol{r}$ 的曲率等于 C 在点 $\boldsymbol{r}$ 的测地曲率的绝对值,即 $\overline{\kappa} = |\kappa_g|$.

2° 测地曲率的计算公式　在曲面 S 的正交网中,$F = 0$,选取切平面上 u 线的单位切向量 $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}$,与 v 线的单位切向量 $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}$,记 $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{n}$,作曲面的活动标架$(\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$.设曲线 $C(\subset S)$ 的切向量为 $\boldsymbol{\alpha}$,从 $\boldsymbol{e}_1$ 到 $\boldsymbol{\alpha}$ 的有向角为 τ,则 C 关于 S 的测地曲率计算公式为

$$\kappa_g = \frac{d\tau}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\tau + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\tau.$$

曲面上测地曲率 $\kappa_g = 0$ 的曲线称为曲面上的测地线或短程线.

曲面上曲线的曲率与其相应的法曲率和测地曲率之间满足公式

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2.$$

(3) 测地挠率　设 $C(\subset S)$ 是曲面上一条非直线的测地线,它的挠率

$$\tau = \dot{\boldsymbol{\beta}}\,\boldsymbol{\gamma} = (\dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}).$$

1° 测地挠率的几何意义　但对于测地线而言,其主法向量与 S 的法向量平行,$\boldsymbol{\beta} = \pm \boldsymbol{n}$,代入上式,记为

$$\tau_g = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{n}, \dot{\boldsymbol{n}}) = (\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{n}, \dot{\boldsymbol{n}}) = \frac{1}{I}(d\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, d\boldsymbol{n}), \tag{2-9}$$

其中 I 为 S 的第一基本形式,称 τ_g 为 S 在点 $\boldsymbol{r}$ 沿切方向 $d\boldsymbol{r}$ 的测地挠率或短程挠率.从(2-9) 式可见测地挠率类似于法曲率,对于确定的点,它只依赖于切方向.如果一条测地线并非直线,则它的挠率正是其切方向的测地挠率,这就是测地挠率的几何意义.

2° 测地挠率的计算公式　(2-9) 式也可写成

$$\tau_g = \frac{1}{D\,\mathrm{I}}\begin{vmatrix} dv^2 & -dv du & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}, \tag{2-10}$$

其中 $D = \sqrt{EG - F^2}$,I 为 S 的第一基本形式.

将公式(2-10) 与(2-15) 比较,可知在曲面上某点的主方向就是测地挠率为零的方向;曲率线就是沿着它的每一点的切方向都是测地挠率为零的方向.

对于一条异于直线的曲面上的渐近曲线,它在每点的挠率等于曲面在这点沿此切方向的测地挠率.

测地挠率的贝特朗公式为

$$\tau_g = (\kappa_2 - \kappa_1)\sin\varphi\cos\varphi, \tag{2-11}$$

其中 κ_i 为曲面的主曲率,φ 是所对应切方向与第一主方向的有向角.

3° 测地挠率与法曲率的关系为

$$\tau_g = \frac{1}{2}\frac{d\kappa_n}{d\varphi}.$$

此式可由公式(2-11) 与欧拉公式(2-17) 推出.

2. 主曲率、全曲率与中曲率

(1) 主曲率与主方向　在曲面上某一点的法曲率 κ_n 依赖于切方向(du, dv),对于不同方向 κ_n 的值一般不相同,如果用切平面上一个角 $\varphi \in [0, 2\pi]$ 来作自变量,则法曲率 $\kappa_n = \kappa_n(\varphi)$ 为 φ 的函数.法曲率关于切方向的逗留值,即是使 $d\kappa_n/d\varphi = 0$ 的 κ_n 称为曲面在这点的主曲率,相应的切方向称为主方向.如果在曲面的某点,沿所有的方向,法曲率都相同,则由(2-6) 式可知,κ_n 与(du, dv) 无关,两个基本形式 Ⅰ 与 Ⅱ 成比例,或

$$L : M : N = E : F : G,$$

称此点为**脐点**．全部由脐点构成的曲面是平面或球面，或是它们的一部分．

在曲面的非脐点处，法曲率的两个逗留值也是极值，一个取极大，一个取极小，记

$$\kappa_1 = \min(\kappa_n) \leqslant \kappa_2 = \max(\kappa_n).$$

1° 主曲率的方程　主曲率 κ_i 由以下方程确定：

$$\begin{vmatrix} \kappa_i E - L & \kappa_i F - M \\ \kappa_i F - M & \kappa_i G - N \end{vmatrix} = 0 \tag{2-12}$$

或

$$(EG - F^2)\kappa_i^2 - (EN - 2FM + GL)\kappa_i + (LN - M^2) = 0. \tag{2-13}$$

2° 主方向的方程　主方向$(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$由以下方程确定：

$$\begin{vmatrix} E\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v & F\mathrm{d}u + G\mathrm{d}v \\ L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v & M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v \end{vmatrix} = 0, \tag{2-14}$$

或

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}v\mathrm{d}u & \mathrm{d}u^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{2-15}$$

对于曲面的非脐点，从(2-14)式可以得到曲面的两个不同主方向，而且两个不同主方向是互相垂直的．

(2) 全曲率与中曲率　由曲面的两个主曲率 κ_1, κ_2 所确定的 $K = \kappa_1\kappa_2, H = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{2}$ 分别称为曲面的**全曲率**(高斯曲率)和**中曲率**(平均曲率)．反之由这两种曲率又可以确定两个主曲率：

$$\kappa_1 = -H - \sqrt{H^2 - K},\ \kappa_2 = -H + \sqrt{H^2 - K}.$$

据(2-13)式由二次方程根与系数关系立即可得全曲率与中曲率的计算公式

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{2-16}$$

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2EG - F^2}.$$

1° 欧拉(Euler)公式　曲面在一点处的不同方向的法曲率与两个互相垂直的主方向的主曲率有如下关系

$$\kappa_n = \kappa_1\cos^2\varphi + \kappa_2\sin^2\varphi, \tag{2-17}$$

其中 φ 是从第一主方向(对应于 κ_1)到法曲率所对应方向的有向角．

2° 主方向的特征(罗德里格斯(Rodrigues)公式)　曲面在一点处主方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$(或$(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$)的特征(或者说其充分必要条件)是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n} = -\kappa_i \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

也就是说，沿此方向曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ 与曲面的切方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 平行．

3. 曲面上点的分类与密切抛物面

曲面上的点按全曲率 K 的符号共分为3类，$K > 0, K < 0$ 与 $K = 0$ 的点分别称为**椭圆点**，**双曲点**与**抛物点**．由(2-16)式知，K 的符号也就是第二基本形式 Ⅱ 的

判别式 $LN-M^2$ 的符号.

曲面在它的每一点 $\boldsymbol{r}_0$ 处的切平面上定义一个迪潘(Dupien)标线.在直角坐标系($\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{e}_{10},\boldsymbol{e}_{20},\boldsymbol{e}_{30}$)中,标线用方程

$$\kappa_1x^2+\kappa_2y^2=\pm1, z=0 \tag{2-18}$$

给出.其中 $\boldsymbol{e}_{10}$ 与 $\boldsymbol{e}_{20}$ 是沿曲面在点 $\boldsymbol{r}_0$ 的主方向的单位向量,$\boldsymbol{e}_{30}$ 是曲面的单位法向量.(2-18)式中第一式的正负号选取是使得标线为实曲线.

曲面在它的每一点 $\boldsymbol{r}_0$ 处还可以定义一个曲面在这点的密切抛物面,在上述直角坐标系中,抛物面用方程

$$2z=\kappa_1x^2+\kappa_2y^2$$

给出.

对于曲面上的3种点,相应的标线与密切抛物面如表2-1所示.

表 2-1

点的类型	K 或 $LN-M^2$ 的符号	标　　线	密切抛物面
椭圆点	>0	椭圆	椭圆抛物面
双曲点	<0	双曲线	双曲抛物面
抛物点	$=0$	一对平行直线	抛物柱面

对于椭圆点,若又满足 $L:M:N=E:F:G$,则称为脐点,也称为圆点.对于抛物点,若又满足 $L:M:N=E:F:G$,只可能 $L=M=N=0$,则称为平点.因为在这两种情况下,曲面上的点分别在球面与平面上.

4. 曲面在一点邻近的形状

曲面在其一点邻近的形状对于不同类型的点,形状各不相同,近似于曲面在这点的密切抛物面的形状.

(1) 在椭圆点,由于 $K=\kappa_1\kappa_2>0$,两主曲率同号,任意方向的法曲率介于它们之间,所以 κ_n 与 κ_i 也同号.故所有法截线朝切平面的同一侧弯曲,因此曲面在这点邻近的部分都在切平面的同一侧,并且只有这点在切平面上(见图2-9).

(2) 在双曲点,由于 $K=\kappa_1\kappa_2<0$,两主曲率异号,有两个渐近方向,据欧拉公式 $\kappa_n=\kappa_1\cos^2\varphi+\kappa_2\sin^2\varphi=0$,得

$$\tan\varphi=\pm\sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2}},$$

即两个渐近方向都与每个主方向成等角(见图2-10).

渐近方向把主方向隔离在两对对顶角内.在其中一对对顶角里法曲率 $\kappa_n>0$,在另一对对顶角里 $\kappa_n<0$,故法截线朝切平面的两侧弯曲.曲面在这点与切平面相交,其交线在这点的切方向正是两个渐近方向.曲面在这点邻近形状近似于双曲抛物(马鞍)面(见图2-11).

(3) 在抛物点,由于 $K=\kappa_1\kappa_2=0$,至少有一个主曲率为零,其对应的主方向又是渐近方向.法曲率 κ_n 不变号,因此,在抛物点,除在渐近方向以外,一切法截线都朝切平面的同一侧弯曲(见图2-12).当两个主曲率都为零时,这点是平点.

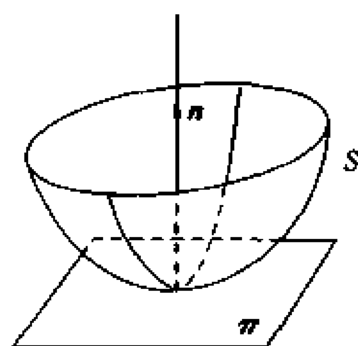


图 2-9

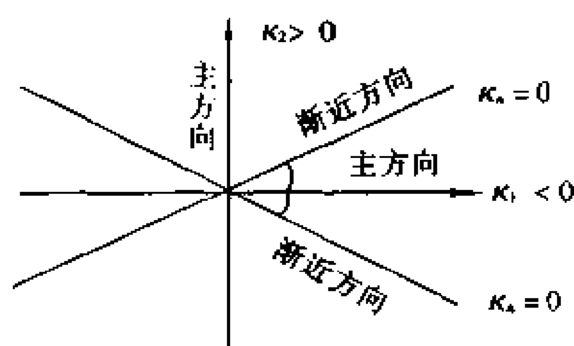


图 2-10

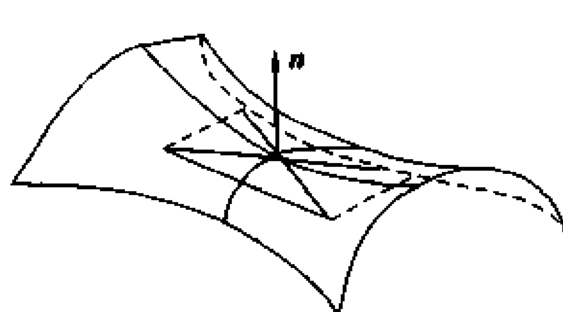


图 2-11

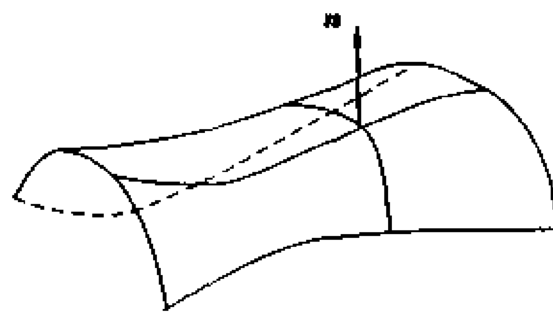


图 2-12

5. 曲面上各种曲率及相互关系

曲面上各种曲率及其相互关系如图 2-13 所示.

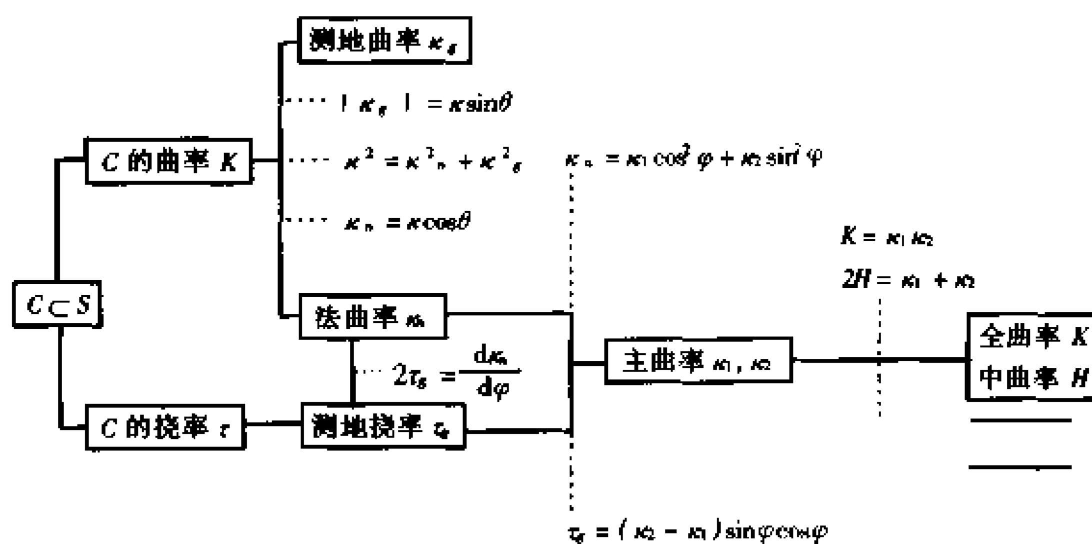


图 2-13

2.3.3 曲面上的曲线与曲线网

1.曲面上的曲线

(1) 曲率线　曲线 $C(\subset S)$ 为曲率线，即它的每一点切方向都是曲面的主方向.曲率线的微分方程为

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dvdu & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

特别地，u 线是曲率线的条件是 $FN - GM = 0$；v 线是曲率线的条件是 $EM - FL = 0$.

曲率线的几何特征：沿曲率线曲面法向量 $\boldsymbol{n}$ 的微分 $d\boldsymbol{n}$ 与曲线的切方向 $d\boldsymbol{r}$ 平行；或沿曲率线曲面的法线曲面构成可展曲面.

因为球面或平面上任意方向都是主方向，所以在这两种曲面上，任意曲线都是曲率线.

(2) 渐近曲线　曲线 $C(\subset S)$ 的每一点的切方向都是曲面的渐近方向，称 C 为 S 的渐近曲线，渐近曲线的微分方程为

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0.$$

在 S 上由椭圆点构成的区域里($K > 0$)，不存在实的渐近曲线；在 S 上由双曲点构成的区域里($K < 0$)，存在两族不同的渐近曲线；在 S 上由抛物点构成的区域里($K = 0$)，存在一族渐近曲线.

渐近曲线的几何特征：沿渐近曲线，曲面法向量 $\boldsymbol{n}$ 的微分 $d\boldsymbol{n}$ 与曲线的切方向 $d\boldsymbol{r}$ 垂直；或是曲线为直线，或是曲线在每一点的密切平面都重合于曲面的切平面.

(3) 测地线　在曲面 S 上测地曲率在每点都为零的曲线 C 称为 S 的测地线或短程线.

类似于平面上的直线.在参数网为正交网的情况下($F = 0$)，测地线的微分方程为

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}}\cos\tau, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}}\sin\tau, \tag{2-19}$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\tau - \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\tau,$$

或为

$$\frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{E}{G}}\tan\tau,$$

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\tan\tau, \tag{2-20}$$

其中 τ 为从 u 线到所求测地线的有向角.

(2-19)式和(2-20)式分别是以 s 为自变量，以 u, v, τ 为未知函数和以 u 为自变量，以 v, τ 为未知函数的常微分方程组.在给出相应初始条件下有唯一的解.这说明，在 S 上任意一点(u_0, v_0)的任意切方向 τ_0，存在唯一一条 S 的测地线$(u(s),$

$v(s)), s \in [s_0, s_1]$.

1° 测地线的几何特征　C为S上的测地线的充分必要条件是,或C为直线,或沿C的每点的从切平面重合于S的切平面,亦即沿C的每点其主法线重合于S的法线,即 $\boldsymbol{\beta} = \pm \boldsymbol{n}$.例如,旋转曲面上的径线是测地线,球面上的大圆为测地线.

2° 测地线段的最短性　曲面上在允许有测地平行网的适当区域内,在连接任意两点之间的曲线段中以测地线段的弧长为最短.例如,球面上连接任意两点之间的最短距离是过这两点大圆上的劣弧之长.

2. 曲面上的曲线网

(1) 正交网　在曲面上由两族曲线构成的图形一般称为**曲线网**.由u线与v线构成的网称为参数网.参数网为**正交网**的充分必要条件是第一基本形式化为平方和,或 $F = 0$.

(2) 共轭网　在曲面S上两个切方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与 $\delta\boldsymbol{r}$ 如果关于第二基本形式 $\mathrm{II} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}^2\boldsymbol{r} = -\mathrm{d}\boldsymbol{n}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 共轭,即满足 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{n}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$,称 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与 $\delta\boldsymbol{r}$ 为S上的一对共轭方向.如果曲面上两族曲线的方向在每点都是共轭方向,则称这两族曲线构成**共轭网**.参数网为共轭网的充分必要条件是第二基本形式为标准型,即 $M = 0$.

(3) 曲率网　在曲面上由两族曲率线构成的网称为**曲率网**.在平面和球面上任意曲线为曲率线,因此,在这两种曲面上任意正交网都是曲率网,两个主方向即是正交方向也是共轭方向,因此,参数网为曲率网的充分必要条件是

$$F = M = 0.$$

例如,在2.1节(4)中给出的旋转曲面 $S: \boldsymbol{r} = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ 的第一、二基本形式为

$$\mathrm{I} = (f'^2 + g'^2)\mathrm{d}u^2 + f^2\mathrm{d}v^2,$$

$$\mathrm{II} = \frac{f'g'' - g'f''}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}\mathrm{d}u^2 + \frac{fg'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}\mathrm{d}v^2,$$

故参数网(由径、纬线构成)为曲率网.

(4) 测地平行网　由曲面上一族测地线及其正交轨线构成的曲线网称为**测地平行网**.参数网为测地平行网的充分必要条件是曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + G(u, v)\mathrm{d}v^2.$$

(5) 等温网　曲面的第一基本形式如果写成

$$\mathrm{I} = \lambda^2(u, v)(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2),$$

则称参数网为**等温网**.任意曲面存在局部的等温网.因为平面的第一基本形式可写为 $\mathrm{I}_0 = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$,上式表明,任意曲面可以局部地共形于平面,即 $\mathrm{I} = \lambda^2 I_0$.

(6) 切比雪夫(Chebyshev)网　如果在曲线网中任意曲线四边形的对边都相等,则称这曲线网为**切比雪夫网**.参数网为切比雪夫网的充分必要条件是 $E_v = G_u = 0$.因此切比雪夫网的第一基本形式为

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + 2\cos\omega\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2,$$

其中 ω 为参数曲线之间的夹角.

2.4 曲面的基本公式、方程与定理

2.4.1 曲面的基本公式与基本方程

1. 曲面的基本公式

记曲面的两个自变量为 $u^1 = u, u^2 = v$,曲面方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^i)$,又记 $\boldsymbol{r}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}(i = 1,2)$.曲面的基本三棱形为$(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n})$.改记曲面的两个基本形式为

$$\begin{cases} \mathrm{I} = g_{ij}(u^k)\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j, \\ \mathrm{II} = b_{ij}(u^k)\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j, \end{cases} \quad i,j,k = 1,2, \tag{2-21}$$

其中

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = g_{21} = F, \quad g_{22} = G,$$
$$b_{11} = L, \quad b_{12} = b_{21} = M, \quad b_{22} = N.$$

并且采用了哑指标求和的记号,在(2-21)式中已经省略了通常求和的"Σ"记号.对基本三棱形3个基本向量关于 u^j 求导,给出

$$\boldsymbol{r}_{ij}\left(= \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^j}\right) = \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k + b_{ij}\boldsymbol{n}, \tag{2-22}$$

$$\boldsymbol{n}_i\left(= \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^i}\right) = -g^{jk}b_{ji}\boldsymbol{r}_k. \tag{2-23}$$

其中矩阵$[g_{ij}]$的逆

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} = \frac{1}{g}\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}, \quad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2,$$

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl}\Gamma_{lij}, \quad \Gamma_{lij} = \frac{\dfrac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \dfrac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}}{2}.$$

$\Gamma_{lij}, \Gamma_{ij}^k$ 称为曲面的第一,二类克里斯托弗尔(Christoffel)记号(简称克氏记号).克氏记号关于两个下指标是对称的,即 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \Gamma_{lij} = \Gamma_{lji}$.

2. 曲面的基本方程

(2-22)式与(2-23)式称为曲面的基本公式或标形的求导公式.这两组公式作为两个自变量 u^i,3个未知向量函数 $\boldsymbol{r}_i$ 与$\boldsymbol{n}$ 的偏微分方程组,有一组可积条件,这就是下面将得到的基本方程.为此可利用(2-22)与(2-23)式得出关于 $\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{n}$ 的两次偏微商与求导次序无关的式子

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{ik}}{\partial u^j}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}}{\partial u^j \partial u^i}$$

即可得到

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l$$

$$= b_{lj}g^{lm}b_{mk} - b_{lk}g^{lm}b_{mj}, \tag{2-24}$$

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^l b_{lk} - \Gamma_{ik}^l b_{lj}. \tag{2-25}$$

(2-24) 式左边是由 g_{ij} 的不高于二阶偏导数所构成的量，记为

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l, \tag{2-26}$$

称为曲面的黎曼(Riemann)曲率张量.也可引进

$$R_{lijk} = g_{lm} R_{ijk}^m. \tag{2-27}$$

这样一来方程(2-24)可改写为

$$R_{lijk} = -(b_{lj}b_{ik} - b_{lk}b_{ij}), \tag{2-28}$$

称(2-28)式为曲面的高斯方程.称(2-25)式为曲面的柯达奇(Codazzi)方程.(2-27)式的 R_{lijk} 也可写成

$$R_{lijk} = \frac{\dfrac{\partial^2 g_{lj}}{\partial u^i \partial u^k} + \dfrac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^l \partial u^j} - \dfrac{\partial^2 g_{lk}}{\partial u^i \partial u^j} - \dfrac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^l \partial u^k}}{2} + \Gamma_{mlj}\Gamma_{ik}^m - \Gamma_{mlk}\Gamma_{ij}^m.$$

实际上，**高斯 - 柯达奇方程**共有 3 个，即

$$R_{1212} = -gK,$$

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} = -b_{2i}\Gamma_{11}^i + b_{1i}\Gamma_{12}^i,$$

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = -b_{2i}\Gamma_{21}^i + b_{1i}\Gamma_{22}^i,$$

其中高斯曲率

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

从高斯方程得到重要的**高斯定理**：曲面的高斯曲率 K 是一个仅依赖于曲面第一基本形式的内蕴量.

下面给出在一些特殊参数网下的高斯 - 柯达奇方程.

(1) 在参数网为正交网($g_{12} = 0$)下高斯 - 柯达奇方程：

$$\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v + \left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u = -\sqrt{EG}\,K,$$

$$\left(\frac{L}{\sqrt{E}}\right)_v - \left(\frac{M}{\sqrt{E}}\right)_u = N\frac{(\sqrt{E})_v}{G} + M\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}},$$

$$\left(\frac{N}{\sqrt{G}}\right)_u - \left(\frac{M}{\sqrt{G}}\right)_v = L\frac{(\sqrt{G})_u}{E} + M\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}.$$

(2) 在等温网($I = \lambda^2(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$)下，高斯方程为

$$(\ln\lambda)_{uu} + (\ln\lambda)_{vv} = -\lambda^2 K.$$

(3) 在测地平行网($I = \mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2$)下，高斯方程为

$$(\sqrt{G})_{uu} = -\sqrt{G}K.$$

(4) 在切比雪夫网($I = du^2 + 2\cos\omega dudv + dv^2$)下,高斯方程为

$$\omega_{uv} = -K\sin\omega.$$

(5) 在曲率网($g_{12} = 0, b_{12} = 0$)下,柯达奇方程为

$$L_v = HE_v,\quad N_u = HG_u,$$

其中 H 为曲面的中曲率.

2.4.2　曲面的基本定理

(1) 曲面唯一存在定理　已知在 Ouv 平面的单连通区域 $\mathbf{R}^2$ 上两个微分形式

$$\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$
$$\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

其中 E,F,G 在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续的二阶偏导数,L,M,N 有连续的一阶偏导数,且 $E>0,G>0,EG-F^2>0$.$(\boldsymbol{r}_0;\boldsymbol{e}_{10},\boldsymbol{e}_{20},\boldsymbol{e}_{30})$ 为三维欧氏空间 E^3 中一个正交标形,$(u_0,v_0)\in\mathbf{R}^2$ 中一定点.而且 $E,G,\cdots,N$ 满足高斯-柯达奇方程.则在 E^3 中存在唯一一个曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),(u,v)\in\mathbf{R}^2$,使得 Ⅰ,Ⅱ 分别为 S 的第一,二基本形式,且在点(u_0,v_0)处,S 以$(\boldsymbol{r}_0;\boldsymbol{e}_{10},\boldsymbol{e}_{20},\boldsymbol{e}_{30})$为其基本三棱形.

(2) 曲面的存在定理　在区域 $\mathbf{R}^2(\subset Ouv)$上给出满足一定光滑性的两个二次微分形式 Ⅰ(正定)与 Ⅱ,它们的系数满足高斯-柯达奇方程,则在 E^3 中不计空间的运动,存在以 Ⅰ 和 Ⅱ 为其第一,二基本形式的曲面.

(3) 曲面的唯一定理　在 E^3 中两个曲面 S 与 S' 是可以通过空间中的运动互相迭合的充分必要条件是适当地选取公共参数使得它们有相同的第一、二基本形式.

2.4.3　特殊类型的曲面

曲面的基本定理表明,两个基本形式在满足一定条件下可以确定曲面.一些特殊类型的曲面,往往可以通过它们的定位向量及其求导、基本三棱形、主曲率、全曲率与中曲率,和第一、二基本形式的特征来描述.表2-2列举了4类曲面的特征.

1.平面与球面

平面与球面是分别全由平点与圆点构成的曲面,它们的全曲率与中曲率分别满足 $K=H=0$ 与 $K=H^2\neq0$.它们的定位向量分别满足微分方程 $d^2\boldsymbol{r}=0$ 与$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})d\boldsymbol{r}=0$($\boldsymbol{a}$ 为常向量).它们的两个基本形式分别满足 $\mathrm{II}=0$ 与 $\mathrm{II}=\lambda\mathrm{I},\lambda\neq0$.

2.直纹面与可展曲面

由空间单参数直线族构成的曲面称为**直纹面**,其方程为

$$S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u),u\in\mathrm{I},v\in(-\infty,+\infty),$$

其中 $\boldsymbol{b}(u)(\boldsymbol{b}(u)\neq0$,不妨设 $|\boldsymbol{b}(u)|=1)$ 为 S 的直母线方向向量.$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{a}'+v\boldsymbol{b}'$,$\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{b}$,曲面法向量 $\boldsymbol{n}$ 平行于 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}+v\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}$.当曲面上的点沿同一直母线移动时(即 u 为常数,v 变化),一般说来,$\boldsymbol{n}$ 的方向将有变化,即 S 的切平面绕直母线旋转.但当 $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}$,即$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$时,$\boldsymbol{n}$ 的方向不变.此时沿同一

直母线，S 只有一个切平面，称此直纹面为**可展曲面**，否则称为不可展直纹面.

表 2-2

曲面名称	定位向量	定位向量求导	基本三棱形	第一基本形式	第二基本形式	主曲率	全、中曲率	曲面上的点
平面	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + u\boldsymbol{v}_1 + v\boldsymbol{v}_2$	$d^2\boldsymbol{r} = 0$	各法线平行 各切平面平行	$\mathrm{I} = du^2 + dv^2$	$\mathrm{II} = 0$	$\kappa_1 = \kappa_2 = 0$	$K = H = 0$	平点
球面	$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})^2 = R^2$	$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})d\boldsymbol{r} = 0$	各法线过定点		$\mathrm{II} = \lambda\mathrm{I}$	$\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$	$K = H^2$	圆点
可展曲面	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u)$	$(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}') = 0$	沿各直母线只有一个切平面的直纹面	$\mathrm{I} = du^2 + dv^2$	$\mathrm{II} = Ldu^2$	$\kappa_2 = 0$	$K = 0$	抛物点
极小曲面						$\kappa_1 + \kappa_2 = 0$	$H = 0$	

可展曲面满足$(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}') = 0, u \in \mathrm{I}$. 可展曲面又可分为3类，分别是柱面($\boldsymbol{b}$ = 常向量)，锥面($\boldsymbol{a}$ = 常向量)与切线曲面($\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}'$). 可展曲面是高斯曲率 $K = 0$ 的曲面.

不可展曲面的例子如下：

(1) 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

或

$$\boldsymbol{r} = \left(a\frac{1 + uv}{u + v}, b\frac{u - v}{u + v}, c\frac{1 - uv}{u + v}\right).$$

(2) 双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$

或

$$\boldsymbol{r} = (a(u + v), b(u - v), 2uv).$$

容易验证，以上两个二次曲面是双直纹面(即其上有两族不同的直母线，参数表示中 u 线与 v 线)，并且都是不可展曲面.

(3) 正螺面 $\boldsymbol{r} = (v\cos u, v\sin u, au)$ 是不可展曲面.

3. 极小曲面

$H = 0$ 的曲面称为**极小曲面**. 下面给出极小曲面的例子：

(1) 正螺面 $\boldsymbol{r} = (v\cos u, v\sin u, au)$ 是极小曲面.

(2) 悬链面 $\boldsymbol{r} = \left(a\cosh\dfrac{u}{a}\cos v, a\cosh\dfrac{u}{a}\sin v, u\right)$ 是极小曲面.

容易证明，若直纹面是极小的，则为平面或正螺面；若旋转曲面是极小的，则为平面或悬链面.

(3) 平移曲面是指用方程 $z = f(x) + g(y)$ 表示的曲面，容易证明，若平移曲面是极小的，则为**舍尔克(Scherk) 极小曲面**：

$$az = \ln(\cos ay/\cos ax).$$

2.4.4 曲面族的包络面

1. 单参数曲面族的包络面

已知单参数曲面族

$$S_\lambda:\quad F(x,y,z,\lambda)=0,$$

如果另有曲面 S,对于任意点 $\boldsymbol{r}\in S$,有族中某个曲面 S_λ,使得点 $\boldsymbol{r}\in S_\lambda$,并且在这点处曲面 S 与 S_λ 相切,即它们有相同的切平面,称曲面 S 为曲面族(S_λ)的**包络面**.

(1) 对于每一个 λ,方程组

$$C_\lambda:\quad \begin{cases}F(x,y,z,\lambda)=0,\\ F_\lambda(x,y,z,\lambda)=0\end{cases}$$

表示的曲线 C_λ 称为在曲面S_λ 上的特征线. C_λ 是曲面S_λ 与族中相邻曲面$S_{\lambda+\Delta\lambda}$ 的交线且当$\Delta\lambda\to0$时的极限位置.族中各曲面的特征线构成包络面 S.因此从以上方程组中消去参数 λ,一般可得到 S 的方程.

(2) 对于每一个 λ,方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z,\lambda)=0,\\ F_\lambda(x,y,z,\lambda)=0,\\ F_{\lambda\lambda}(x,y,z,\lambda)=0\end{cases}$$

表示的点 $\boldsymbol{r}_\lambda$ 称为特征线C_λ 上的特征点.它是特征线 C_λ 与邻近的特征线$C_{\lambda+\Delta\lambda}$ 的交点且当 $\Delta\lambda\to0$ 时的极限位置.族中各特征线 C_λ 的特征点构成曲面族的脊线C,它与各特征线 C_λ 在交点处相切.从以上方程组中消去参数 λ,一般可得到脊线 C 的方程.

例1 求以曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 上的点为中心,以定长 r 为半径的球面族的包络面.

解 球面族

$$S_s:[\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s)]^2-r^2=0.$$

对上式关于 s 求导两次得出

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{\alpha}=0,$$
$$\kappa(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta}-1=0.$$

当 $\kappa=0$ 时,C 为直线,包络面为圆柱面.

当 $\kappa\neq0$ 时,由上述3式得

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{\beta}\pm\sqrt{r^2-R^2}\,\boldsymbol{\gamma},\ R=\frac{1}{\kappa}$$

其中 R 为 C 的曲率半径,上式为球面族的特征线方程,此外还可得包络面方程

$$S:\ \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+r(\boldsymbol{\beta}\cos\theta+\boldsymbol{\gamma}\sin\theta),$$
$$s\in I,\theta\in[0,2\pi],$$

其中 s 与θ 为包络面的参数,此包络面是一个以 C 为中心曲线以r 为半径时的管状曲面.

例2 椭球面族

$$S_\lambda:\ \lambda^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{z^2}{\lambda^2}=1$$

的包络面方程为 $4z^2(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})=1$. 其脊线方程组的一个方程为 $12z^4+\lambda^2=0$, 因此脊线是虚的, 或不存在脊线.

2. 单参数平面族的包络面

作为特例现讨论单参数平面族的包络面. 一般曲面在每一点有一个切平面, 因此一个曲面的全体切平面构成依赖于两个参数的曲面族. 但对于可展曲面, 因为沿每一条直母线只有一个切平面, 所以它的切平面全体是单参数的平面族. 面族中每一个平面与它相切, 故原可展曲面是其单参数切平面族的包络面. 反之, 任意给出单参数平面族

$$\pi_\lambda:\ A(\lambda)x+B(\lambda)y+C(\lambda)z+D(\lambda)=0,$$

上式对 λ 求导所得方程与其联立的方程组

$$\begin{cases}A(\lambda)x+B(\lambda)y+C(\lambda)z+D(\lambda)=0,\\ A'(\lambda)x+B'(\lambda)y+C'(\lambda)z+D'(\lambda)=0\end{cases}$$

给出平面族 (π_λ) 的特征线. 由于上述方程组为 x,y 与 z 的一次方程组, 故特征线就是直线. 由这单参数直线族生成的直纹面是可展曲面. 这样一来, 单参数平面族的包络面是可展曲面, 其方程从上述方程组中消去 λ 得到.

1° 当所有特征线互相平行时, 包络面为柱面;

2° 当所有特征线通过一定点时, 包络面为锥面;

3° 当所有特征线是脊线的切线时, 包络面为切线曲面.

例 3　平面族

$$\pi_\lambda:\ x\cos\lambda+y\sin\lambda-z\sin\lambda=1$$

的包络面为 $x^2+(y-z)^2=1$, 对包络面方程作旋转的坐标变换:

$$x'=x,\quad y'=\frac{y-z}{\sqrt{2}},\quad z'=\frac{y+z}{\sqrt{2}},$$

包络面方程变为 $x'^2+2y'^2=1$, 包络面为一椭圆柱面.

例 4　平面族

$$\pi_\lambda:\ \lambda^2x+2\lambda y+2z=2\lambda$$

的包络面为 $y^2-2xy-2y+1=0$, 对包络面方程作旋转的坐标变换:

$$x=\frac{x'+z'}{\sqrt{2}},\quad y=y',\quad z=\frac{x'-z'}{\sqrt{2}},$$

包络面方程变为

$$x'^2-y'^2-z'^2+2y'-1=0,$$

再作平移的坐标变换

$$x''=x',\quad y''=y'-1,\quad z''=z',$$

方程变为 $x''^2-y''^2-z''^2=0$, 包络面为二次锥面.

例 5　求平面族

$$\pi_\lambda:\ x\sin\lambda-y\cos\lambda+z=\lambda$$

的脊线.

解 对上式连续关于 λ 求导两次,分别得

$$x\cos\lambda + y\sin\lambda = 1,$$
$$-x\sin\lambda + y\cos\lambda = 0.$$

以上3式联立,解出 x,y,z,得脊线:

$$\boldsymbol{r} = (\cos\lambda, \sin\lambda, \lambda).$$

3. 与一条空间曲线有关的单参数平面族的包络面

空间曲线 C 在其每一点分别有密切平面 π_γ,从切平面 π_β 与法平面 π_α,在此副法向量 $\boldsymbol{\gamma}$,主法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别是它们的法向量,因此与 C 有关的共有密切平面族(π_γ),从切平面族(π_β) 与法平面族(π_α). 它们的方程分别是

$$\pi_\gamma:\ \boldsymbol{\gamma}(s)(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}(s)) = 0,$$
$$\pi_\beta:\ \boldsymbol{\beta}(s)(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}(s)) = 0,$$
$$\pi_\alpha:\ \boldsymbol{\alpha}(s)(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}(s)) = 0.$$

关于这些平面族的包络面、特征线与脊线的情况如表2-3所示.

表 2-3

与 C 有关的平面族	包络面 S	特征线 C_t	脊线 $\overline{C}$
密切平面族(π_γ)	C 的切线曲面 S_α $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}(s) + t\boldsymbol{\alpha}(s)$	C 的切线 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + t\boldsymbol{\alpha}$	$\overline{C} = C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$
从切平面族(π_β)	C 的从可展曲面 S_Ω $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}(s) + t(\tau\boldsymbol{\alpha}(s) + \kappa\boldsymbol{\gamma}(s))$	C 的瞬时转轴 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + t\boldsymbol{\Omega}$	$\overline{C}: \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + \dfrac{\kappa}{\dot{\kappa}\tau - \dot{\tau}\kappa}\boldsymbol{\Omega}$
法平面族(π_α)	C 的极线曲面 S_R $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}(s) + R(s)\boldsymbol{\beta}(s) + t\boldsymbol{\gamma}(s)$	C 的曲率轴 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\beta} + t\boldsymbol{\gamma}$	$\overline{C}: \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\beta} + \dfrac{\dot{R}}{\tau}\boldsymbol{\gamma}$

对表2-3中内容说明如下:

(1) 曲线在某点的切线正是曲线的密切平面族(π_γ) 在该点的特征线,因此曲线的切线曲面正是族(π_γ) 的包络面. 而族(π_γ) 的脊线正是曲线本身.

(2) 曲线的瞬时旋转向量又称达布(Darboux) 向量,它在曲线的基本三棱形$(\boldsymbol{r};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ 中的 $\boldsymbol{\alpha}$ 轴上的分量为挠率 τ,在 $\boldsymbol{\gamma}$ 轴上的分量为曲率 κ,在 $\boldsymbol{\beta}$ 轴上的分量为零,因此达布向量是 $\boldsymbol{\Omega} = \tau\boldsymbol{\alpha} + \kappa\boldsymbol{\gamma}$. 通过曲线上点 $\boldsymbol{r}$ 且平行达布向量的直线称为直线在这点的**瞬时旋转轴**. 由曲线的所有瞬时旋转轴生成的曲面称为曲线的**从可展曲面**. 曲线 C 的从切平面族(π_β) 的包络面是曲线 C 的从可展曲面. 而瞬时旋转轴正是从切平面族(π_β) 的特征线. 曲线 C 的从切平面族(π_β) 的脊线是

$$\overline{C}:\quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + \frac{\kappa}{\dot{\kappa}\tau - \dot{\tau}\kappa}\boldsymbol{\Omega}.$$

(3) 曲线的**曲率轴**(或称为极线)是通过曲线上点 $\boldsymbol{r}$ 的曲率中心 $\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{\beta}$,且平行于副法向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的直线 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{\beta}+t\boldsymbol{\gamma}(-\infty<t<+\infty)$.所有与曲线在这点有3个重叠点的球面中心都在曲率轴上.由曲线的所有曲率轴生成的曲面称为曲线的极线曲面.曲线 C 的法平面族 (π_α) 的包络面是曲线 C 的极线曲面.而曲率轴正是法平面族 (π_α) 的特征线.而族 (π_α) 的脊线是

$$\overline{C}:\quad \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{\beta}+\frac{\dot{R}}{\tau}\boldsymbol{\gamma}.$$

2.5　曲面的整体性质

2.5.1　曲面的高斯-崩尼公式

设 M 是空间的曲面,其边界为 ∂M,下面给出曲面的一个重要公式——**高斯-崩尼(Gauss-Bonnet)公式**(简称 G-B 公式).

(1) M 的边界 ∂M 是一条光滑闭曲线的 G-B 公式

$$\int_{\partial M}\kappa_g \mathrm{d}s+\iint_M K\mathrm{d}A=2\pi,$$

其中 M 为一个单连通的曲面,κ_g 与 K 分别为曲面的测地曲率与高斯曲率,$\mathrm{d}A=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 为曲面的面元.

(2) M 的边界 ∂M 是一条分段光滑闭曲线的 G-B 公式

$$\sum_i\int_{\Gamma_i}\kappa_g \mathrm{d}s+\iint_M K\mathrm{d}A+\sum_i\theta_i=2\pi,$$

其中边界 $\partial M=\Gamma_1+\Gamma_2+\cdots+\Gamma_n$ 由 n 段光滑曲线构成,故 ∂M 共有 n 个顶点,其顶点处的外角为 $\theta_i,i=1,2,\cdots,n$.

(3) M 的边界 ∂M 是若干条分段光滑闭曲线的 G-B 公式

$$\sum_i\int_{C_i}\kappa_g \mathrm{d}s+\iint_M K\mathrm{d}A+\sum_\alpha\theta_\alpha=2\pi\chi(M),$$

其中边界 $\partial M=C_1+C_2+\cdots+C_n$,$C_i$ 是 n 条互不相交的简单分段光滑闭曲线,∂M 上所有顶点处的外角为 $\theta_i(i=1,2,\cdots,p)$,共 p 个,M 为多连通区域,其欧拉示性数为 $\chi(M)$.

(4) M 是一个紧致曲面,即 $\partial M=\varnothing$ 为空集,则 G-B 公式为

$$\iint_M K\mathrm{d}A=2\pi\chi(M),$$

式中 $\chi(M)=2(1-g)$,

其中 g 为 M 的亏格.

例如,当 M 是由一个测地三角形构成时,按上述(2)中的G-B公式,$\partial M=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$,$\Gamma_i$ 是测地线,$\kappa_g=0$,$\theta_i=\pi-A_i$,其中 A_i 为测地三角形之内角,于是得

$$\iint_M K\mathrm{d}A + 3\pi - (A_1 + A_2 + A_3) = 2\pi,$$

或三角形三内角之和为，

$$S(\triangle) = A_1 + A_2 + A_3 = \pi + \iint_M K\mathrm{d}A.$$

这样一来，测地三角形三内角之和 $S(\triangle)$，对于 $K > 0$ 的曲面，$S(\triangle) > \pi$；对于 $K < 0$ 的曲面，$S(\triangle) < \pi$；对于 $K = 0$ 的曲面(可展曲面)，$S(\triangle) = \pi$. 从而在曲面上分别得到了欧氏几何($K = 0$)与非欧氏几何($K > 0$ 或 $K < 0$)的模型.

2.5.2 紧致凸曲面

全曲率处处为正的紧致曲面称为凸闭曲面，或卵形面. 卵形面总是在它任意点的切平面的一侧. 椭球面是卵形面.

卵形面的阿达马(Hatamard)定理 设曲面 $M: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 是一个卵形面，它的高斯映射 $g: M \to S^1$(单位球面)是 M 到 S^1 的一个整体一一对应. 也即一个卵形面的球面像正好一次覆盖整个球面.

卵形面在 E^3 中还具有"刚性". 也就是说，对于两个等距的卵形面，它们之间只能相差一个 E^3 中的运动或反射，即形状也是一致的. 这就是下述的江-沃森(Cohn-Vossen)定理.

卵形面的江-沃森定理 设 M 与 $\overline{M}$ 是两个卵形面，$f: M \to \overline{M}$ 是等距映射(保持第一基本形式不变)，则 f 也是保持曲面第二基本形式不变或相差一个符号的映射. 从而 f 在 M 上的限制是 E^3 中的运动或运动与反射的乘积.

球面是卵形面的一种，如何判断一个卵形面是球面，则有一系列整体的结果.

若一个曲面的两个主曲率 κ_1 与 κ_2，或全曲率 K 与中曲率 H 之间满足一个函数方程

$$W(\kappa_1, \kappa_2) = 0$$

或

$$W(K, H) = 0,$$

则称此曲面是**魏因加尔坦(Weingarten)曲面**或 W-曲面. 如果 W-曲面的 κ_2 为 κ_1 的单调递减函数则称它为特殊的 W-曲面，其充分必要条件是

$$W_{\kappa_1} W_{\kappa_2} \geqslant 0.$$

卵形面为球面的定理 特殊的卵形 W-曲面是球面.

1° 全曲率为常数或中曲率为常数的卵形面是球面.

2° 全曲率与中曲率之比 $\frac{H}{K}$ 为常数的卵形面是球面.

3° 全曲率与中曲率满足

$$aK + 2bH + c = 0$$

的卵形面为球面，其中 a, b, c 为常数，且 $b^2 - 4ac > 0$.

3　黎曼几何与张量分析

3.1　流形上的张量及其代数运算

3.1.1　流形上的张量

设 $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ 为一个 n 维微分流形，它是由至多为可数个坐标邻域 $U_1, U_2, \cdots$ 构成的. 对于同属于其中两个坐标邻域 U 与 $\overline{U}$ 的点 $\boldsymbol{x}$，在 U 中的坐标为 $(\boldsymbol{x}) \equiv (x^1, x^2, \cdots, x^n)$，在 $\overline{U}$ 的坐标为 $(\overline{x}) \equiv (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \cdots, \overline{x}^n)$，它们之间的坐标变换式为

$$x^i = x^i(\overline{x}^j) \quad 或 \quad \overline{x}^i = \overline{x}^i(x^j), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{3-1}$$

在流形 M 上的数量、向量以及张量在不同坐标系中分量的变换式定义如下：

(1) 数量、纯量或函数，或 0 阶张量

$$\lambda(\boldsymbol{x}): \quad \overline{\lambda}(\overline{x}^i) = \lambda(x^i).$$

式中 $\overline{\lambda}(\overline{x}^i)$ 与 $\lambda(x^i)$ 分别是 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 在 U 与 $\overline{U}$ 中的分量，且必须相等.

(2) 反变向量或 1 阶反变张量

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}): \quad \overline{a}^i(\overline{x}^k) = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} a^j(x^k). \tag{3-2}$$

在此关于指标“j”求和的记号“$\sum_j$”已经省略，即是说使用了哑指标求和的约定.

(3) 共变向量或 1 阶共变张量

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}): \quad \overline{b}_i(\overline{x}^k) = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} b_j(x^k). \tag{3-3}$$

(4) r 阶反变 s 阶共变 $r+s$ 阶混合张量

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}): \overline{A}^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} = \frac{\partial \overline{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial \overline{x}^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \overline{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{l_2}}{\partial \overline{x}^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial \overline{x}^{j_s}} A^{k_1 k_2 \cdots k_r}_{l_1 l_2 \cdots l_s} \tag{3-4}$$

张量 $\boldsymbol{A}$ 在坐标系 U 中分量为 $A^{k_1 k_2 \cdots k_r}_{l_1 l_2 \cdots l_s}(x^i)$，在 $\overline{U}$ 中的分量是 $\overline{A}^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}(\overline{x}^k)$. $r+s$ 阶张量由 n^{r+s} 个有序分量构成.

(5) r 阶反变 s 阶共变的 $r+s$ 阶权为 ω 的相对混合张量

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}): \overline{A}^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} = \frac{\partial \overline{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial \overline{x}^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \overline{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{l_2}}{\partial \overline{x}^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial \overline{x}^{j_s}} A^{k_1 k_2 \cdots k_r}_{l_1 l_2 \cdots l_s} \left[\frac{\partial(x^1, x^2, \cdots, x^n)}{\partial(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \cdots, \overline{x}^n)} \right]^{\omega}. \tag{3-5}$$

式中权数 ω 为一整数，当 $\omega = 0$，(3-5) 式成为(3-4) 式，相对张量成为通常的张量. $\omega = 1$ 的张量称为密度相对张量，$\omega = -1$ 的张量称为容度张量. 这是因为 $n = 2$ 的面积元 $\mathrm{d}A = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 系数的平方是一个这样的纯量或 0 阶张量(见第 2 章 2.2.1 小节中(2-4) 式).

例1 2阶反变张量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$：$\boldsymbol{x}(x^i)$ 为坐标系 U 中点 $\boldsymbol{x}$ 的坐标，$\boldsymbol{x}(\overline{x}^i)$ 为坐标系 $\overline{U}$ 中点 $\boldsymbol{x}$ 的坐标. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 在 U 中分量为 $A^{ij}(x^k)$，而在 $\overline{U}$ 中的分量为

$$\overline{A}^{ij}(\overline{x}^k) = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}A^{kl}(x^m).$$

例2 2阶共变张量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$：在 U 中的分量为 $A_{ij}(x^k)$，而在 $\overline{U}$ 中的分量是

$$\overline{A}_{ij}(\overline{x}^k) = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}A_{kl}(x^m).$$

例3 1阶反变1阶共变的混合张量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$：在 U 中的分量是 $A^i_j(x^k)$，而在 $\overline{U}$ 中分量是

$$\overline{A}^i_j(\overline{x}^k) = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}A^k_l(x^m).$$

以上3个例子是常用的几种张量.

例4 流形上点 $\boldsymbol{x}$ 的坐标(x^i)之微分$(\mathrm{d}x^i)$是一个反变向量或1阶反变张量. 这是因为 $\mathrm{d}\overline{x}^i = \dfrac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j$，类似于(3-2)式.

例5 流形上的函数 $\lambda(\boldsymbol{x})$，其偏导数$\left(\dfrac{\partial \lambda(x^j)}{\partial x^i}\right)$是一个共变向量或1阶共变张量. 这是因为

$$\frac{\partial \overline{\lambda}(\overline{x}^j)}{\partial \overline{x}^i} = \frac{\partial \lambda(x^k)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i},$$

类似于(3-3)式. 此共变向量记为 $\nabla\lambda = \mathbf{grad}\lambda$，且称为 λ 的梯度.

3.1.2 张量的代数运算

两个类型、阶与权都相同的张量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处相等 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$，其充分必要条件是它们在某一组坐标邻域中所有分量都对应相等，从而在任意组坐标邻域中也相等. 张量相等的概念具有对称性、自反性和可传递性.

零张量是指在任意坐标邻域中的任何一点，所有分量都为零的张量.

1. 张量的线性运算

两个类型、阶与权都相同的张量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，它们的和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是一个在任意坐标邻域中其分量是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应分量之和的同型、阶与权的张量：

$$C^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} = A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} + B^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}.$$

数量 λ 与张量 $\boldsymbol{A}$ 的积 $\boldsymbol{B} = \lambda\boldsymbol{A}$ 是一个在任意坐标邻域中其分量是 λ 与 $\boldsymbol{A}$ 的分量之积的张量

$$B^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} = \lambda A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}.$$

显然 $\lambda\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是同型、阶与权的张量.

以上两种运算称为张量的线性运算.

2. 张量的缩并

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个混合张量 $A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}$，$r, s \geqslant 1$，令任一个上指标和一个下指标相等后，

再对这个指标求和,就得到一个 $r-1$ 阶反变与 $s-1$ 阶共变的张量.

例如,张量 $\boldsymbol{A}=(A_j^i)$,经缩并后得到数量

$$A_i^i \equiv A_1^1 + A_2^2 + \cdots + A_n^n.$$

又如3阶混合张量 $\boldsymbol{A}=(A_k^{ij})$,经缩并后可以得到两种1阶反变张量或反变向量:

$$\boldsymbol{B}=(b^i),\quad b^i = A_j^{ij},$$

$$\boldsymbol{C}=(c^i),\quad c^i = A_j^{ji}.$$

3. 两个张量的张量积

设权分别为 ω 与 Ω 的两个张量 $\boldsymbol{A}=(A_{j_1j_2\cdots j_s}^{i_1i_2\cdots i_r})$ 与 $\boldsymbol{B}=(B_{l_1l_2\cdots l_q}^{k_1k_2\cdots k_p})$ 的张量积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$,是指由分量

$$C_{j_1j_2\cdots j_sl_1l_2\cdots l_q}^{i_1i_2\cdots i_rk_1k_2\cdots k_p} = A_{j_1j_2\cdots j_s}^{i_1i_2\cdots i_r}B_{l_1l_2\cdots l_q}^{k_1k_2\cdots k_p}$$

构成的张量.显然 $\boldsymbol{C}$ 是一个具有 $r+p$ 阶反变,$s+q$ 阶共变,权为 $\omega+\Omega$ 的张量.张量积运算是可结合的,对张量的加法是可分配的.但一般说来是不可交换的,这是因为在定义 $\boldsymbol{C}$ 的分量的上式中,必须遵守指标之间的相互顺序.

4. 张量的内积

两个张量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 先作张量积,再作 $\boldsymbol{A}$ 中上(或下)指标与 $\boldsymbol{B}$ 中下(或上)指标的缩并,所得结果称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积.

例如,$a^ib_i=\lambda$,$A_j^ib^j=c^i$,$A_j^id_i=e_j$,$A_j^iB_k^j=f_k^i$.

5. 对称与反对称张量

张量 $\boldsymbol{A}=(A_{j_1j_2\cdots j_s}^{i_1i_2\cdots i_r})$ 对其中某两个指标,例如 i_1 与 i_2,如果满足

$$A_{j_1j_2\cdots j_s}^{i_2i_1\cdots i_r} = A_{j_1j_2\cdots j_s}^{i_1i_2\cdots i_r} \quad 或 \quad A_{j_1j_2\cdots j_s}^{i_2i_1\cdots i_r} = -A_{j_1j_2\cdots j_s}^{i_1i_2\cdots i_r},$$

则张量 $\boldsymbol{A}$ 称为关于这两个指标是对称或反称的.如果其中某组指标都为对称或反称的,则称此张量关于这组指标是全对称或全反称的.张量的对称与反称性不因坐标变换而改变.

例如,二阶对称张量是满足下式的张量:

$$A_{ij}=A_{ji},\ A^{ij}=A^{ji},\ A_j^i=A_i^j.$$

二阶反称张量是满足下式的张量:

$$A_{ij}=-A_{ji},\ A^{ij}=-A^{ji},\ A_j^i=-A_i^j.$$

6. 克罗内克(Kronecker)记号(克氏记号)

克氏记号

$$\delta_j^i=\begin{cases}1, & 当\ i=j,\\ 0, & 当\ i\neq j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

是一个1阶反变1阶共变的张量.推广的克氏记号

$$\delta_{j_1j_2\cdots j_r}^{i_1i_2\cdots i_r}=\begin{cases}\pm 1, & 当\ i_1i_2\cdots i_r\ 互不相同,且经偶或奇个置换得到\ j_1j_2\cdots j_r,\\ 0, & 对于其他情况,\end{cases}$$

$$i_1,i_2,\cdots,i_r=1,2,\cdots,n$$

是一个 r 阶反变 r 阶共变的 $2r$ 阶混合张量. 它是一个对于 $i_1i_2\cdots i_r$ 和 $j_1j_2\cdots j_r$ 都是全反称的张量. 关于推广的克氏记号满足如下性质.

(1) 当 $A^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_s}$ 关于上指标全对称, 而 $B^{j_1j_2\cdots j_r}_{i_1i_2\cdots i_s}$ 关于下指标全对称时, 则

$$A^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_s}\delta^{k_1k_2\cdots k_r}_{i_1i_2\cdots i_r}=0,$$

$$B^{i_1i_2\cdots i_s}_{j_1j_2\cdots j_r}\delta^{j_1j_2\cdots j_r}_{k_1k_2\cdots k_r}=0.$$

(2) 对于任意全反称张量 $A^{i_1i_2\cdots i_r}$, 有

$$\delta^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_r}A^{j_1j_2\cdots j_r}=r!A^{i_1i_2\cdots i_r}.$$

(3)
$$\delta^{i_1i_2\cdots i_r}_{i_1i_2\cdots i_r}=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

$$\delta^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_r}=\frac{(n-s)!}{(n-r)!}\delta^{i_1i_2\cdots i_ri_{r+1}\cdots i_s}_{j_1j_2\cdots j_ri_{r+1}\cdots i_s}.$$

(4) 利用克氏记号定义如下 n 阶的置换记号

$$\varepsilon^{i_1i_2\cdots i_n}=\delta^{i_1i_2\cdots i_n}_{12\cdots n},\quad \varepsilon_{i_1i_2\cdots i_n}=\delta^{12\cdots n}_{i_1i_2\cdots i_n},$$

它们分别是一个阶为 n, 权为 $+1$ 与 -1 的完全反称的相对张量, 并且满足

1° 当 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中至少有两个相同时,

$$\varepsilon^{i_1i_2\cdots i_n}=\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_n}=0,$$

2° 当 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是由 $1,2,\cdots,n$ 经偶个或奇个置换得到时, $\varepsilon^{i_1i_2\cdots i_n}=\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_n}=+1$ 或 -1.

另外还成立

$$\varepsilon^{i_1i_2\cdots i_n}\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_n}=n!,$$

$$\varepsilon^{i_1i_2\cdots i_ri_{r+1}\cdots i_n}\varepsilon_{j_1j_2\cdots j_ri_{r+1}\cdots i_n}=(n-r)!\delta^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_r},$$

$$\det(A^i_j)=\varepsilon^{i_1i_2\cdots i_n}A^1_{i_1}A^2_{i_2}\cdots A^n_{i_n}=\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_n}A^{i_1}_1A^{i_2}_2\cdots A^{i_n}_n.$$

3.2　黎曼流形

在一个 n 维微分流形 M 上, 利用一个正定的二阶共变对称张量, 在 M 的切空间上定义切向量的内积, 从而导出 M 上的**黎曼度量**, 使 M 成为黎曼流形或黎曼空间.

微分流形 $M=\bigcup_\alpha U_\alpha$ 在点 $\boldsymbol{x}(x^i)(\in M)$ 的反变向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})=(a^i(x^j))$ 的全体 $\{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\}$ 称为流形 M 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的切空间, 记为 $T_X=\{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\}$, 类似地, 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的共变向量 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})=(b_i(x^j))$ 的全体 $\{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\}$ 称为流形 M 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的余切空间, 记为 $T^*_X=\{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\}$.

设有二阶对称共变张量场 $\boldsymbol{G}=(g_{ij}(x^k))$ 定义在整个微分流形 M 上, $\boldsymbol{G}$ 为正定对称张量, 即

$$g_{ij}(x^k) = g_{ji}(x^k),$$
$$g = \det(g_{ij}(x^k)) > 0,$$

$g_{ij}(x^k)$ 在各坐标邻域上具有连续偏导数，则称此流形 M 为黎曼流形. G 确定了 M 上的黎曼变量. 一般说来，如果只要求 G 满秩并不正定，则称 M 为广义黎曼流形.

在黎曼流形 M 上定义二阶反变张量

$$g^{ij}(x^k):\ g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i \quad 或\ g^{ij} = \frac{G^{ij}}{g},$$

其中 G^{ij} 是矩阵 $[g_{ij}]$ 中元素 g_{ij} 的代数余子式，且 $G^{ij} = G^{ji}$. G 称为 M 的度量张量，且

$$ds^2 = g_{ij}(x^k)dx^idx^j$$

称为向量 (dx^i) 对应的弧微分的平方，它确定了黎曼流形上的内蕴微分几何. 在坐标变换下，g 的变换式为

$$\sqrt{\overline{g}(\overline{x})} = \sqrt{g(x)}\,\frac{\partial(x^1,x^2,\cdots,x^n)}{\partial(\overline{x}^1,\overline{x}^2,\cdots,\overline{x}^n)}. \tag{3-6}$$

在 M 上张量的指标上升与下降. 对于 M 上的反变向量 $\boldsymbol{a} = (a^i)$，用度量张量 g_{ij} 可以定义一个共变向量 $\boldsymbol{b} = (a_i)$，其分量为

$$a_i = g_{ij}a^j,$$

称 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的伴随张量，有时仍记 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a} = (a_i)$. 称 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的过程是利用度量张量作指标下降. 反之从一个共变向量 $\boldsymbol{a} = (a_i)$，也可以通过 (g^{ij})，得到一个反变向量

$$a^i = g^{ij}a_j,$$

称为从 (a_i) 到 (a^i) 的过程是用度量张量作指标的上升. 一般地，对于一个张量 $A^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_s}$，可以通过 g^{ij} 对 j 指标上升或用 g_{ij} 作 i 指标的下降. 阶数高于一阶的张量有多个伴随张量. 为了用一个记号 A 来表示同一张量的各种伴随张量，就必须安排好上下指标的顺序. 例如，在 $A^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_s}$ 中上升 j_2 得到的张量记为

$$A^{i_1i_2\cdots i_rj}_{k_1k_3\cdots k_s} = g^{jk_2}A^{i_1i_2\cdots i_r}_{k_1k_2\cdots k_s}.$$

两个向量的内积：设黎曼流形中某点切空间两个（反变）向量的坐标为 (a^i) 与 (b^i)，则它们的内积或数量积定义为

$$\boldsymbol{ab} = g_{ij}(x^k)a^ib^j = a_ib^i = a^ib_i = \boldsymbol{ba}.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 或绝对值为

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{|\boldsymbol{a}^2|},\quad \boldsymbol{a}^2 = g_{ij}(x^k)a^ia^j.$$

长度为 1 的向量称为单位向量. 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角 θ 定义为

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}.$$

特别地 (a^i) 正交于 (b^i) 的条件是 $a_ib^i = 0$.

类似于三维欧氏空间中的曲面 S（作为二维黎曼流形），其面积元为

$$dA = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

n 维黎曼流形的体积元为

$$dV = \sqrt{g}\,dx^1 dx^2 \cdots dx^n.$$

据(3-6)式,dV 是一个在坐标变换下不变的量.

黎曼流形中曲线 $C: x^i = x^i(t)$ 的弧长为

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij}(x^k) x^{i\prime} x^{j\prime}}\, dt, \quad x^{i\prime} = dx^i/dt.$$

黎曼流形中某区域 $D: x_0^i \leqslant x^i \leqslant x_1^i$ 的体积为

$$V(D) = \int \cdots \int_D \sqrt{g(x^k)}\, dx^1 dx^2 \cdots dx^n.$$

3.3 共变微分与曲率张量

3.3.1 共变微分

1. 黎曼空间的克里斯托弗尔(Christoffel)记号(或克氏记号)

(1) 第一类克氏记号为

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = \Gamma_{jik}. \tag{3-7}$$

它是由 g_{ij} 的一阶偏导数构成的,且关于前两个指标对称.

(2) 第二类克氏记号为

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl}\Gamma_{ijl}, \tag{3-8}$$

它是由第一类克氏记号的第三个指标上升而得到的.由(3-7)式与(3-8)式可得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i g^{lj} + \Gamma_{lk}^j g^{li} = 0, \tag{3-9}$$

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial x^k}. \tag{3-10}$$

2. 张量的共变导数与共变微分

(1) 纯量或函数的普通导数与微分就是共变导数与共变微分,即

$$df = Df = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i = f_{,i}dx^i.$$

(2) 向量的共变导数与共变微分.

反变向量(a^i)的共变导数为

$$a^i_{,j} \equiv a^i_{|j} = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jl}^i a^l.$$

它是一个1阶反变1阶共变的混合张量.而反变向量的共变微分为

$$Da^i = a^i_{,j}dx^j = da^i + \Gamma_{jl}^i a^l dx^j.$$

它仍为1阶反变张量.

共变向量(a_i)的共变导数为

$$a_{i,j} \equiv a_{i|j} = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^{l} a_l,$$

它是一个2阶共变张量.而共变向量的共变微分是

$$\mathrm{D}a_i = a_{i,j}\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}a_i - \Gamma_{ij}^{l} a_l \mathrm{d}x^j.$$

(3) r 阶反变 s 阶共变张量的共变导数与共变微分.

张量$(A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s})$的共变导数为

$$A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s, k} = \frac{\partial A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}}{\partial x^k} + \sum_{m=1}^{r} \Gamma_{kl}^{i_m} A^{i_1 i_2 \cdots l \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} - \sum_{m=1}^{s} \Gamma_{kj_m}^{l} A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots l \cdots j_s},$$

它是一个 r 阶反变 $s+1$ 阶共变的张量.而共变微分为

$$\begin{aligned} \mathrm{D}A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} &= A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s, k}\mathrm{d}x^k \\ &= \mathrm{d}A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} + \left(\sum_{m=1}^{r} \Gamma_{kl}^{i_m} A^{i_1 i_2 \cdots l \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} - \sum_{m=1}^{s} \Gamma_{kj_m}^{l} A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots l \cdots j_s} \right) \mathrm{d}x^k. \end{aligned}$$

基本张量的共变导数为零,它正是(3-9)式,即

$$g_{ij,k} = 0 \text{ 或 } g^{ij}_{,k} = 0.$$

克氏记号 δ^i_j 的共变导数为零:

$$\delta^i_{j,k} = 0.$$

3. 张量和与积的共变导数和共变微分

张量和与积的共变导数满足普通求导的规律,即

$$\left(A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} + B^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} \right)_{,k} = A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s, k} + B^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s, k},$$

$$\left(A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} B^{k_1 k_2 \cdots k_p}_{l_1 l_2 \cdots l_q} \right)_{,k} = A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s, k} B^{k_1 k_2 \cdots k_p}_{l_1 l_2 \cdots l_q} + A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} B^{k_1 k_2 \cdots k_p}_{l_1 l_2 \cdots l_q, k}.$$

4. 纯量的梯度、向量的旋度与散度

(1) 纯量 f 的梯度是一向量,其共变分量为

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \mathbf{grad} f = (f_{,i}),$$

其反变分量为

$$f^i = g^{ij} f_{,j} = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

(2) 向量(a_i)的旋度是

$$\mathbf{rot}(a_i) = (a_{i,j} - a_{j,i}),$$

或

$$\mathbf{rot}(a_i) = (a_{i,j} - a_{j,i}) = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i} \right).$$

它是一个2阶共变反称张量.一个向量(a_i)是某个纯量 f 的梯度,即 $a_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ 的充分必要条件是其旋度为零

$$a_{i,j} - a_{j,i} = 0.$$

(3) 向量(a^i)的散度是其共变导数 $a^i{}_{,j}$ 关于指标 i,j 的缩并,即

$$\operatorname{div}(a_i) = a^i{}_{,i},$$

$$a^i{}_{,i} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij} a^j.$$

利用公式(3-10),即得(a^i)的散度为

$$a^i{}_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} a^i)}{\partial x^i}.$$

3.3.2 曲率张量

1. 黎曼曲率张量

(1) 黎曼空间 M 的黎曼曲率张量为

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{ik},$$

$$R_{ijkl} = \frac{\partial \Gamma_{jkl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial x^j} + \Gamma_{iml}\Gamma^m_{jk} - \Gamma_{jml}\Gamma^m_{ik}.$$

由上两式可知曲率张量是由克氏记号及其一阶偏导数构成的.曲率张量也可由基本张量 g_{ij} 及其一,二阶偏导数构成:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k}\right) + \Gamma^m_{ik}\Gamma_{jlm} - \Gamma^m_{il}\Gamma_{jkm}.$$

(2) 曲率张量的性质

1° $R_{ijkl} = R_{klij}$,

2° $R_{ijkl} = -R_{jikl}, R_{ijkl} = -R_{ijlk}$,

3° $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$.

(3) 利齐(Ricci)张量是由曲率张量缩并得到的张量

$$R_{jk} = g^{il}R_{ijkl} = R_{ijk}{}^i,$$

它是一个对称张量

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

2. 利齐公式

共变导数的运算,不同于普通求偏导数满足两次求偏导与次序无关的性质.一般说来,对于向量(a^i),二阶共变导数与求导次序有关,即 $a^i{}_{,jk} - a^i{}_{,kj} \neq 0$.它们之间之差与黎曼曲率张量有关,这就是下述的利齐公式.

(1) 对于反变向量(a^i),有

$$a^i{}_{,jk} - a^i{}_{,kj} = R_{jkl}{}^i a^l.$$

(2) 对于共变向量(a_i),有

$$a_{i,jk} - a_{i,kj} = -R_{jki}{}^l a_l.$$

(3) 对于一般张量($A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}$),有

$$A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s, kl} - A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s, lk} = \sum_{m=1}^{r} R_{klh}{}^{i_m} A^{i_1 i_2 \cdots h \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} - \sum_{m=1}^{s} R_{klj_m}{}^h A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots h \cdots j_s}.$$

3. 比安基(Bianchi)公式

曲率张量的共变导数满足以下比安基公式

$$R_{ijkl,m}+R_{ijlm,k}+R_{ijmk,l}=0.$$

对利齐张量 R_{ij} 缩并得到黎曼空间的利齐曲率

$$R=g^{ij}R_{ij}=g^{ij}g^{kl}R_{kijl}.$$

曲率张量、利齐张量等还有如下性质:

$$R_{ij,k}-R_{ik,j}=R^{l}_{jki,l},$$

$$R_{,i}=2R^{j}_{i,j},$$

记张量 $G_{ij}=R_{ij}-\frac{Rg_{ij}}{2}$,则

$$g^{jk}G_{ij,k}=0.$$

4. 黎曼空间在二维切平面上的截面曲率

在空间某点的切空间中的两个切向量(a^i)与(b^i)所确定的二维切平面π的截曲率为

$$K(\pi)=-\frac{R_{ijkl}a^ib^ja^kb^l}{(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})a^ib^ja^kb^l}.$$

如果沿 π 的各个切向量作黎曼空间的测地线得到一个二维曲面,则 $K(\pi)$ 就是这曲面的高斯曲率.

如果截曲率与方向(a^i)和(b^i)无关,则称黎曼空间是常曲率的,此时曲率张量

$$R_{ijkl}=-K(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}).$$

并且 K 为常数(舒尔(Schur)定理).且有

$$K=\frac{R}{n(n-1)}.$$

$K=0$ 的空间称为平坦空间或欧氏空间.

3.4 张量应用举例

张量理论有着广泛的应用.在力学和物理学中用张量表示较为复杂的量,例如,用张量表示应力、应变、惯性矩等.

1. 应力张量

按弹性力学理论,固体在受外力作用时发生形变,在其各点产生应力.所谓应力是指通过该点的某个断面上单位面积所受的力.因此应力不但依赖于该点位置还依赖于所受力的断面方向.这样需要用一个二阶张量来表示应力.

选取空间直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$(或 $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$),在固体内点 $P(\boldsymbol{r})$ 作一个以 P 为一顶点各棱分别平行于坐标轴的长方体元素(如图 3-1 所示),棱长分别为 Δx_i.设与基向量 $\boldsymbol{e}_i$ 垂直的面元上的应力为 $\boldsymbol{\sigma}_i$,而与其对面的面元上的应力为 $\boldsymbol{\sigma}_i^*$,则有 $\boldsymbol{\sigma}_i^*=-\boldsymbol{\sigma}_i$,即应力大小相同而方向相反.设应力 $\boldsymbol{\sigma}_i$ 的分量为$\sigma_{i1},\sigma_{i2},\sigma_{i3}$,即 $\boldsymbol{\sigma}_i=\sigma_{ij}\boldsymbol{e}_j$.分量 $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33}$ 分别是应力 $\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3$ 的法向分量,称为正应力,而 $\sigma_{ij}(i\neq j)$

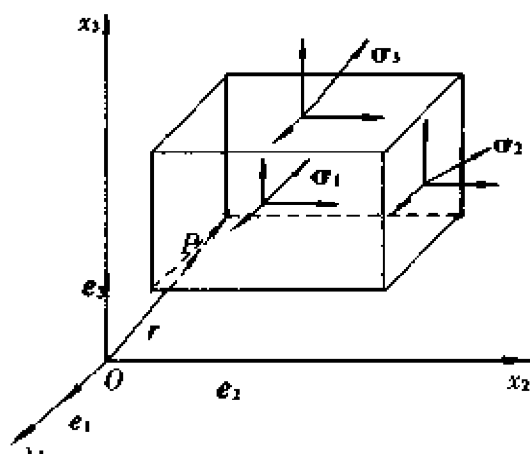


图3-1

称为剪应力.因此,固体内每一点 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3)$ 的应力用9个分量 σ_{ij} 来表示,写为矩阵形式:

$$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}&\sigma_{23}\\ \sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}\end{bmatrix}.$$

首先指出,如果选取另外坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$,用上述表示方法得到 $[\sigma'_{ij}]$,那么有 $\sigma'_{ij}=a_i^k a_j^l\sigma_{kl}$,而 $[a_i^k]$ 是坐标变换矩阵,因此 (σ_{ij}) 是二阶共变张量.

其次,还可以验证 (σ_{ij}) 是一个对称张量,即满足 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$.称 (σ_{ij}) 为固体的应力张量.

2. 应变张量

在外力作用下处于平衡状态的固体不仅应力可用张量来描述,其应变也可用张量表示.

在直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中,设固体内邻近的两点为 $P(\boldsymbol{r})$,$Q(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})$(见图3-2),$\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3)$,$\Delta\boldsymbol{r}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3)$.变形后,$P$ 与 Q 两点分别位移到点 P^* 与 Q^*,记 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ 为点 P 到 P^* 的位移向量,而 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})$ 为点 Q 到 Q^* 的位移向量,于是

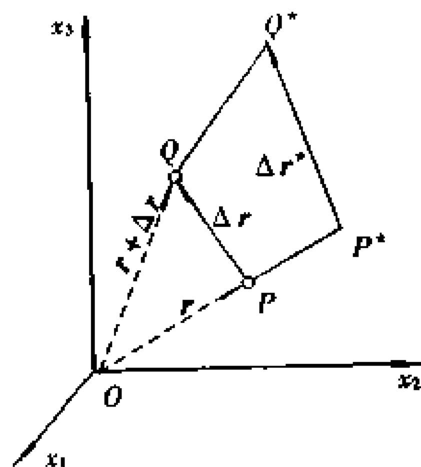


图3-2

$$\boldsymbol{OP}^*=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{OQ}^*=\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}),$$

因此从 P^* 到 Q^* 的相对位移是

$$\Delta\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{P^*Q^*}=\Delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}).$$

相对位移 $\Delta\boldsymbol{r}^*$ 与 $\Delta\boldsymbol{r}$ 之差为

$$\Delta\boldsymbol{u}=\Delta\boldsymbol{r}^*-\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}).$$

记

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=(u_1(x_i),u_2(x_i),u_3(x_i)),\Delta\boldsymbol{r}^*=(\Delta x_1^*,\Delta x_2^*,\Delta x_3^*).$$

得

$$\Delta u_i=\Delta x_i^*-\Delta x_i=u_i(x_j+\Delta x_j)-u_i(x_j).\tag{3-11}$$

由泰勒公式近似地有

$$u_i(x_j+\Delta x_j)-u_i(x_j)=\frac{\partial u}{\partial x_j}\Delta x_j.$$

定义二阶共变张量为

$$t_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x} \quad i,j = 1,2,3, \tag{3-12}$$

它是由相对位移向量 $\boldsymbol{u}$ 的一阶偏导数构成的,亦称为位移向量的梯度张量.这样,由(3-11)式得到

$$\Delta u_i = t_{ij}\Delta x_j. \tag{3-13}$$

此式说明在只精确到 Δx_i 的一次项,点的相对位移向量改变量 Δu_i 是 Δx_i 的线性组合,其组合系数矩阵是$[t_{ij}]$,即梯度张量.

按弹性力学的定义,固体在点 $P(\boldsymbol{r})$ 处沿方向 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的应变为

$$\epsilon = \frac{|\Delta\boldsymbol{r}^*| - |\Delta\boldsymbol{r}|}{|\Delta\boldsymbol{r}|} = \frac{|\Delta\boldsymbol{u}|}{|\Delta\boldsymbol{r}|}. \tag{3-14}$$

当 $|\Delta\boldsymbol{u}|$ 较 $\Delta\boldsymbol{r}$ 或 $\Delta\boldsymbol{r}^*$ 小很多(固体变形不大)时,如图 3-3 所示,$|\Delta\boldsymbol{u}| = |\Delta\boldsymbol{r}^*| - |\Delta\boldsymbol{r}|$ 近似地等于 $\Delta\boldsymbol{u}$ 在 $\Delta\boldsymbol{r}$ 上投影之长,即将 $|\Delta\boldsymbol{u}| = \Delta\boldsymbol{u}\cdot\left(\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{|\Delta\boldsymbol{r}|}\right)$ 代入(3-14)式并利用(3-13)式,得

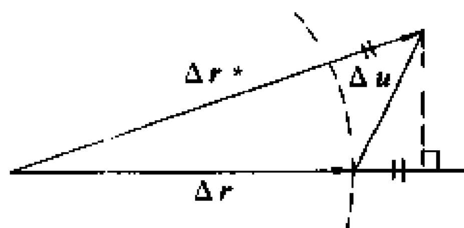


图 3-3

$$\epsilon = \frac{\Delta\boldsymbol{u}\cdot\Delta\boldsymbol{r}}{|\Delta\boldsymbol{r}|^2} = \frac{1}{|\Delta\boldsymbol{r}|^2}\Delta u_i\Delta x_i$$
$$= \frac{1}{\sum\Delta x_i^2} t_{ij}\Delta x_i\Delta x_j,$$

或

$$\epsilon = t_{ij}n_in_j, \quad n_i = \frac{\Delta x_i}{\left(\sum\Delta x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3-15}$$

式中 n_i 是向量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向余弦,(3-15)式表示固体在某点 $\boldsymbol{r}$ 沿方向 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的应变是这方向的方向余弦之二次齐次函数,其系数矩阵是位移梯度张量.也可将(3-15)式写为矩阵形式

$$\epsilon = [n_1\ n_2\ n_3]\begin{bmatrix}\epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13}\\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23}\\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{bmatrix}. \tag{3-16}$$

在(3-16)式中已记 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji})$,它是位移梯度张量(3-12)式的对称化张量,也称为应变张量.

位移梯度张量 t_{ij} 可以表示为它的对称化张量 ϵ_{ij} 与反对称化张量 k_{ij} 之和,即

$$t_{ij} = \epsilon_{ij} + k_{ij},$$

其中

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}), \quad k_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji}).$$

3. 质点组的惯性矩张量

由若干个质点构成的质点组为$(P_i(\boldsymbol{r}_i))$，设第i个质点的质量为m_i，其线速度向量为$\boldsymbol{v}_i$。在质点组运动时，设该组构成的刚体的角速度向量为$\boldsymbol{\omega}$，则第i个质点的线速度向量$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i$。运动着的质点组关于坐标原点的角动量定义为向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i)=\sum_i m_i[\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)]\\&=\sum_i m_i[\boldsymbol{r}_i^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}_i].\end{aligned}\tag{3-17}$$

记$\boldsymbol{L}=(L_1,L_2,L_3)$，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$，$\boldsymbol{r}_i=(x_{1i},x_{2i},x_{3i})$，则(3-17)式写成

$$L_j=I_{jk}\omega_k\quad(j,k=1,2,3),\tag{3-18}$$

其中

$$I_{jk}=\sum_i m_i(\delta_{jk}r_i^2-x_{ji}x_{ki})=I_{kj}$$

或

$$\begin{cases}I_{jj}=\sum_i m_i(r_i^2-x_{ji}^2),\quad j=1,2,3\\I_{12}=I_{21}=-\sum_i m_ix_{1i}x_{2i},\\I_{23}=I_{32}=-\sum_i m_ix_{2i}x_{3i},\\I_{31}=I_{13}=-\sum_i m_ix_{3i}x_{1i}.\end{cases}$$

(3-18)式表明，角动量向量$\boldsymbol{L}$的分量是角速度向量$\boldsymbol{\omega}$的线性组合，其组合系数(I_{ij})是一个二阶共变对称张量，称为质点组的惯性矩张量。

参考文献

1　苏步青等编. 微分几何. 北京：人民教育出版社，1980.
2　吴大任编. 微分几何讲义. 北京：人民教育出版社，1982.
3　方德植编. 微分几何. 北京：人民教育出版社，1981.
4　白正国等编. 黎曼几何初步. 北京：高等教育出版社，1992.
5　杨文茂编. 微分几何的理论与问题. 南昌：江西教育出版社，1994.

·经典数学卷·

第6篇

复变函数论

编　者　林化夷
审校者　余家荣

目　　录

引　　言

复变函数研究的中心对象是解析函数,因此,复变函数论又叫做解析函数论.它的历史可追溯到公元16世纪.在公元16世纪中叶,意大利卡尔丹(Cardan)在解三次方程时,首先产生了负数开方的思想——复数的萌芽.但是,长期以来人们把复数看作不能接受的"虚数".直到17和18世纪,随着微积分的发明与发展,情况才逐渐有了改变.复数理论的系统叙述,是由瑞士数学家欧拉(Euler)作出的.而复变函数的系统理论的形成,是在19世纪由法国数学家柯西(Cauchy)、德国数学家黎曼(Riemann)和魏尔斯特拉斯(Weierstrass)作出的,并且深刻地渗入到数学的许多分支,同时在力学与电学中得到应用.20世纪以来,近代数学的许多分支,有很多问题的解决都依赖于复变函数.复变函数在自然科学和工程技术中(如空气动力学、流体力学、弹性力学、电磁学、热力学等)有广泛的应用.

1　复数和复变函数

自变量为复数的函数就是复变函数.它是一个很重要的基本概念.

1.1　复　　数

1.1.1　复数及其表示

1. 复数

形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 或 $z = x + y\mathrm{i}$ 的数,称为**复数**.其中 x 和 y 是任意的实数,i 合于 $\mathrm{i}^2 = -1$,称为**虚单位**.实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**.记作

$$x = \mathrm{Re}z;\quad y = \mathrm{Im}z.$$

复数除了没有大小关系外,和实数一样能满足相同的运算规则(律).

复数 $x + \mathrm{i}y$ 和 $x - \mathrm{i}y$ 互为**共轭复数**.记 $\bar{z}$ 为 z 的**共轭复数**,于是

$$\overline{x + \mathrm{i}y} = x - \mathrm{i}y.$$

2. 复数的表示法

复数有下面4种常用的表示法:

(1) 代数表示法

$$z = x + \mathrm{i}y.$$

若将 $z = x + \mathrm{i}y$ 用直角坐标系 xOy 中的一点 $P(x, y)$ 表示(见图1-1),则这时的 xOy 平面称为**复平面**(或 z 平面).

(2) 向量表示

$$z = r\angle\theta,$$

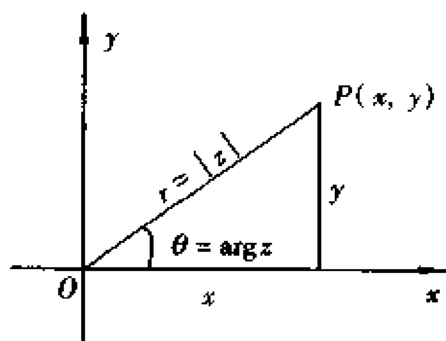


图 1-1

其中 $r=|z|$ 是向量 OP 的长度，称为 z 的模. $\theta=\mathrm{Arg}z$ 是向量 OP 和 x 轴正向的夹角. 称为 z 的辐角. 即有

$$\begin{cases}|z|=r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

由于辐角可以相差 2π 的整数倍，为确定起见，θ 可只取主值，记作 $\arg z$，这时 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$. 于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

注意，当 $z=0$ 时，其模为零，辐角无定义. 当 $z\neq0$ 时，主值 $\arg z$ 的取法如下：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & (\text{当 } z \text{ 在第一象限时}),\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi & (\text{当 } z \text{ 在第二象限时}),\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi & (\text{当 } z \text{ 在第三象限时}),\\ \arctan\dfrac{y}{x} & (\text{当 } z \text{ 在第四象限时}).\end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 三角表示法

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

其中 $r\cos\theta=x=\mathrm{Re}z, r\sin\theta=y=\mathrm{Im}z$.

(4) 指数表示法

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

利用欧拉公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 可将复数的指数表示化为三角表示，即

$$\begin{aligned}x&=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\\&=r\cos\theta+\mathrm{i}\,r\sin\theta\\&=x+\mathrm{i}y\\&=\mathrm{Re}z+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}z.\end{aligned}$$

1.1.2 复球面与无穷远点

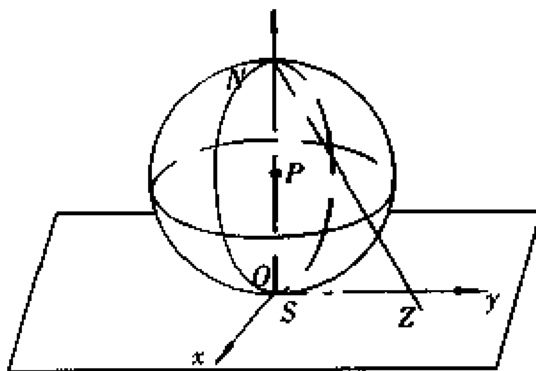


图 1-2

如图 1-2 所示，取一个与复平面切于坐标原点的球，球上的一点 S(南极点) 与原点重合，通过 S 点作垂直于复平面的直线与球面相交于 N 点(北极点). 复平面上任一点 Z 与北极点 N 的连线 NZ, 与球面有唯一

交点 P.这样得到复平面上的点 Z 与球面上的点 P 的一一对应.对应于北极点 N 的点,称为复平面的**无穷远点**,记作 ∞.这样的球面称为**复球面**(复数球面).

值得注意的是:无穷远点与复数无穷大 ∞ 相对应.所谓**无穷大** ∞,是指模为正无穷大,辐角无意义的唯一的一个复数.不要与实数中的无穷大或正(负)无穷大混为一谈.

1.2 曲线、区域

1.2.1 曲线

(1) 若 $z(t) = x(t) + iy(t)$,其中 $x(t), y(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 为实变量 t 的单值连续函数,则 $z = z(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 为复平面上的一条连续曲线,当曲线的起点和终点重合时,称为**闭曲线**.

(2) 一条没有重点的连续曲线称为简单曲线或约当曲线.

1.2.2 区域

(1) 邻域　点 z_0 的邻域 $|z - z_0| < \delta$ 是一个以 z_0 为圆心,δ 为半径的圆.点集 $0 < |z - z_0| < \delta$ 称为 z_0 的一个**去心邻域**.

(2) 内点与边界点　在点集 E 内,若点 z_0 至少有一个邻域,它的所有点都属于 E,则称 z_0 为 E 的**内点**.若 $z_1(\in E)$ 的任意一个邻域内既有属于 E 的点,也有不属于 E 的点,则称 z_1 为 E 的边界点.

(3) 开集　若点集 E 的每个点都是 E 的内点,则称 E 为**开集**.

(4) 连通集　若点集 D 的任意两点都可以用完全属于 D 的折线相连接,则称 D 为**连通集**.

(5) 区域与闭域　复平面上的非空连通开集称为区域,区域与它的边界一起构成**闭区域**,记作 $\overline{D}$.

(6) 单连通域与多连通域　若在域 D 中任何简单闭曲线的内部全含于该区域内.则称 D 为**单连通域**,不是单连通的域,称为**多连通域**.

1.3 复变函数、极限、连续

1.3.1 复变函数的概念

设 D 为一复数集(或平域),若存在一个确定的法则.按照该法则,对于每个复数 $z \in D$,有一个或多个复数 w 与它相对应.则称 w 为 z 的**复变函数**.记作 $w = f(z)$.称 D 为 $f(z)$ 的**定义集合(域)**.

若 z 的每个值只对应 w 的一个值,则称 $f(z)$ 为**单值函数**;若 z 的每个值对应 w 的两个或两个以上的值,则称 $f(z)$ 为**多值函数**.

在 $w = f(z) = u + iv$ 中,u, v 分别称为 $f(z)$ 的实部和虚部.

$$u = \mathrm{Re}f(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2},$$

$$v = \mathrm{Im}f(z) = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2\mathrm{i}}$$

若给定了 $w = f(z)$，则由

$$w(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = f(x + \mathrm{i}y)$$

可知，相当于给定了两个二元实函数：

$$u = u(x,y),\quad v = v(x,y).$$

反之，若给定了 $u = u(x,y)$，$v = v(x,y)$，则 $u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 就构成了 $z = x + \mathrm{i}y$ 的一个复变函数 $w = f(z)$.

1.3.2　映射的概念

函数 $w = f(z)$ 在几何上，可以看作是把 z 平面上的一个点集 D（定义集合）变到 w 平面上的一个点集 G（函数值集合）的映射（或变换）.

若 D 中的点 z_0 被映射 $w = f(z)$ 映射成 G 中的点 $w_0 = f(z_0)$，则称 w_0 为 z_0 的**象点**，而 z_0 称为**原象点**. 集 G 称为集 D 的象集. 如图 1-3 所示.

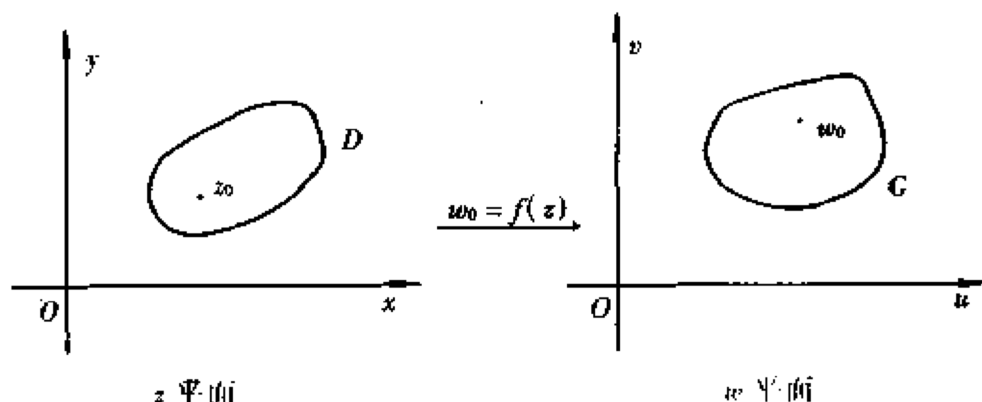


图 1-3

1.3.3　复变函数的极限与连续

(1) 函数的极限　若对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(z) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的**极限**. 记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \text{（常数）}.$$

这里要求 z 以任意方式趋于 z_0 时，A 是唯一的.

(2) 函数的连续　若

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 处**连续**. 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续,则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

复变连续函数的运算法则与实变连续函数的运算法则相类似.

例 1　讨论函数 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (z\neq 0),\\ 0 & (z=0)\end{cases}$ 的连续性.

解　由于当沿 $y=kx$ 趋于零时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=kx)}} f(z)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

它随着 k 的不同而不同. 因此, $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 不存在. 故在 $z=0$ 处 $f(z)$ 不连续.

但是 $f(z)=u+\mathrm{i}v=\dfrac{xy}{x^2+y^2}+\mathrm{i}0$ 除 $x=0,y=0$ 外处处连续. 所以当 $z\neq 0$ 时 $f(z)$ 是连续的.

2　解 析 函 数

2.1　复变函数的导数与微分

2.1.1　导数的定义

设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 中某点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 的邻域内有定义,在该邻域内任取一点 $z_0+\Delta z(\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y\neq 0)$,若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在,则称 $f(z)$ 在 z_0 处**可导**. 此极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的**导数**,记作

$$f'(z_0),\quad 或\quad \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0},\quad 或\quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}.$$

所以

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \tag{2-1}$$

2.1.2　微分的定义

(2-1) 式也可以写为

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+o(|\Delta z|) \tag{2-2}$$

($\Delta z\to 0$ 和 $|\Delta z|\to 0$ 等价),

称 $\mathrm{d}f(z_0)=f'(z_0)\mathrm{d}z$ 或 $f'(z_0)\mathrm{d}z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 处的**微分**. 也说 $f(z)$ 在 z_0 处**可微**.

2.2 解析函数概念与柯西-黎曼条件

2.2.1 解析函数的定义

若函数 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导,则称 $f(z)$ 在 z_0 **解析**.

若 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析,则称 $f(z)$ 在 D 内解析,或称 $f(z)$ 是 D 内的一个**解析函数**(全纯函数,或正则函数).

若 $f(z)$ 在 z_0 不解析,则称 z_0 为 $f(z)$ 的**奇点**.

2.2.2 柯西-黎曼条件

定理 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在定义域 D 内解析的充要条件是 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 D 内可微,且处处满足**柯西-黎曼条件**,简称 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2-3}$$

若 $f(z)$ 在 z 处可导,则其导数

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2-4}$$

例1 函数 $f(z)=\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 是否解析?

解 因为 $u+\mathrm{i}v=f(z)=x-\mathrm{i}y$,所以

$$u(x,y)=x,\quad v(x,y)=-y,$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1,$$

可见 $f(z)=\bar{z}$ 对任意 z 都不满足 C-R 条件.故由定理可知 $f(z)$ 处处不解析.

2.3 初等解析函数

和实初等函数一样,也有**复初等函数**,它们也是由一些最基本的初等函数,经四则运算和复合而成.但在复初等函数中,既有单值的,也有多值的.

2.3.1 多项式和有理函数

(1) 多项式 $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 是全平面 D 中的解析函数,其中 a_0, $a_1,\cdots,a_n$ 为常数.在全平面 D 中解析的函数称为**整函数**,多项式是最简单的整函数.

(2) 有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$(其中 $P(z)$、$Q(z)$ 都是多项式)在除去 $Q(z)=0$ 的点以外处处解析.这是一种最简单的**亚纯函数**.

2.3.2 指数函数

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y),\quad z=x+\mathrm{i}y$$

称 e^z(或 $\exp(z)$) 为 z 的**指数函数**.它是全平面 D 中的解析函数.由于它不是多项式,因此称之为**超越整函数**.

指数函数 e^z 有以下性质:

1° 对任意复数 z 有 $|e^z| = e^x > 0$,故 $e^z \neq 0$.

2° $(e^z)' = e^z$.

3° $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

4° e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数①.

2.3.3　三角函数

正弦函数:
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

余弦函数:
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

正弦函数与余弦函数有以下性质:

1° $\sin z$ 是奇函数,即 $\sin(-z) = -\sin z$;

$\cos z$ 是偶函数,即 $\cos(-z) = \cos z$.

2° $\sin z$ 与 $\cos z$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

3° $e^{iz} = \cos z + i\sin z$.

4° $\sin z$ 与 $\cos z$ 在全平面中解析(也是超越整函数),而且

$$(\cos z)' = -\sin z,$$
$$(\sin z)' = \cos z.$$

正切函数:
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

余切函数:
$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

正切函数与余切函数有下列性质:

1° $\tan z$、$\cot z$ 都是奇函数,即

$$\tan(-z) = -\tan z, \cot(-z) = -\cot z.$$

2° $\tan z$、$\cot z$ 是以 π 为周期的周期函数,即有

$$\tan(z+\pi) = \tan z, \cot(z+\pi) = \cot z.$$

3° $\tan z$ 在复平面上,除使分母 $\cos z$ 为零的点外,处处都是解析的.且

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z}.$$

$\cot z$ 在复平面上,除使分母 $\sin z$ 为零的点外,处处都是解析的,且

$$(\cot z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

---

① $f(z)$ 定义于点集 E 上,若存在复常数 ω,使得对任意 $z \in E$,都有 $f(z+\omega) = f(z)$.则称 $f(z)$ 为 E 上以 ω 为周期的**周期函数**.

2.3.4　双曲函数

双曲正弦:　　$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$;

双曲余弦:　　$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

它们有以下性质:

1° $\sinh z$ 是 z 的奇函数,即 $\sinh(-z) = -\sinh z$;

　$\cosh z$ 是 z 的偶函数,即 $\cosh(-z) = \cosh z$.

2° $\sinh z$ 与 $\cosh z$ 都是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数.

3° $\sinh z$ 与 $\cosh z$ 在 z 平面上处处解析且

$$(\sinh z)' = \cosh z, \qquad (\cosh z)' = \sinh z.$$

4° $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

5° $\sin(iz) = i\sinh z$,　$\cos(iz) = \cosh z$.

2.3.5　对数函数

若 $z \neq 0$ 且 $e^w = z$,则称 w 为 z 的**对数函数**.记作 $w = \mathrm{Ln}z$,因此

$$w = \mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

其中 $\ln z = \ln|z| + i\arg z \quad (-\pi < \arg z \leqslant \pi)$,称为对数函数 $\mathrm{Ln}z$ 的主值.所以

$$\mathrm{Ln}z = \ln z + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

对数函数有以下性质:

1° $\mathrm{Ln}z$ 是一个无穷多值的函数.

2° 设 $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$,则

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2,$$
$$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2.$$

3° 在全平面中,除去原点和负实轴外,$\ln z$ 处处解析,且 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

2.3.6　幂函数与根式函数

幂函数:　　$w = z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln} z} \quad (z \neq 0)$,

其中 α 是任何实数或复数.当 α 是正实数时,补充规定:$z = 0$时,$z^\alpha = 0$.一般说来,z^α 是一个无穷多值函数.当 $\mathrm{Ln}z$ 取主值 $\ln z$ 时,$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ 称为 z^α 的主值.幂函数的导数为

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha - 1}.$$

根式函数:　　$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|}\exp\left(i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)$

$$(0 < \arg z < 2\pi, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

它有 n 个不同的解析分支.

2.3.7　多值解析函数的分支、支点、支线

从前面可以看出：解析函数的反函数，除线性分式外，都是多值函数.

(1) 分支　多值函数 $f(z)$ 的一个**单值分支**(简称分支)，是指一个单值解析函数，它对每个 z 值只取 $f(z)$ 值中的一个. 多值函数有多个分支.

(2) 支点　若 $f(z)$ 各个分支在 $z=a$ 的某邻域给定，又若当 z 绕 a 点画一简单闭曲线时，$f(z)$ 不回到原值，而是从一个分支连续地变到另一分支，则 a 点称为**支点**. 若 z 沿闭曲线绕 a 点 m 周后，$f(z)$ 回到原值，那么称 a 为 $f(z)$ 的 $m-1$ 阶支点.

容易看出，$z=0$ 及 $z=\infty$ 是函数 $\sqrt{z}$ 的支点，也是 $\ln z$ 的支点(在 D 内它可分为无穷多个单值连续分支).

(3) 支线　将多值函数 $f(z)$ 的定义域 D，用连接相应支点的简单曲线剖开. 这种曲线称为**支线**.

例如多值解析函数 $f(z)=\sqrt{z(z-a)}$，有两个支点，若将连接 $0,a$ 的线段作为支线，则在割去支线的域内，可以得 $f(z)$ 两个分支中的任一分支.

3　复变函数的积分

复变函数的积分是研究解析函数的重要工具，而积分理论是解析函数许多重要性质的源泉.

3.1　复变函数积分的概念

3.1.1　积分的定义

定义　设函数 $w=f(z)$ 在光滑或逐段光滑的简单曲线 $C=\widehat{ab}$ 上有定义. 沿从 a 到 b 的方向在 C 上依次任取分点：$a=z_0,z_1,\cdots,z_{n-1},z_n=b$. 把曲线 C 任意分成 n 个弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}(k=1,2,\cdots,n)$. 在每个弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}(k=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 ξ_k，并作和式

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k,$$

这里 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$. 记 $\Delta s_k=\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度，$\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta s_k\}$，当 n 无限增加且 δ 趋于零时，如果不论对 C 的分法及 ξ_k 的取法如何，S_n 有唯一极限. 那么称 $f(z)$ 沿 C **可积**. 并称这个极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的**积分**. 记作

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\delta\to 0)}}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k.$$

3.1.2 积分存在的条件及计算

(1) 将复变函数积分化为线积分. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 沿逐段光滑的曲线 C 连续,则积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在,且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v(x,y)\mathrm{d}x+u(x,y)\mathrm{d}y.$$

上式右边是两个二元实函数的线积分.

(2) 用参数方程将复变函数积分化成定积分. 设简单光滑曲线 C 的参数方程为

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

则有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f[z(t)]\cdot z'(t)\mathrm{d}t.$$

3.1.3 复变函数积分的性质

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 沿曲线 C 连续,则

1° $\int_C f(z)\mathrm{d}z=-\int_{C^-}f(z)\mathrm{d}z$ (C^- 是 C 反向曲线).

2° $\int_C kf(z)\mathrm{d}z=k\int_C f(z)\mathrm{d}z$ (k 为常数).

3° $\int_C[f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z=\int_C f(z)\mathrm{d}z\pm\int_C g(z)\mathrm{d}z.$

4° 设 C 是 C_1 与 C_2 连接而成的,则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2}f(z)\mathrm{d}z.$$

5° 设曲线 C 的长度为 L, M 为正常数. 函数 $f(z)$ 在 C 上满足

$$|f(z)|\leqslant M,$$

则有

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_C|f(z)|\mathrm{d}s\leqslant ML.$$

例1 (重要而常用的例子)试证

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi\mathrm{i} & (n=1),\\ 0 & (n\neq 1\text{的整数}).\end{cases}$$

这里 C 为以 a 为中心, ρ 为半径的圆周.

证 命 $z=a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$. 此即曲线 C 的方程. 于是

$$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,$$

故

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

当 n 为整数且 $n\neq 1$ 时,有

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{\rho^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi}[\cos(n-1)\theta - \mathrm{i}\sin(n-1)\theta]\mathrm{d}\theta.$$

因 $n \neq 1$ 时，

$$\int_0^{2\pi}\cos(n-1)\theta\mathrm{d}\theta = 0,\quad \int_0^{2\pi}\sin(n-1)\theta\mathrm{d}\theta = 0,$$

故

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = 0 \quad (n \neq 1 \text{ 的整数}).$$

例 2 计算积分 $\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$. 其中 C 为连接(0,0) 到(1,0) 再到(1,1) 的折线.

解 积分路径由两条直线段构成：

x 轴上(0,0) 到(1,0) 的线段，其参数方程为 $z = t\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$，此时，$\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$，$\mathrm{Re}z = t$；(1,0) 到(1,1) 的线段，参数方程为 $z = 1 + \mathrm{i}t(0 \leqslant t \leqslant 1)$，此时，$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{d}t$，$\mathrm{Re}z = 1$. 因此

$$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_0^1 1\cdot\mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t^2}{2} + \mathrm{i}t\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}.$$

3.2 积分基本定理

1825 年，柯西(Cauchy) 给出了复变函数积分值何时与积分路径无关的回答——柯西定理. 它是研究解析函数理论的基础. 这个定理的经典证明比较复杂. 1979 年，Vybory 给出了一个简单证明.

3.2.1 柯西积分定理

(1) 单连通域柯西定理 若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则对于 D 内任一简单逐段光滑闭曲线 C，有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

(2) 柯西积分定理的推广 设 C 是一条围线(闭合曲线)，D 为 C 之内部，$f(z)$ 在 D 内解析，在 $\overline{D} = D + C$ 上连续，则有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

(3) 多连通域柯西定理 设 C 为多连通域 D 内的一条简单闭曲线，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是在 C 内部的简单闭曲线，它们互不包含也互不相交，并且以 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为边界的区域全含于 D(见图 3-1).

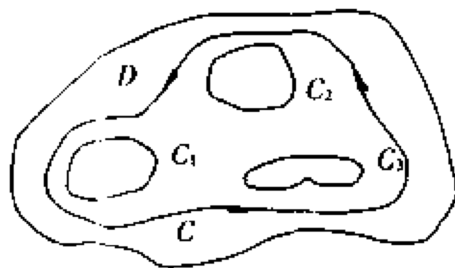


图 3-1

若 $f(z)$ 在 D 内解析，则有

1° $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$;

2° $\oint_L f(z)\mathrm{d}z = 0.$

这里 L 为由 C 及 C_k^- ($k = 0,1,2,\cdots,n$) 所组成的复合闭路(围线),记作 $L = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ (其方向是 C 按逆时针方向进行,C_k^- ($k = 1,2,\cdots,n$) 按顺时针方向进行).

(4) 设 D 是由围线 L 所围成的多连通区域,$f(z)$ 在 D 内解析,并在 $\overline{D} = D + L$ 上连续.则有

1° $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z;$

2° $\oint_L f(z)\mathrm{d}z = 0.$

3.2.2　原函数、牛顿 - 莱布尼兹公式

(1) 原函数　若函数 $\varphi(z)$ 的导数等于 $f(z)$,即若

$$\varphi'(z) = f(z),$$

则称 $\varphi(z)$ 为 $f(z)$ 的原函数.因此 $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 为 $f(z)$ 的一个原函数.

(2) **牛顿 - 莱布尼兹公式(N-L公式)**　若 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析,$F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数,则有牛顿 - 莱布尼兹(Newton-Leibniz) 公式

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = F(z) - F(z_0) \quad (z_0, z \in D).$$

例如,在区域 D: $-\pi < \arg z < \pi$ 内,函数 $F(z) = \ln z$ 是函数 $f(z) = \frac{1}{z}$ 的一个原函数,而 $f(z)$ 在 D 内解析,故

$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \ln z - \ln 1 = \ln z \quad (z \in D).$$

3.3　积分基本公式

复变函数论的基本公式(柯西积分公式) 是由柯西定理直接推得的重要结果,更重要的是通过柯西积分公式,把对任意解析函数的研究化为对柯西积分的研究.

3.3.1　柯西积分公式

设区域 D 的边界是围线 C,$f(z)$ 在 D 内解析,在 $\overline{D} = D + C$ 上连续.则有**柯西积分公式**:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z \quad (z_0 \in D).$$

其中的积分称为**柯西积分**.

若围线 C 是圆周 $z = z_0 + Re^{i\theta}$,则有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})d\theta.$$

即一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

例 3　计算积分 $I=\oint\limits_C\frac{zdz}{(2z+1)(z-2)}$,

其中 C 为 1° $|z|=1$; 2° $|z-2|=1$; 3° $|z-1|=\frac{1}{2}$; 4° $|z|=3$. C 均取逆时针方向.

解　根据柯西公式或柯西定理,有

$$1°\ I=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\frac{z}{2z-4}}{z+\frac{1}{2}}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{z}{2z-4}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{\pi i}{5};$$

$$2°\ I=\oint\limits_{|z-2|=1}\frac{\frac{z}{2z+1}}{z+\frac{1}{2}}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{z}{2z+1}\right|_{z=2}=\frac{4}{5}\pi i;$$

$$3°\ I=\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{zdz}{(2z+1)(z-2)}=0;$$

$$4°\ I=\oint\limits_{|z|=3}\frac{zdz}{(2z+1)(z-2)}$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{zdz}{(2z+1)(z-2)}+\oint\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}}\frac{zdz}{(2z+1)(z-2)}$$

$$=\frac{1}{5}\pi i+\frac{4}{5}\pi i=\pi i.$$

3.3.2　柯西导数公式

(1) 柯西型积分的定义　设 L 由复平面内有限条互不相交的简单逐段光滑曲线(开口或闭合)所组成,$f(z)$ 沿 L 有界可积,则称

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\quad(z\overline{\in}L)$$

是以 $f(z)$ 为核密度的**柯西型积分**.

例如,积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{\mathrm{Re}\xi}{\xi-z}d\xi$　($|z|\neq1$) 是一柯西型积分,柯西积分是柯西型积分的特殊情形.

(2) 柯西型积分的 n 阶导数公式:

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}.$$

(3) 柯西导数公式　设区域 D 是由围线 $L=C+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$ 所围成的有界多连通域,若 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上连续,而在 D 内解析,则对 D 内任一点 z,都有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

推论 1 若 $f(z)$ 在域 D 内解析,则 $f^{(n)}(z)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 也在 D 内解析.

推论 2 若 $f(z)$ 在 z_0 处解析,则 $f^{(n)}(z)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 也在 z_0 处解析.

例 4 计算 $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+1)^4}dz$.

解 $\int_{|z|=2} \frac{\sin z dz}{(z+1)^4} = \frac{2\pi i}{3!}(\sin z)'''\Big|_{z=1} = -\frac{\pi i}{3}\cos(-1) = -\frac{\pi i}{3}\cos 1.$

3.3.3 柯西不等式

若 $f(z)$ 在以 $C: |z - z_0| = \rho_0$ $(0 < \rho_0 < \infty)$ 为边界的闭圆盘上解析,则有**柯西不等式**

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!M(\rho)}{\rho^n} \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

其中 $M(\rho) = \max|f(z)|$ $(0 < \rho \leqslant \rho_0)$.

3.3.4 莫累拉定理

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续,并且对于 D 内任一简单封闭曲线 C,有

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

这是柯西定理的逆定理,称为**莫累拉(Morera)定理**.

3.4 反常复变函数积分

前面讨论的复变函数积分,要求被积函数 $f(z)$ 和积分路径 C 都有界.这种积分称为正常积分,和数学分析一样,复变函数积分可分被积函数 $f(z)$ 无界和积分路径 C 无界两种情形.这种积分称为**反常积分**.

3.4.1 反常复变函数积分的定义

定义 设 C 是复数域 D 内的简单逐段光滑曲线,$\tau_0 \in C$,函数 $f(\tau)$ 在 $C - \{\tau_0\}$ 上连续,在 τ_0 邻近无界,在 C 上 τ_0 的两边各任取一点 τ_1, τ_2.若极限

$$\lim_{\tau_1,\tau_2 \to \tau_0} \int_{C - \widehat{\tau_1\tau_2}} f(\tau)d\tau$$

存在,则称此极限值为函数 $f(\tau)$ 沿曲线 C 的反常复变函数积分.记作

$$\int_C f(\tau)d\tau = \lim_{\tau_1,\tau_2 \to \tau_0} \int_{C - \widehat{\tau_1\tau_2}} f(\tau)d\tau,$$

并称 $f(\tau)$ 沿 C 可积,或称积分 $\int_C f(\tau)d\tau$ 收敛.

若上述极限不存在，则称积分$\int_C f(\tau)\mathrm{d}\tau$发散.

定理 1　若$f(\tau)$在C上有界可积，且$0<\alpha<1$，则复变函数反常积分

$$\int_C \frac{f(\tau)}{(\tau-\tau_0)^\alpha}\mathrm{d}\tau,\quad \tau_0\in C$$

收敛.

定理 2　若C是一简单逐段光滑封闭曲线，D是以C为边界的有界单连通域，$f(z)$在D内解析，在$\overline{D}-\{a\}$上连续($a\in C$)，而在a附近

$$|f(z)|\leqslant\frac{A}{|z-a|^\alpha},$$

其中$0\leqslant\alpha<1$，$z\in\overline{D}-\{a\}$，A为实常数，则积分

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

3.4.2　柯西主值积分

定义 1　设C是复数域D内的简单逐段光滑曲线，函数$f(\tau)$在$C-\{\tau_0\}$上连续，在τ_0邻近无界，$\tau_0\in C$，但不是C的端点. 若极限

$$\lim_{\eta\to0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C-C_\eta}\frac{f(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau$$

存在(其中C_η为$\widehat{\tau_1\tau_2}$，它是以τ_0为中心，以充分小的正数η为半径作一圆周，使它与C的交点恰为两个，按C的方向，一个是τ_1在τ_0的后边，另一个是τ_2在τ_0的前边所构成的弧段，见图 3-2)，则将此极限记为

$$\lim_{\eta\to0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C-C_\eta}\frac{f(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-\tau_0}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau,$$

并称为$f(z)$沿C的柯西主值积分. 称$f(z)$为它的**核密度**. 这个极限值称为**积分主值**，称$\frac{1}{\tau-\tau_0}$为**柯西核**.

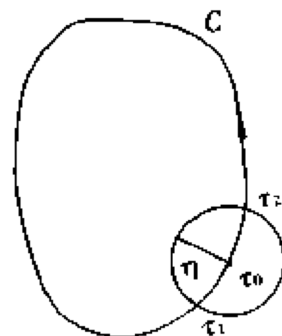


图 3-2

定义 2　设$f(\tau)$定义于(开口或闭合的)光滑曲线C上. 若对C上任意两点τ_1、τ_2，恒有

$$|f(\tau_1)-f(\tau_2)|\leqslant A\cdot|\tau_1-\tau_2|^\alpha\quad(0<\alpha\leqslant1),$$

其中A、α都是确定的实常数，则称$f(\tau)$在C上满足α阶的**赫尔德**(Hölder)**条件**或H^α条件，记作$f(\tau)\in H^\alpha$，并称α为**赫尔德指数**. 也可简记为$f(\tau)\in H$.

定理　设C是光滑闭曲线，已取定正向，若$f\in H$于C上，则柯西主值积分存在，且

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\tau)-f(\tau_0)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}f(\tau_0)\quad(\tau_0\in C).$$

3.4.3 高阶奇异积分

定义 设 C 为一简单逐段光滑闭合曲线，n 为一正整数，$0 < \alpha \leqslant 1$，函数 $f^{(n)}(\tau) \in H$ 于 C 上. 则定义**高阶奇异积分**为

$$\int_C \frac{f(\tau)}{(\tau - \tau_0)^{n+\alpha}} d\tau = \frac{1}{(n + \alpha - 1)\cdots(\alpha + 1)} \int_C \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau - \tau_0)^{\alpha}} d\tau \quad (\tau_0 \in C).$$

例如

1° $\displaystyle\int_C \frac{f(\tau)}{(\tau - \tau_0)^{n+1}} d\tau = \frac{1}{n!} \int_C \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau - \tau_0)} d\tau,\ \tau_0 \in C.$

2° $\displaystyle\int_{|\tau|=1} \frac{f(\tau)}{(\tau - \tau_0)^{\frac{5}{2}}} d\tau = \frac{4}{3} \int_{|\tau|=1} \frac{f''(\tau)}{(\tau - \tau_0)^{\frac{1}{2}}} d\tau,\ |\tau_0| = 1.$

3° $\displaystyle\int_{|\tau|=1} \frac{f(\tau)}{(\tau - \tau_0)^3} d\tau = \frac{1}{2} \int_{|\tau|=1} \frac{f''(\tau)}{(\tau - \tau_0)} d\tau,\ |\tau_0| = 1.$

4 级 数

如同数学分析中数列和级数理论那样，级数和序列是研究复变函数的重要工具. 把解析函数表为级数，不但有理论上的意义，而且也有实用上的意义.

4.1 复数级数

4.1.1 复数列的收敛与发散

(1) 设 $\{\alpha_n\}$ $(n = 1,2,\cdots)$ 为一复数列，$\alpha_n = a_n + ib_n$. 又设 $\alpha = a + ib$ 为一确定的复数. 若极限

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + ib_n) = a + ib$$

存在，则称数列 $\{\alpha_n\}$ 是收敛的；否则称数列 $\{\alpha_n\}$ 发散.

(2) 数列 $\{\alpha_n\}$ $(n = 1,2,\cdots)$ 收敛的必要且充分的条件是：任给 $\varepsilon > 0$，存在整数 $N > 0$，使得当 m 及 $n > N$ 时，恒有 $|\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon$.

4.1.2 复数级数的收敛与发散

(1) 对于复数项的无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

令
$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \quad (\text{部分和}).$$

若复数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S，则称复数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛于 S，并称 S 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 的

和.若数列$\{\alpha_n\}$不收敛,则称**级数**$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ **发散**.

(2) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛的充要条件是级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛,这里$\alpha_n = a_n + \mathrm{i}b_n$.

(3) 若$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$也收敛,且不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$$

成立.

(4) 绝对收敛与条件收敛　若$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$为**绝对收敛**.非绝对收敛的级数称为**条件收敛级数**.

(5) 级数绝对收敛的充要条件　级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$绝对收敛的充要条件是级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛,其中$\alpha_n = a_n + \mathrm{i}b_n$.

4.1.3 复变函数项级数

(1) 定义　设序列$\{f_n(z)\}$ $(n = 1,2,\cdots)$在复平面点集E上有定义,则称

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

是E上的复变函数项级数.

(2) 一致收敛　若任给$\varepsilon > 0$,存在一个与ε有关,而与z无关的整数$N = N(\varepsilon) > 0$,使当$n > N, z \in E$时,恒有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z) - f(z)\right| < \varepsilon,$$

则称级数$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)$在$E$上**一致收敛**于$f(z)$.

(3) 一致收敛的充要条件　级数$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)$在点集$E$上一致收敛的充分与必要条件是对于任意给定的$\varepsilon > 0$,存在整数$N(\varepsilon) > 0$,当$n > N(\varepsilon)$时,对于一切$z \in E$及自然数$p$均有

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

(4) 内闭一致收敛　设函数$f_k(z)$ $(k = 1,2,\cdots)$在区域D内解析.若级数$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)$在$D$内任一有界闭区域上一致收敛于函数$f(z)$,则称该级数在$D$中**内闭一致收敛**于$f(z)$.

(5) 级数的逐项积分与逐项微分

1° 设$f_k(z)$ $(k=1,2,\cdots)$在简单曲线 C 上连续,并且级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(z)$在 C 上一致收敛于 $f(z)$,则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_C f_k(z)\mathrm{d}z=\int_C\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)\mathrm{d}z=\int_C f(z)\mathrm{d}z.$$

2° 设函数$f_k(z)$ $(k=1,2,\cdots)$在区域 D 内解析,且级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(z)$在 D 中内闭一致收敛于函数 $f(z)$.则 $f(z)$ 在 D 内解析,且在 D 内有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}f_k(z).$$

4.1.4　幂级数

(1) 形如$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$的级数称为幂级数.其中 $c_0,c_1,\cdots,c_n,\cdots$ 及 a 均为复常数.

特别地,当 $a=0$ 时,有幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

(2) **阿贝尔(Abel)定理**　若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在某点$z=z_0(\neq 0)$收敛,则对满足 $|z|<|z_0|$ 的 z,级数必绝对收敛;若在 $z=z_0$ 级数发散,则对满足 $|z|>|z_0|$ 的 z,级数必发散.

(3) 收敛圆与收敛半径　对一个幂级数,其收敛情况有以下3种:

1° 对所有的正实数都是收敛的.这时,根据阿贝尔定理可知级数在复平面内处处绝对收敛.

2° 对所有的正实数除 $z=0$ 外都是发散的.这时,级数在复平面内除原点外处处发散.

3° 既存在使级数收敛的正实数,也存在使级数发散的正实数.

对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$而言,存在一个有限正数 R,使得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在圆周 $|z|=R$ 内部绝对收敛,在圆周 $|z|=R$ 的外部发散,称 R 为此幂级数的**收敛半径**.圆 $|z|<R$ 和圆周 $|z|=R$ 分别称为它的**收敛圆盘**(或**收敛圆**)和收敛圆周.在第一种情形,约定 $R=+\infty$;第二种情形约定 $R=0$.

(4) 收敛半径的求法　对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$,若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\rho\quad(\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\rho),$$

则收敛半径
$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty;\\ +\infty, & \rho=0;\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

(5) 和函数的解析性

1° 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的和函数 $f(z)$ 在收敛圆 $|z|<R$ 内解析;

2° 在收敛圆盘内,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 可以逐项求导至任意阶,且

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_{n-1}z^{n-1}.$$

3° 和函数 $f(z)$ 在收敛圆盘内可逐项积分.

4.2 泰勒展式

4.2.1 解析函数的泰勒展式

(1) 泰勒(Taylor)定理 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, z_0 为 D 内的一点, R 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离,则当 $|z-z_0|<R$ 时,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

成立.

上式称为函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点的**泰勒展式**,上式右端的级数称为函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点的泰勒级数.

(2) 泰勒展式的唯一性 任何解析函数展成的泰勒级数是唯一的.

(3) 充要条件 $f(z)$ 在区域 D 内解析的充要条件是 $f(z)$ 在 D 内任一点 a 的邻域内可展成 $(z-a)$ 的幂级数.

(4) 一些初等函数的泰勒展式

1° $\exp z=e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$, $|z|<+\infty$.

2° $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<+\infty$.

3° $\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z|<+\infty$.

4° $\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}$, $|z|<1$.

例 1 求幂函数 $(1+z)^\alpha$ (α 为复数) 的主值支

$$f(z)=e^{\alpha\ln(1+z)},\quad f(0)=1$$

在 $z=0$ 处的泰勒展式.

解　显然,$f(z)$ 在从 -1 起向左沿负实轴剪开的复平面内解析.因此,必能在 $|z|<1$ 内展成 z 的幂级数.

可直接从 $f(z)=e^{\alpha\ln(1+z)}$ 算出泰勒展式的系数,为了方便,设

$$\varphi(z)=\ln(1+z),\quad 1+z=e^{\varphi(z)}.$$

故

$$f(z)=e^{\alpha\ln(1+z)}=e^{\alpha\varphi(z)}.$$

上式两端求导,得

$$f'(z)=e^{\alpha\varphi(z)}\cdot\alpha\varphi'(z)=\frac{\alpha}{1+z}e^{\alpha\varphi(z)}=\frac{\alpha}{e^{\varphi(z)}}\cdot e^{\alpha\varphi(z)}.$$

即

$$f'(z)=\alpha e^{(\alpha-1)\varphi(z)}.$$

继续求导,得

$$f''(z)=\alpha(\alpha-1)e^{(\alpha-2)\varphi(z)},$$
$$\cdots$$
$$f^{(n)}(z)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)e^{(\alpha-n)\varphi(z)},$$
$$\cdots$$

令 $z=0$,得

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\alpha,\quad f''(0)=\alpha(\alpha-1),\cdots$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\cdots$$

于是得到所求的泰勒展式:

$$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots,\qquad |z|<1.$$

4.2.2　解析函数的零点和唯一性

(1) 零点的定义　设函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内解析,并且 $f(z_0)=0$,则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**零点**.

设 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内的泰勒展式为

$$f(z)=c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

1° 若当 $n=1,2,\cdots$ 时,$c_n=0$,则 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内恒为零;

2° 若 $c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$ 不全为零,并且对于正整数 m,$c_m\neq 0$,而对于 $n<m$,$c_n=0$,则说 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶(或 m 重)零点.

(2) 解析函数零点的孤立性　设非零函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析,并且 z_0 是它的一个零点,则存在着 z_0 的一个邻域,在其中 z_0 是 $f(z)$ 的唯一零点.

4.2.3　最大模原理

最大模原理　若函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析,并且它的模 $|f(z)|$ 在 D 内某一点达到最大值,则 $f(z)$ 在 D 内恒等于一常数.

推论1　在区域 D 内不恒为常数的解析函数 $f(z)$,其模 $|f(z)|$ 不能在区域内

点达到最大值.

推论 2 若 $f(z)$ 在有界域 D 内解析,在 $\overline{D}$ 上连续,则 $|f(z)|$ 必在 D 的边界上达到最大模.

4.3 洛朗展式

4.3.1 双边幂级数

(1) 定义 称级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ 为双边幂级数.当所有的负幂系数为零时,就是幂级数.

(2) 收敛定理 若双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的非负幂项部分及负幂项部分存在公共收敛圆环 $D: R_1 < |z-z_0| < R_2$ $(0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant +\infty)$,则它在 D 内绝对收敛,内闭一致收敛,其和函数在 D 内解析.

(3) 双边幂级数在公共收敛圆环内可以逐项积分,逐项微分.

4.3.2 洛朗展式

(1) 解析函数的洛朗展式 若 $f(z)$ 在圆环 $D: R_1 < |z-z_0| < R_2$ $(0 \leqslant R_1 < R_2 < +\infty)$ 内解析,则当 $z \in D$ 时,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{4-1}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

L 是任一圆周 $|\zeta - z_0| = \rho$ $(R_1 < \rho < R_2)$.

(4-1) 式称为函数 $f(z)$ 在 z_0 处的**洛朗**(Laurent) **展式**,而右端的级数称为 $f(z)$ 的**洛朗级数**,c_n 称为$f(z)$ 的洛朗系数.

(2) 解析函数的洛朗展式的唯一性 若函数$f(z)$在圆环 D 内解析,则$f(z)$在 D 内的洛朗展式是唯一的.

(3) 求洛朗展式的方法

1° 直接法:直接利用洛朗系数公式计算 c_n,然后代入洛朗展式中,即可.

2° 间接法:用直接法计算洛朗系数要求积分,这样做一般较困难.通常利用洛朗展式的唯一性来间接地求洛朗展式.

例 2 函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 z 平面上有个奇点:$z_1 = 1, z_2 = 2$.因此,z 平面被分成 3 个不相交的函数 $f(z)$ 的解析区域:

1° 圆盘 $|z| < 1$;

2° 圆环 $1 < |z| < 2$;

3° 圆环 $2<|z|<+\infty$.
试分别在此3个区域内求 $f(z)$ 的洛朗展式.

解 首先将 $f(z)$ 分解成部分分式

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

1° 在圆盘 $|z|<1$ 内,因为 $|z|<2$,故有 $\left|\frac{z}{2}\right|<1$,利用熟知的公式:

$$\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n \quad (|u|<1).$$

得

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

此即函数 $f(z)$ 在圆盘 $|z|<1$ 内的泰勒展式.

2° 在圆环 $1<|z|<2$ 内,即有 $\left|\frac{1}{z}\right|<1,\left|\frac{z}{2}\right|<1$.
所以

$$\begin{aligned}f(z)&=-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)}-\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)}\\&=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.\end{aligned}$$

3° 在圆环 $2<|z|<+\infty$ 内,这时有

$$\left|\frac{1}{z}\right|<1,\quad \left|\frac{2}{z}\right|<1.$$

故

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\\&=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}.\end{aligned}$$

这一例子说明,同一个函数在不同的圆环内的洛朗展式不同,这里展式不同与洛朗展式的唯一性并无矛盾.

4.3.3 解析函数的孤立奇点

(1) 孤立奇点的定义 若函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析,但在 z_0 的某一去心邻域(圆

盘)$0<|z-z_0|<R$内处处解析,则称z_0为函数$f(z)$的**孤立奇点**.

(2) 孤立奇点的分类　根据函数$f(z)$在它的孤立奇点z_0的去心邻域$0<|z-z_0|<R$内的洛朗展式$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$含负幂项的不同情况,将孤立奇点作如下的分类:

1° 可去奇点　若在$f(z)$的洛朗展式中,不含$(z-z_0)$的负幂项,则称孤立奇点z_0为$f(z)$的**可去奇点**.

这时,$f(z)$的洛朗级数就是普通的幂级数:

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots.$$

2° 极点　若在$f(z)$的洛朗展式中,只有有限多个$(z-z_0)$的负幂项,即存在$m>0$,使$c_{-m}\neq0$,而当$n>m$时,$c_{-n}=0$,则称z_0为$f(z)$的**极点**,称m为极点z_0的**阶**,按照$m=1$,或$m>1$,称z_0是$f(z)$的**单极点**,或**m阶极点**.

这时,$f(z)$的洛朗级数为

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots\quad(m>1,c_{-m}\neq0),$$

也可写为

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

其中

$$\varphi(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots$$

这里$\varphi(z_0)\neq0$,且$\varphi(z)$在$|z-z_0|<R$内解析.

3° 本性奇点　若在$f(z)$的洛朗展式中含有$(z-z_0)$的无穷多个负幂项,则孤立奇点z_0称为$f(z)$的**本性奇点**.

(3) 奇点为孤立奇点的充要条件　设函数$f(z)$在$0<|z-z_0|<R\ (0<R\leqslant+\infty)$内解析,则

1° z_0是$f(z)$的可去奇点的充要条件是存在着极限

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=c_0,$$

其中c_0是一复数;

2° z_0是$f(z)$的极点的充要条件是

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty;$$

3° z_0是$f(z)$的本性奇点的充要条件是不存在有限或无限的极限

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\text{不定}.$$

(4) 解析函数的零点与极点的关系　若z_0是$f(z)$的m阶极点,则z_0就是$\frac{1}{f(z)}$的m阶零点,反之也成立.

4.3.4　函数在无穷远点的性态

(1) 在扩充的复平面上,若函数$f(z)$在$z=\infty$的去心邻域$R<|z|<+\infty$内解析$(R>0)$,则称点∞为$f(z)$的孤立奇点.

(2) ∞ 点为 $f(z)$ 可去奇点的充要条件是

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$$

在 $R < |z| < +\infty$ 成立($c_{-n} \neq 0$)，或者

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \text{有限数}.$$

(3) ∞ 点为 $f(z)$ 极点的充要条件是

$$f(z) = \sum_{n=1}^{m} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n},$$

或

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

(4) ∞ 点为 $f(z)$ 本性奇点的充要条件是

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

其中 c_n 有无穷多个不为零(即有无穷多个整数 $n > 0$，使得 $c_n \neq 0$)，或者

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \text{ 不存在}.$$

4.3.5　整函数与亚纯函数

定义1　若 $f(z)$ 在有限复平面 D 上解析，则称 $f(z)$ 为整函数.

显然，无穷远点是整函数的孤立奇点；

当 $f(z)$ 恒等于一个常数时，无穷远点是它的可去奇点；

当 $f(z)$ 是 $n(\geqslant 1)$ 次多项式时，无穷远点是它的 n 阶极点；

在其他情况下，无穷远点是 $f(z)$ 的本性奇点. 这时，称 $f(z)$ 为一个超越整函数.

定理1　若无穷远点是整函数 $f(z)$ 的可去奇点、或极点、或本性奇点，则 $f(z)$ 是一常数、或多项式、或超越整函数.

定义2　若函数 $f(z)$ 在有限复平面上除有极点外，到处解析，则称 $f(z)$ 为一**亚纯函数**.

例如，函数 $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ 是一个亚纯函数，它有极点 $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$).

定理2　若无穷远点 $z = \infty$ 是亚纯函数 $f(z)$ 的可去奇点或极点，则 $f(z)$ 是一个有理函数.

5　留数及其应用

留数理论不但可以用来讨论区域内解析函数零点及极点的个数，而且为计算某些实积分提供了有力的工具.

5.1 留数及留数定理

5.1.1 留数的概念

定义 若 $z=z_0$ 为解析函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 的邻域内解析，C 为 z_0 邻域内任意一条简单闭曲线，则积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

的值，称为函数 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 处的留数，记作 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]$，或 $\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}f(z)$. 故

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z.$$

留数也可定义为

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=c_{-1},$$

其中 c_{-1} 是 $f(z)$ 在以 z_0 为中心的圆环内的洛朗级数中负幂项 $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ 的系数.

5.1.2 留数定理

留数定理 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点：$z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析. C 是 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

这个定理把求沿封闭曲线 C 的积分，转化求被积函数在 C 中的各孤立奇点处的留数.

5.2 留数计算

5.2.1 可去奇点、本性奇点的留数计算

(1) 可去奇点的留数计算 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，由于 $f(z)$ 的洛朗级数无负幂项，因此

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=0.$$

(2) 本性奇点的留数计算 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则需求 $f(z)$ 在 z_0 的环域内的洛朗级数的系数 c_{-1}，便可得

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}.$$

5.2.2 极点的留数计算

(1) 若 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

(2) 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点,则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}.$$

(3) 当 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$,$P(z)$ 和 $Q(z)$ 在 z_0 都解析时,若 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0$, $Q'(z_0)\neq 0$. 则 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点,且

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

例 1　计算函数

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z-\sin z}{z^6}$$

在 $z=0$ 处的留数.

解　显然 $Q(z)=z^6=0$,定出 $f(z)$ 的极点 $z=0$,由于

$$P(0) = (z-\sin z)\big|_{z=0} = 0,$$
$$P'(0) = (1-\cos z)\big|_{z=0} = 0,$$
$$P''(0) = \sin z\big|_{z=0} = 0,$$
$$P'''(0) = \cos z\big|_{z=0} = 1 \neq 0.$$

因此,$z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点,从而 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶极点.由极点的留数计算公式(2),得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right] = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3\frac{z-\sin z}{z^6}\right]$$
$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right) = -\frac{1}{5!}.$$

若用洛朗展开求 c_{-1},计算比较方便,因为

$$\frac{z-\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^6}\left[z-\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{5!z}+\cdots,$$

所以

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right] = c_{-1} = -\frac{1}{5!}.$$

5.2.3　在无穷远点的留数定义与计算

定义　设函数 $f(z)$ 在圆环 $R<|z|<+\infty$ 内解析,C 为圆环内绕原点的任一正向简单闭曲线,则称积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$$

为 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数,记作 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$. 即

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z,$$

其中曲线 C^- 与曲线 C 是同一条曲线，但方向相反.

也可定义

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -c_{-1}.$$

定理　若函数 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点，则 $f(z)$ 在所有各奇点（包括 ∞ 点）的留数的总和必等于零.

$f(z)$ 在 ∞ 点的留数计算为

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right].$$

例 2　计算积分 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$，$C$ 为正向圆周：$|z|=2$.

解　被积函数 $f(z)=\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$ 的奇点是：$z_1=-i,z_2=1,z_3=3$. 根据上述定理，有

$$\mathrm{Res}[f(z),-i]+\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]=0.$$

由于 $z_1=-i$ 与 $z_2=1$ 在 C 的内部，因此，由留数定理有

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)^{10}(z-1)(z-3)} &= 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),-i]+\mathrm{Res}[f(z),1]\}\\ &= -2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\}\\ &= -2\pi i\left\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}+0\right\} = \frac{\pi i}{(3+i)^{10}}.\end{aligned}$$

5.3　应用留数理论计算实积分

在前面的留数定理中，孤立奇点均在区域的内部. 若边界上有孤立奇点时，需将留数定理进一步推广.

5.3.1　推广的留数定理

（1）较简单的推广　若域 D 由逐段光滑曲线 C 围成，$t_0\in C$，$f(z)$ 在 D 内解析，在 $\overline{D}-\{t_0\}$ 上连续，在 t_0 有关于 D 的 n 阶极点，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \theta i\mathrm{Res}[f(z),t_0],$$

其中取 C 关于 D 的正向，θ 是 t_0 处关于域 D 的张角（见图 5-1）.

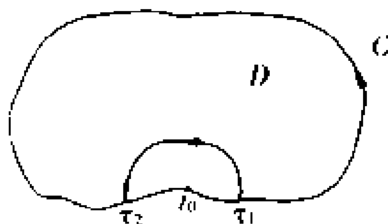


图 5-1

（2）较一般的推广　若 D 是复合闭路 $C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_m^-$ 所围成的有界多连域，$t_1,t_2,\cdots,t_n\in C$，$f(z)$ 在 D 内解析，在 $\overline{D}-\{t_j\}_1^N$ 上连续，在 t_j 有

关于 D 的 n_j 阶极点($j=1,2,\cdots,N$),则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{N}\theta_j\mathrm{Res}[f(z),t_j],$$

其中 C 取关于 D 的正向,θ_j 是 t_j 处关于域 D 的张角($j=1,2,\cdots,N$).

(3) 更一般的推广　设 D 是由复合闭路 $C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$ 所围成的有界多连域,$z_1,z_2,\cdots,z_m\in D,t_1,t_2,\cdots,t_N\in C$,若函数 $f(z)$ 在 $D-\{z_1,z_2,\cdots,z_m\}$ 内解析,在 $\overline{D}-\{z_1,z_2,\cdots,z_m;t_1,t_2,\cdots,t_N\}$ 上连续,$f(z)$ 在 $t_1,t_2,\cdots,t_N$ 分别有关于 D 的 $n_1,n_2,\cdots,n_N$ 阶的极点,则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z),z_k]+\sum_{j=1}^{N}\beta_j\mathrm{Res}[f(z),t_j],$$

其中 $\beta_j=\dfrac{\theta_j}{2\pi}$ 为在 t_j 处关于 D 的张度,C 取关于 D 的正向.积分在每个 t_j 处在高阶奇异积分(重极点时),或柯西主值(单极点时)意义下理解.

5.3.2 留数应用于积分计算

在用留数计算实积分时,常用到下面的定理

约当引理　若当 z 在上半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 上趋于零,则对任一正数 t,有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}\mathrm{d}z=0,$$

其中 C_R 是以原点为中心,R 为半径的上半圆周.

下面考虑几种常见的实积分类型,其结果均可由约当引理和推广的留数定理推得.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$

设 $R(x)$ 为 x 的有理函数,其分母的次数至少比分子高二次.这时

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}z_j\geqslant 0}\beta_j\mathrm{Res}[R(z),z_j],\tag{5-1}$$

其中 $R(z)$ 在复平面上有有限个极点 z_j,张度 β_j 在上半闭圆盘内点 z_j 取1.而在实轴上取 $\dfrac{1}{2}$.

例3　求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

解　考虑函数 $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$,它有两个二阶极点,在上半平面上的一个极点是 $z=\mathrm{i}$,由公式(5-1)得

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^2},\mathrm{i}\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{4\mathrm{i}}=\frac{\pi}{2}.$$

故
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{4}.$$

(2) $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$,

设 $R(x,y)$ 是 x,y 的有理函数,这时
$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}. \tag{5-2}$$

例 4　求主值积分($x=\frac{\pi}{3}$ 处)
$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}-\cos x}dx.$$

解　首先将被积函数化成指数形式,然后,利用公式(5-2).
$$I=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x-\cos 3x}{\cos\frac{\pi}{3}-\cos x}dx$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x-\cos 3x}{\cos\frac{\pi}{3}-\cos x}dx+i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x-\sin 3x}{\cos\frac{\pi}{3}-\cos x}dx\right\}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{xi}-e^{3xi}}{\cos\frac{\pi}{3}-\cos x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{xi}-e^{3xi}}{e^{\frac{\pi}{3}i}+e^{-\frac{\pi}{3}i}-e^{xi}-e^{-xi}}dx.$$

令 $z=e^{ix}$,并由(5-2)式,有
$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{(z-z^3)dz}{(e^{\frac{\pi}{3}i}+e^{-\frac{\pi}{3}i}-z-z^{-1})iz}$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{z-z^3}{(z-e^{\frac{\pi}{3}i})(z-e^{-\frac{\pi}{3}i})}dz$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}f(z)dz,$$

其中 $f(z)=\dfrac{z-z^3}{(z-e^{\frac{\pi}{3}i})(z-e^{-\frac{\pi}{3}i})}$ 在 $z=e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$ 有一阶极点.

再由推广的留数定理,有
$$I=-\frac{1}{2}\left\{\text{Res}[f(z),e^{\frac{\pi}{3}i}]+\text{Res}[f(z),e^{-\frac{\pi}{3}i}]\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}-(e^{\frac{\pi}{3}i})^3}{e^{\frac{\pi}{3}i}-e^{-\frac{\pi}{3}i}}+\frac{e^{-\frac{\pi}{3}i}-(e^{-\frac{\pi}{3}i})^3}{e^{-\frac{\pi}{3}i}-e^{\frac{\pi}{3}i}}\right]=\frac{1}{2}.$$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos mx\,dx$ 或 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin mx\,dx\ (m>0)$

设 $f(z)$ 在 $\text{Im}z\geqslant 0$ 上除有限个孤立奇点外处处解析(在实轴上只有极点),而且当 z 在 $\text{Im}z>0$ 时,$\lim\limits_{z\to+\infty}f(z)=0$,这时

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z \geq 0} \beta_j \mathrm{Res}[e^{imz} f(z), z_j].\tag{5-3}$$

例5　求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

解　由于被积函数

$$\frac{\sin x}{x} = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{ix}}{x}\right] = \frac{e^{ix}}{ix},$$

因此

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

令 $f(z) = \frac{1}{z}$,它在 $z = 0$ 有一阶极点,由公式(5-3)并将张度 β_j 取 $\frac{1}{2}$,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} \cdot \frac{1}{x} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \mathrm{Res}[f(z), 0] = \pi i.$$

故

$$I = \frac{1}{2i}\pi i = \frac{\pi}{2}.$$

(4) $I = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx\ (-1 < \alpha < 1)$.

设

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} \quad (a_0, b_0, a_n, b_m \neq 0).$$

当 $0 < \alpha < 1$ 时,$m > n$. 设辅助函数 $F(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}$. 将复平面沿正实轴(包括原点)作剖线、取分枝、作围线 $\Gamma(R, \varepsilon)$,要使得 $F(z)$ 的内域及实轴上包含 $f(z) = \frac{R(z)}{(z^\alpha)_0}$ 的所有有限极点 z_j,则

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = \frac{2\pi i \sum_j \beta_j \mathrm{Res}[f(z), z_j]}{(1 - e^{-2\alpha\pi i})}\tag{5-4}$$

当 $-1 < \alpha < 0$ 时,要求 $R(x)$ 分母比分子至少高二次.

例6　计算欧拉积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x)x^\alpha}, 0 < \alpha < 1.$$

解　考虑多值函数 $F(z) = \frac{1}{(1 + z)z^\alpha}$,因为 z^α 以0及 ∞ 为枝点,所以沿正实轴(包括原点)作剖线、取在正实轴上岸 z^α 为正实值的解析分枝 $(z^\alpha)_0$,其相应 $F(z)$ 记作 $f(z) = \frac{1}{(1 + z)(z^\alpha)_0}$,显然它在 $z = -1$ 时有单极点,这时张度 β_j 取1. 故由(5-4)式积分,有

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} \cdot \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1 + z)z}, -1\right] \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} \cdot \frac{1}{e^{\pi i\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}. \end{aligned}$$

(5) $\int_0^{+\infty} R(x)\ln x\mathrm{d}x$.

设 $R(x)$ 是有理函数,要求分母比分子至少高二次,这时,设辅助函数 $F(z)=R(z)(\mathrm{Ln}z)^2$.将复平面沿正实轴(包括原点)作为支线割开,得到它的单值域 D.取 $\mathrm{Ln}z$ 的在正实轴上岸为实值的分枝,其相应 $F(z)$ 记为 $f(z)=R(z)(\ln z)^2$.若 z_k 是 $R(z)(\ln z)^2$ 在 D 内的各个极点,则

$$\int_0^{+\infty} R(x)\ln x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)(\ln z)^2,z_k]\right\}.\tag{5-5}$$

例 7　计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$.

解　考虑辅助函数 $f(z)=\frac{1}{(1+z)^3}\cdot(\ln z)^2$.它在 $z=-1$ 处有三阶极点.其留数为

$$\mathrm{Res}\left[\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3},-1\right]=1-\mathrm{i}\pi.$$

故由(5-5)式,得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathrm{Res}f(z),-1\}$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{1-\mathrm{i}\pi\}=-\frac{1}{2}.$$

除了以上考虑的5个类型的定积分外,其他类型的定积分还很多.读者可查积分表.

5.3.3　留数应用于级数求和

设 $R(z)$ 是分母次数比分子高两次以上的有理函数,且其极点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 都不是整数,则

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}R(k)=-\pi\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)\cot(\pi z),z_j],$$

又

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^kR(k)=-\pi\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)\csc\pi z,z_j].$$

例 8　求级数 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^2}$ 的和.

解　取 $R(z)=\frac{1}{(\alpha+z)^2}$,它有一个二阶极点 $z=-\alpha$.其留数为

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(\alpha+z)^2}\cot z,-\alpha\right]=\lim_{z\to-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\cot z]=-\pi\csc^2\pi\alpha.$$

于是

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^2}=\pi^2\csc^2\pi\alpha.$$

5.4 辐角原理与儒歇定理

辐角原理和儒歇(Rouché)定理可用来估计解析函数在某区域零点(或极点)的个数.

5.4.1 对数留数

定义 设 C 为一围线,$f(z)$ 在 C 的内部除可能有有限个极点外是解析的,在 C 上连续且不为零.则称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

为函数 $f(z)$ 关于围线 C 的**对数留数**.

定理 函数 $f(z)$ 关于围线 C 的对数留数等于 $f(z)$ 在 C 内零点个数与极点个数的差(一个 n 阶零点算作 n 个零点,而一个 m 阶极点算作 m 个极点).即

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N(f,C) - P(f,C),$$

式中 $N(f,C)$ 与 $P(f,C)$ 分别表示 $f(z)$ 在 C 内部的零点与极点的个数.

5.4.2 辐角原理

辐角原理 设 C 为一围线,$f(z)$ 在 C 的内部除可能有有限个极点外是解析的,在 C 上连续且不为零,则 $f(z)$ 在围线 C 内部的零点个数与极点个数之差,等于当 z 沿 C 之正向绕行一周后 $\arg f(z)$ 的改变量 $\Delta_C \arg f(z)$ 除以 2π,即

$$N(f,C) - P(f,C) = \frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi},$$

其中 N,P 分别记零点与极点的总个数.

5.4.3 儒歇定理

儒歇定理 设 C 为一围线,函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 满足条件:

1° 它们在 C 上及其内部均解析;

2° 在 C 上,$|f(z)| > |g(z)|$.

则函数 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 C 的内部有同样多的零点.即

$$N(f+g,C) = N(f,C).$$

例9 利用儒歇定理证明:n 次多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

必有 n 个(一阶零点)根.

证 命 $f(z) = a_0 z^n$,

$$g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n.$$

当 z 在充分大的圆周 $C: |z| = R$ 上时,例如,取

$$R > \max\left\{\frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{|a_0|}, 1\right\},$$

于是

$$\begin{aligned}|g(z)| &\leqslant |a_1| R^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}| R + |a_n| \\ &< (|a_1| + \cdots + |a_n|) R^{n-1} \\ &< |a_0| R^n = f(z).\end{aligned}$$

由儒歇定理，可知

$P(z) = f(z) + g(z)$ 与 $f(z)$ 在 C 内部有同样多的零点，即是 n 个零点.

6　解 析 开 拓

所谓解析开拓，即把某一区域内已知的解析函数延拓成较大区域内的解析函数. 解析开拓可以使我们对多值解析函数的本质了解得更清楚，更深入.

6.1　解析开拓的概念与方法

6.1.1　解析开拓的定义

设函数 $f_1(z)$ 在区域 D_1 内有定义，若存在包含 D_1 的区域 D_2 及区域 D_2 内的解析函数 $f_2(z)$，使得在区域 D_1 内有 $f_1(z) = f_2(z)$. 则称函数 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 从 D_1 到 D_2 的**解析开拓**. 简称 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 的解析开拓.

例如，函数 $f_1(z) = \sum\limits_{n=0} z^n$ 在区域 D_1: $|z| < 1$ 内解析. 而函数 $f_2(z) = \frac{1}{1-z}$ 在区域 D_2(z 平面去掉 1) 内解析，并且在 D_1 内 $f_2(z) = f_1(z)$，故 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 的解析开拓.

6.1.2　对称开拓

对称原理　设 D 是上半平面(或下半平面)的一个区域，其一部分边界是实轴上的开区间 I，并设 D 关于实轴的对称区域为 D^*，若函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $D \cup I$ 上连续，并且在 I 上取实值，则函数

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D; \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^* \end{cases}$$

在 $D \cup I \cup D^*$ 上解析.

6.1.3　幂级数开拓

若函数 $f_1(z)$ 在圆盘 $D_1 = \{z \mid |z - z_1| < r_1\}$ $(0 < r_1 < \infty)$ 内解析，在 D_1 内任取一点 $z_2 (\neq z_1)$，则 $f_1(z)$ 在该点的泰勒展式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_1^{(n)}(z_2)}{n!}(z-z_2)^n,$$

设它的收敛半径为 r_2,则上述级数在圆盘 $D_2=\{z\mid |z-z_0|<r_2\}$ 内定义一个解析函数 $f_2(z)$.

显然 $r_2\geqslant r_1-|z_1-z_2|$,而且,在 $D_1\cap D_2$ 内,有 $f_1(z)=f_2(z)$.这时,可有下面两种情况:

1° 若 $r_2>r_1-|z_1-z_2|$,则 D_2 有一部分在 D_1 外,此时就说 $f_1(z)$ 可以沿过点 z_2 的半径 z_1z_T 方向解析开拓到 D_1 外,或者说经过 z_T 的一个邻域解析开拓到 D_1 外,如图 6-1(a) 所示.

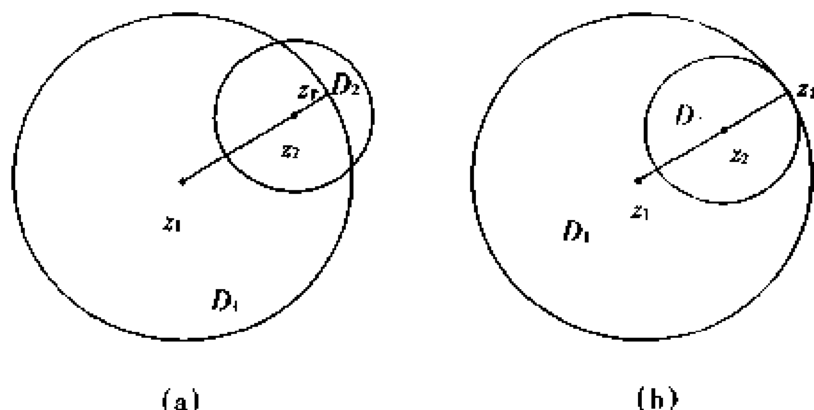


图 6-1

2° 若 $r_2=r_1-|z_1-z_2|$,则 D_2 包含在 D_1 内,且 D_2 与 D_1 相切.此时,就说 $f_1(z)$ 不能沿过 z_2 点的半径 z_1z_T 方向解析开拓到 D_1 外.或者说不能经过 z_T 的一个邻域解析开拓到 D_1 外,如图 6-1(b) 所示.此时,D_1 与 D_2 的切点 z_T 必为 $f_1(z)$ 的奇点.因此,奇点是解析开拓的障碍.

例1　设

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1.$$

试问 $f_1(z)$ 能否沿过 $z=-\frac{\mathrm{i}}{2}$ 的半径方向上解析开拓到 $D_1=\{z\mid |z|<1\}$ 外?

解　因为当 $|z|<1$ 时,$f_1(z)=\frac{1}{1-z}$,所以

$$f_1\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=\frac{2}{5}(2-\mathrm{i}),\cdots$$

$$f_1^{(n)}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=n!\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}(2-\mathrm{i})^{n+1}.$$

因此,$f_1(z)$ 在 $z=-\frac{\mathrm{i}}{2}$ 点的泰勒展式为

$$f_2(z)=f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)}{n!}\left(z+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{5}(2-\mathrm{i})\right]^{n+1}\left(z+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n},$$

它的收敛半径为$\frac{\sqrt{5}}{2}$. 因此,$f_2(z)$ 在圆盘 $D_2 = \left\{z \left| \left|z+\frac{\mathrm{i}}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}\right.\right\}$ 内解析. D_2 有一部分在 D_1 外,如图 6-2 所示. 而在 D_1 与 D_2 的公共部分内,有 $f_1(z) = f_2(z)$. 因此,$f_1(z)$ 可以沿过 $-\frac{\mathrm{i}}{2}$ 点的半径方向上解析开拓到 D_1 外.

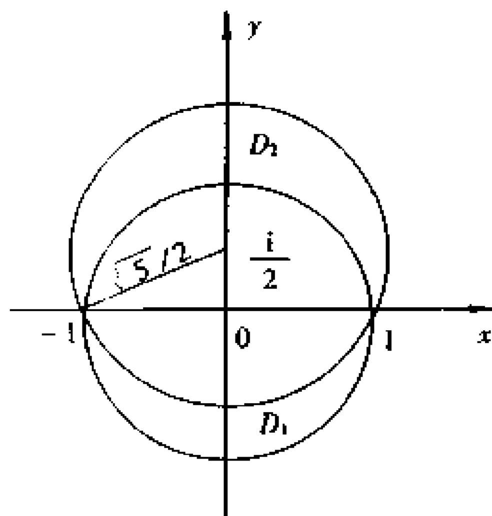


图 6-2

6.1.4 将实变函数开拓为复变函数

对于定义在曲线 L 上的函数 $f_1(z)$,若存在包含 L 的区域 D_1 及 D_2 内的解析函数 $f_2(z)$,使在 L 上 $f_2(z) = f_1(z)$. 则 $f_2(z)$ 称为 $f_1(z)$ 从 L 到 D_2 的解析开拓,并且解析开拓是唯一的.

特别地,当 L 为实轴上的线段 $a < x < b$ 时,这就是把实变量函数开拓成定义于复数域上的解析函数.

例如,在实轴上定义的指数函数 $f_1(x) = \mathrm{e}^x$,可以开拓到复平面.

事实上,$f_1(x)$ 在原点处的幂级数展式为

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ |x| < +\infty.$$

在这个级数中,用复变数 z 代替实变数 x,就得到幂级数

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

它在 z 平面上处处收敛. 可见,$f_2(z)$ 是 z 平面上的解析函数. 它就是实变函数 $f_1(x)$ 在 z 平面上的解析开拓.

6.2 完全解析函数和黎曼面

6.2.1 解析开拓原理

(1) 解析元素　若函数在区域 D 内解析,则 $f(z)$ 和 D 合称为**解析函数元素**,简称为解析元素,记作(f, D).

(2) 解析开拓原理　对于两个解析元素(f_1, D_1) 和(f_2, D_2), 若 $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ 且在区域 $d_{12} \subset D_1 \cup D_2$ 内 $f_1(z) = f_2(z)$. 则$(F(z), D_1 \cup D_2)$ 也是一个解析元素,其中

$$F(z)=\begin{cases}f_1(z), & 当\ z\in D_1-d_{12};\\ f_2(z), & 当\ z\in D_2-d_{12};\\ f_1(z)+f_2(z), & 当\ z\in d_{12}.\end{cases}$$

(3) 直接解析开拓　若 $D_1\cap D_2=d_{12}$ 为一区域 D_1 及 D_2 互不包含，且 $f_1(z)=f_2(z)\ (z\in d_{12})$. 则称解析元素 (f_1,D_1) 与 (f_2,D_2) 互为**直接解析开拓**.

例如，设 $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\quad(z\in D_1:|z-1|<1)$,

$$f_2(z)=\frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^n\quad(z\in D_2:|z-\mathrm{i}|<1),$$

则　1° (f_1,D_1) 及 (f_2,D_2) 均为解析元素；

2° 圆盘 D_1 及 D_2 的公共部分 d_{12} 是一个区域，如图 6-3 所示；

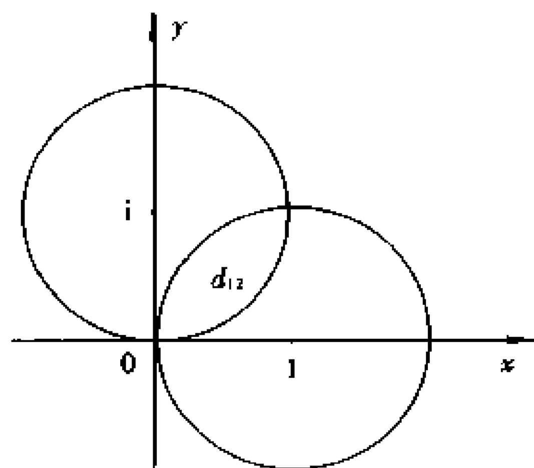


图 6-3

3° 根据等比级数求和公式，当 $z\in D_1\cap D_2$ 时，

$$f_1(z)=f_2(z)=\frac{1}{z}.$$

因此，(f_1,D_1) 及 (f_2,D_2) 互为直接解析开拓.

(4) 间接解析开拓、链　若在解析元素组 $(f_1,D_1),(f_2,D_2),\cdots,(f_n,D_n)$ 中，(f_k,D_k) 与 (f_{k+1},D_{k+1}) 互为直接开拓 $(k=1,2,3,\cdots,n-1)$，则称 $(f_1,D_1),(f_2,D_2),\cdots,(f_n,D_n)$ 为解析开拓链. 称 (f_1,D_1) 与 (f_n,D_n) 互为**间接解析开拓**.

6.2.2　完全解析函数和黎曼面

(1) 一般解析函数　设 $\{(f,D)\}$ 为解析元素的集合（有限或无限），其中任意两个元素 $(f_\alpha,D_\alpha),(f_\beta,D_\beta)$ 都存在解析函数链，使它们互为间接解析开拓，称 $\{(f,D)\}$ 定义了一个一般解析函数.

(2) 完全解析函数与黎曼面　设 $\{(f,D)\}$ 定义的一般解析函数含了任一元素的一切解析开拓，则称 $\{(f,D)\}$ 为**完全解析函数**.

若把 $\{(f,D)\}$ 中，具有相同函数值的区域粘贴起来，这样形成的一个区域（或推广了的区域），称为 $\{(f,D)\}$ 的**黎曼面**.

简单地说，完全解析函数是不能再解析开拓（或者说开拓到最大限度）的一般解析函数，黎曼面就是它的最大定义域，而黎曼面的边界称为**自然边界**.

例 2　求作函数 $F(z)=z^{\frac{1}{n}}$ 的黎曼面（n 为自然数，且 $n>1$）.

解　设

$$f_k(z)=|z|^{\frac{1}{n}}\exp\left(\frac{\arg z+2k\pi}{n}\mathrm{i}\right),$$

$$D_k = \{z \mid 0 < \arg z < 2\pi\} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n-1).$$

由于$f_k(z)$在D_k的实轴下沿各点的极限值等于$f_{k+1}(z)$在D_{k+1}的实轴上沿对应点的极限值($k = 0,1,2,\cdots,n-2$);$f_{n-1}(z)$在D_{n-1}的实轴下沿各点的极限值等于$f_0(z)$在D_0的实轴上沿各对应点的极限值.所以设想有n个相重叠的z平面,它们的原点位置与实轴方向都相同.将它们沿正实轴割开,依次记它们为$D_0,D_1,2,\cdots,D_{n-1}$.然后,分别将D_k的实轴下沿与D_{k-1}的实轴上沿相粘贴($k = 0,1,\cdots,n-2$);D_{n-1}的实轴下沿与D_0实轴上沿相粘贴.就得到一个封闭的n片平面构成的曲面.它就是完全解析函数$F(z) = z^{\frac{1}{n}}$的黎曼曲面(图6-4表示$n = 4$时,$F(z)$的黎曼面).

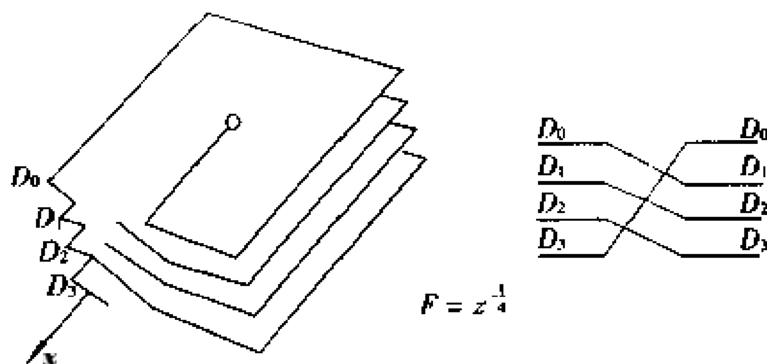


图6-4

6.2.3 单值性定理

(1) 沿曲线的解析开拓　设在解析链$(f_1,D_1),(f_2,D_2),\cdots,(f_n,D_n)$中,圆盘$D_k$(或$D_{k+1}$)的圆心在$D_{k-1}$(或$D_k$)内($k = 2,3,\cdots,n$).若圆盘$D_1,D_2,\cdots,D_n$的圆心依序在简单连续曲线$C$上,而$C$的端点分别是圆盘$D_1$及$D_n$的圆心.则称$(f_n,D_n)$是$(f_1,D_1)$沿曲线$C$的解析开拓.

(2) **单值性定理**　在有界单连通区域D中,若某解析元素(f_0,D_0)能沿D内任意曲线作解析开拓,则由(f_0,D_0)在D内生成的函数$f(z)$是D内的单值解析函数.

7 保形映射

一个复变函数$w = f(z)$ $(z \in E)$,从几何观点看来,可解释为从z平面到w平面之间的一个映射(变换).解析函数所构成的映射(简称**解析映射**)的某些重要特性,在数学本身,以及在解决流体力学、弹性力学、电磁学等学科的某些实际问题中,都是十分重要的.

7.1　解析映射的特性

7.1.1　导数的几何意义

设 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 是 D 内任一定点，$w_0=f(z_0)$. 过 z_0 的任一曲线 C，经 $w=f(z)$ 映射到 w_0 的象曲线 Γ. 设 $f'(z_0)\neq 0$，记 $\Delta z=|\Delta z|e^{i\varphi}$ 及 $\Delta w=|\Delta w|e^{i\theta}$，由导数定义，有

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|e^{i(\theta-\varphi)}=re^{i\alpha}.$$

(1) 导数模的几何意义　导数的模为

$$|f'(z_0)|=r=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|.$$

它的几何意义是表示曲线 C 经过 $w=f(z)$ 映射后，在 z_0 的**伸缩率**.

当伸缩率 $|f'(z_0)|>1$ 时，映射是伸张的；当 $|f'(z_0)|<1$ 时，映射是压缩的. 伸缩率 $|f'(z_0)|$ 只与 z_0 的位置有关和曲线 C 的方向、形状无关. 可见，解析函数 $w=f(z)$ 的映射在 $f'(z_0)\neq 0$ 的点 z_0 都有一个确定的伸缩率 $|f'(z_0)|$.

(2) 导数辐角的几何意义　导数的辐角为

$$\arg f'(z_0)=\alpha=\lim_{\Delta z\to 0}(\theta-\varphi)=\theta_1-\varphi_1,$$

其中 $\varphi_1=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varphi$ 表示曲线 C 在 z_0 的切线倾角，$\theta_1=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\theta$ 表示象曲线 Γ 在 w_0 点的切线倾角(见图 7-1).

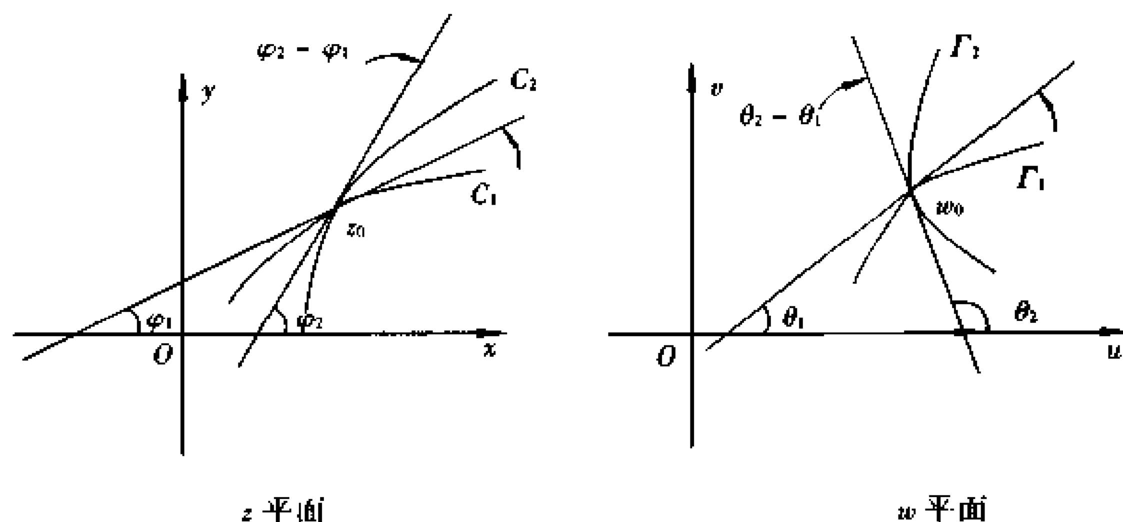


图 7-1

$\arg f'(z_0)$ 的几何意义是表示过 z_0 的任一曲线 C，经 $w=f(z)$ 映射后，它在 z_0 的切线倾角变到象曲线 Γ 在 w_0 处的切线倾角所旋转的角度. **旋转角** $\alpha=\arg f'(z_0)$ 只与 z_0 有关，和曲线 C 的方向、形状无关. 可见，解析函数 $w=f(z)$ 的映射在 $f'(z_0)\neq 0$ 的点，都有一个与方向无关的、确定的旋转角 $\arg f'(z_0)$.

7.1.2 映射的保角性与保形性

(1) 映射的保角性　若过 z_0 点除曲线 C_1 外,还有另一曲线 C_2,它在 z_0 的切线的倾角为 φ_2,C_2 对应的象曲线是 Γ_2,如图 7-1 所示,Γ_2 在 w_0 的切线倾角为 θ_2,由于 $\arg f'(z_0)$ 在 z_0 只有唯一的值($-\pi < \alpha \leqslant \pi$),即 $\theta_2 - \varphi_2 = \theta_1 - \varphi_1$,故有 $\theta_2 - \theta_1 = \varphi_2 - \varphi_1$. 由此可得:过 z_0 任意两条曲线的夹角,经过 $w = f(z)$ 映射后,象曲线的夹角大小和顺序都不会改变. 这一重要性质称为映射的**保角性**.

(2) 映射的保形性　若 $f(z)$ 在 z_0 点解析且 $f'(z_0) \neq 0$,则 $f(z)$ 在 z_0 点的一个足够小的邻域内所实现的映射同时具有保角性和伸缩率不变性,这一重要性质,称为映射的**保形性**.

若 $f(z)$ 在区域 D 上每一点都具有保形性,则称映射 $w = f(z)$ 为区域 D 上的保形映射.

7.2 线性分式映射

7.2.1 分式线性映射的结构

(1) 线性函数

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (bc - ad \neq 0)$$

所实现的映射,称为分式线性映射,其中 a, b, c, d 是复常数.

(2) 分式线性映射的结构　任一分式线性映射都可以作如下变形:

当 $c = 0$ 时,

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \frac{a}{d}\left(z + \frac{b}{a}\right).$$

当 $c \neq 0$ 时,

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

由此可见,任一个分式线性映射都可以分解为以下几种简单映射的复合:

1° $w = f_1(z) = z + a$ (a 为任意复数);

2° $w = f_2(z) = bz$ (b 为任意复数);

3° $w = f_3(z) = \dfrac{1}{z}$.

这里,$f_1(z)$ 对应于平移变换;$f_2(z)$ 是旋转与中心相似的复合;而 $f_3(z)$ 则是反演变换.

7.2.2 分式线性映射的特性

(1) 保形性　当 $z \neq -\dfrac{d}{c}, \infty$ 时,由于

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

的导数

$$w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

因此,分式线性映射具有保形性.

(2) 保圆性　扩充复平面上的圆在任一分式线性映射下的象仍为扩充复平面上的圆.这里直线看作是过 ∞ 点的圆.

(3) 保对称性　若 z_1, z_2 两点关于圆 L 对称,则经分式线性函数 $w = f(z)$ 映射后,z_1, z_2 的象点 $f(z_1), f(z_2)$ 关于 L 的象 $C = f(L)$ 对称.

(4) 保交比不变性　称下式

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

为 z, z_1, z_2, z_3 的交比,记作(z, z_1, z_2, z_3).

在扩充的 z 平面上相异4点 z_1, z_2, z_3, z_4 经任一分式线性函数 $w = f(z)$ 映射的象 $w_k = f(z_k)$ $(k = 1,2,3,4)$,则有

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

即交比不变.

7.2.3 确定分式线性映射的条件及方法

(1) 3对对应点唯一确定一个分式线性映射

交比定理　设平面任意给定3点 z_1, z_2, z_3,对应的象点是 w 平面任意给定3点 w_1, w_2, w_3,则满足这个条件的分式线性映射是唯一的.即有

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3).$$

例1　求将 $\infty, 1, 0$ 三点分别映射为 $2, 0, \infty$ 三点的分式线性函数.

解　由交比定理,可知所求映射为

$$(w, 2, 0, \infty) = (z, \infty, 1, 0),$$

即

$$(w - z) : (-2) = \frac{1}{z} : 1,$$

解得

$$w = \frac{2(z - 1)}{z}.$$

这个分式线性映射,将上半平面映射为上半平面,下半平面映射为下半平面.

(2) 上半平面到单位圆的映射　设 α 是 z 的上半平面内的一定点,它的象为圆心 $w = 0$.则这映射是

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}},$$

其中 θ 是任意实数.要确定 θ,还要给出其他条件.例如,实轴上一个定点在圆周上的象点的位置.

(3) 单位圆到单位圆的映射　设 α 是圆 $|z| < 1$ 内的一个定点,将它映射到

圆心 $w=0$ 的映射是

$$w = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z},$$

其中 θ 是实数，要确定它，还要给出其他条件，例如，与 z 平面圆周上一定点对应的象点.

(4) 上半平面到上半平面的映射　当 $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$，且 a,b,c,d 为实数时，分式线性映射

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

把上半平面映射为上半平面，同时也把下半平面映射为下半平面.

(5) 单位圆到上半平面的映射　设点 $z=1$ 映射到圆心 $w=0$，则分式线性映射

$$w = e^{i\theta}\frac{1-z}{1+\bar{z}},$$

其中 θ 可由与圆周上的一定点对应的象点来确定.

7.3　保形映射的基本问题与定理

7.3.1　保形映射的两个基本问题

(1) 已给保形映射，求某些集合(如点、曲线、区域)的象.

这个问题比较简单，可直接根据映射来求.

(2) 已知两个区域 D 和 G，求 D 上的保形映射，使 D 的象为 G. 这种保形映射是否存在，若存在是否唯一，又如何求出这种保形映射，是一个较为复杂的问题.

7.3.2　保形映射的两个基本定理

(1) **黎曼(存在及唯一性)定理**　若 D 与 G 都是扩充复平面上的连通域，则从 D 到 G 的保形映射存在.

若再添上条件：D 内的点 z_0 映射成 G 内的 w_0，且过 z_0 的某一方向映射成过 w_0 的另一方向，则此保形映射是唯一确定的.

若映射能直到边界上连续，则给定边界上的 3 对对应点之后，映射也是唯一确定的.

(2) **边界对应原理**　设有由光滑(或分段光滑)闭曲线 C 所围成的域 D 以及在 D 内及 C 上解析的函数 $w=f(z)$. 若函数 $w=f(z)$ 将 C 一一对应地映射成闭曲线 Γ，记 Γ 所围成的域为 G，并且当 z 沿 C 移动使得域 D 留在左边时，它的对应点 w 就沿 Γ 移动且使域 G 也留在左边，则 $w=f(z)$ 将 D 一一对应地，保形地映射成 G.

应用这个原理，可求出已给区域 D 被函数 $w=f(z)$ 映射成的区域 G. 只要沿 D 的边界绕行，并求出此边界被函数 $w=f(z)$ 所映射成的闭曲线，这个闭曲线所围成的区域就是 G.

7.3.3　保形映射的基本问题举例

例2　试确定圆周 $|z|=2$,在映射

$$w=\frac{z-1}{z+1}$$

下的象.

解　当 $|z|=2$ 时,

$$z=2e^{i\theta},\quad \theta\in[0,2\pi].$$

由

$$w=\frac{z-1}{z+1},$$

可得

$$w=\frac{2e^{i\theta}-1}{2e^{i\theta}+1},\quad \theta\in[0,2\pi].$$

象曲线的参数方程为

$$u=\frac{3}{5+4\cos\theta},\quad v=\frac{4\sin\theta}{5+4\cos\theta},\quad \theta\in[0,2\pi].$$

消去 θ,可得象曲线方程:

$$\left(u-\frac{5}{3}\right)^2+v^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

这是一个圆.

例3　求把二角形区域 $D:(|z|>1)\cap(|z-3i|<2)$ 保形映射为单位圆的函数 $w=f(z)$,且使 $f(\sqrt{3}\,i)=0,f'(\sqrt{3}\,i)>0$.

解　D 的边界为两弧 L_1、L_2,其交点为 ± 1.则函数 $w_1=f_1(z)=\frac{z-1}{z+1}$ 将二角形区域 D 映射成角域 G,即图 7-2(a) 映射成图 7-2(b).

函数 $w_2=f_2(w_1)=-iw_1^3$,将角域 G 映射成上半平面 G_2,即图 7-2(b) 映射成图 7-2(c).

函数 $w=f_3(w_2)=e^{i\theta}\frac{w_2-i}{w_2+i}$,将上半平面映射成单位圆,即图 7-2(c) 映射成图 7-2(d).

最后,将以上3个函数 $w=f_3(w_2),w_2=f_2(w_1),w_1=f_1(z)$ 复合起来,便有

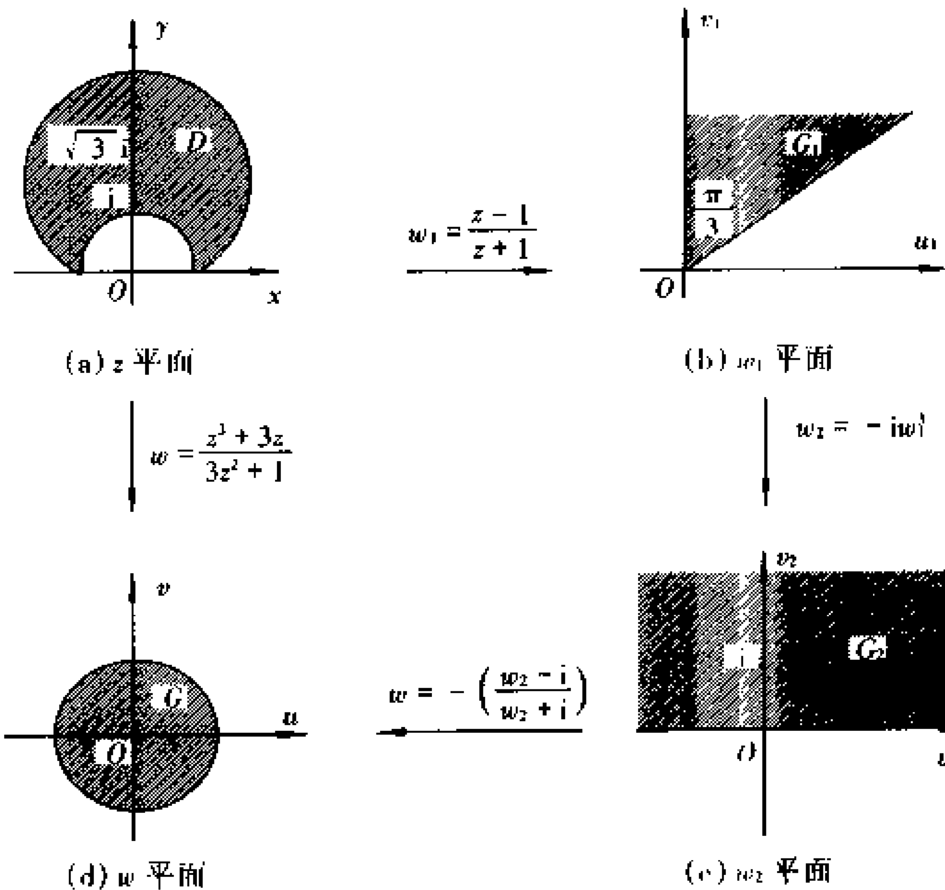
$$w=f(z)=-e^{i\theta}\frac{z^3+3z}{3z^2+1}.$$

此函数将区域 D 映射为 G,为使 $f'(\sqrt{3}\,i)=-\frac{3}{4}e^{i\theta}>0$,应取 $e^{i\theta}=-1$.故所求函数为

$$w=f(z)=\frac{z^3+3z}{3z^2+1}.$$

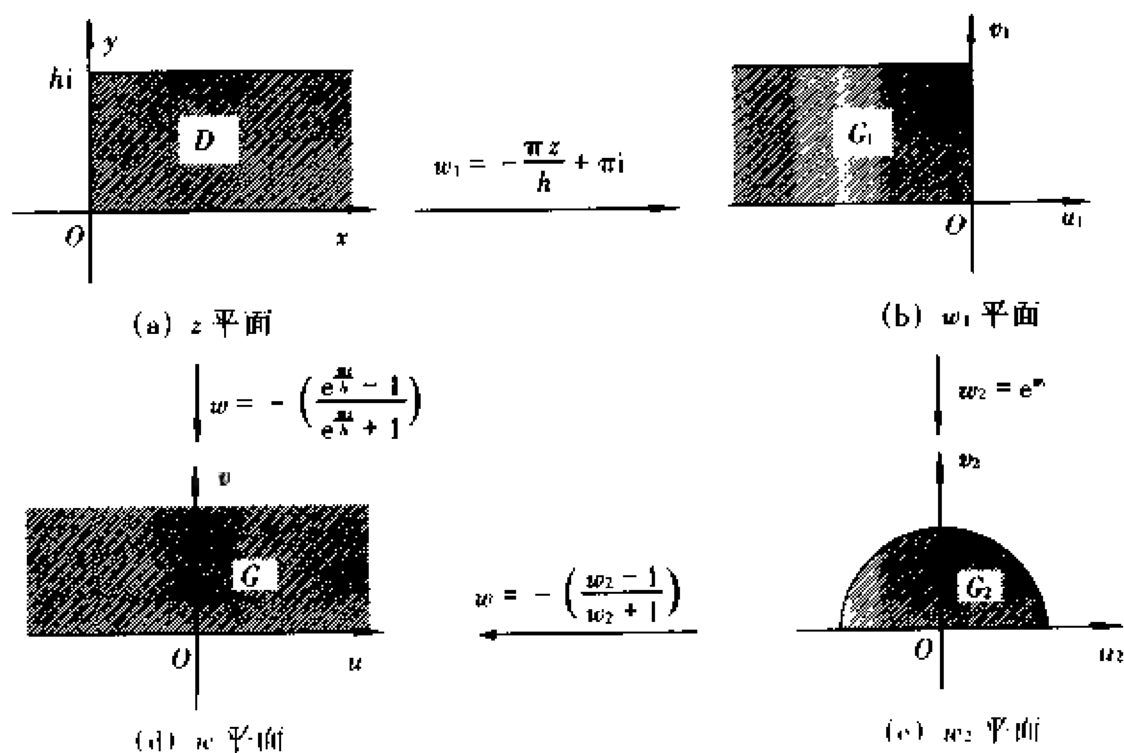
例4　试求右半条形区域 $D:0\leqslant \mathrm{Im}\,z\leqslant h,\mathrm{Re}\,z>0$(见图 7-3(a))映射成上半平面 $G:\mathrm{Im}\,w\geqslant 0$ 的保形映射.

解　1° 将 D 映射成 G_1 的保形映射.



y
D
$\sqrt{3}$i
i
O
x
$w_1=\frac{z-1}{z+1}$
v_1
G_1
$\frac{\pi}{3}$
u_1
O
(a) z 平面
(b) w_1 平面
$w=\frac{z^3+3z}{3z^2+1}$
$w_2=-\mathrm{i}w_1^3$
v
G
u
O
$w=-\left(\frac{w_2-\mathrm{i}}{w_2+\mathrm{i}}\right)$
v_2
G_2
i
O
u_2
(d) w 平面
(c) w_2 平面

图 7-2



y
hi
D
O
x
$w_1=-\frac{\pi z}{h}+\pi\mathrm{i}$
v_1
G_1
O
u_1
(a) z 平面
(b) w_1 平面
$w=-\left(\frac{e^{\frac{\pi z}{h}}-1}{e^{\frac{\pi z}{h}}+1}\right)$
$w_2=e^{w_1}$
v
G
O
u
$w=-\left(\frac{w_2-1}{w_2+1}\right)$
v_2
G_2
O
u_2
(d) w 平面
(c) w_2 平面

图 7-3

由以下的放大映射 $z_1=\frac{\pi}{h}z$;旋转映射 $z_2=-z_1$;平移映射 $w_1=z_2+\pi i$,即

$$w_1=-\frac{\pi}{h}z+\pi i$$

将 D 映成 G_1.见图 7-2(b).

2° $w_2=e^{w_1}$ 将 G_1 映射成上半单位圆内部 G_2.见图 7-2(c).

3° $w=-\left(\frac{w_2-1}{w_2+1}\right)$ 将 G_2 映射成上半平面 G.见图 7-2(d).

将以上这 3 个映射复合起来,即得所求的映射为

$$w=-\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{h}z+\pi i}-1}{e^{-\frac{\pi}{h}z+\pi i}+1}\right)=\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{h}z}+1}{e^{-\frac{\pi}{h}z}-1}\right).$$

例 5 求把具有割痕:$-\infty<\operatorname{Re}z\leqslant a$,$\operatorname{Im}z=h$ 的带形域(见图 7-4(a)):$0<\operatorname{Im}z<2h$ 映射成带形域:$0<\operatorname{Im}w<2h$.

解 函数 $w_1=e^{\frac{\pi z}{2h}}$ 将 z 平面内具有所设割痕的带形映射成去掉虚轴上一段线段 $0<\operatorname{Im}w_1<e^{\frac{a\pi}{2h}}$ 的上半平面 w_1 平面 G_1.见图 7-4(b).

函数 $w_2=\sqrt{w_1{}^2+e^{\frac{a\pi}{2h}}}$ 将去掉了虚轴上这一线段的上半 w_1 平面映射成上半 w_2 平面 G_2,见图 7-4(c).

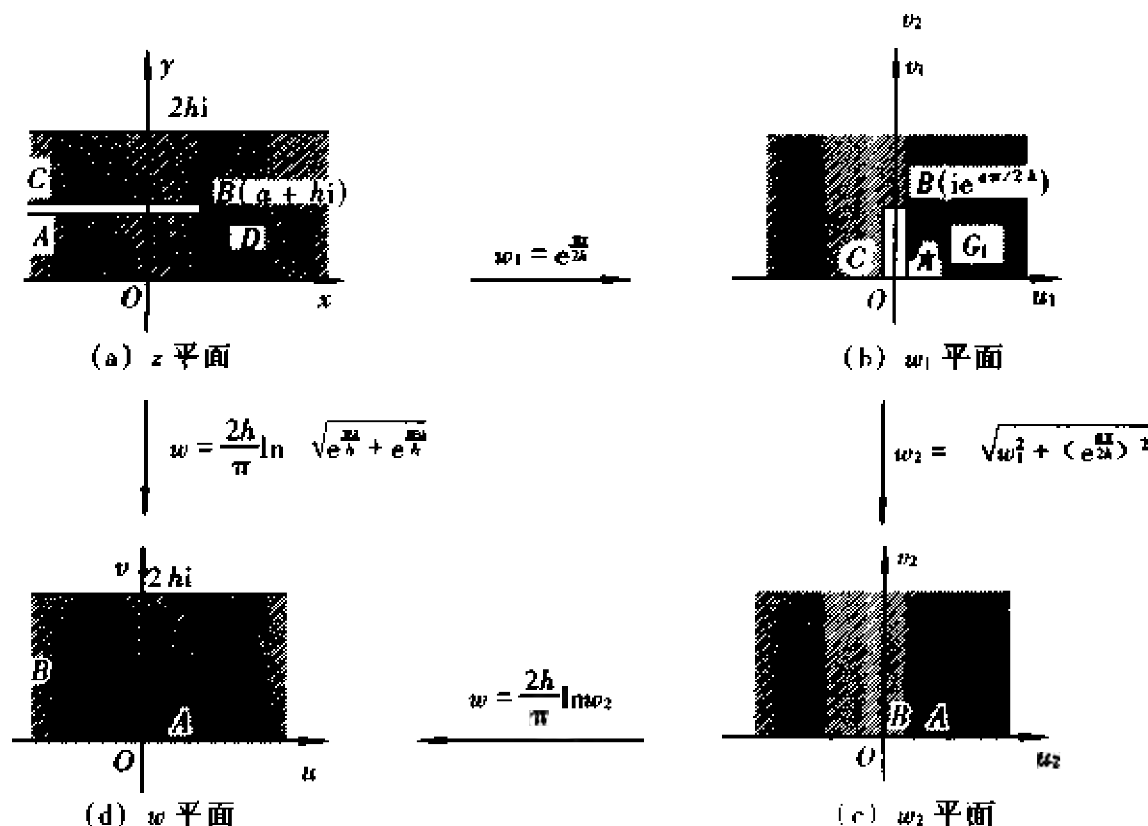


图 7-4

函数 $w = \frac{2h}{\pi}\ln w_2$ 将上半平面映射成所要求的带形域 G,见图 7-4(d).

将以上这 3 个函数复合起来,即得如下函数:

$$w = \frac{2h}{\pi}\ln\sqrt{e^{\frac{\pi z}{h}} + e^{\frac{\pi a}{h}}}.$$

例 6 求把区域 D:通过 $z = \pm a(a > 0)$ 的圆周 C 的外部(见图 7-5(a)),一一对应地、保形地映射成:除去连接点 $w = a$ 与 $w = -a$ 的圆弧 δ 的扩充平面 G(见图 7-5(d)).当 C 为圆 $|z| = a$ 时,弧 δ 将退化成线段 $-a \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant a, \operatorname{Im} w = 0$.

解 1° 函数 $w_1 = \frac{z-a}{z+a}$ 把点 $z = a$ 与 $z = -a$ 分别映射成 $w_1 = 0$ 与 $w_1 = \infty$,从而通过 $z = a, z = -a$ 的圆周 C 映射成过点 $z_1 = 0$ 的直线.把圆周 C 的外部映射成包含正实轴的 z 半平面 G_1;这个半平面的边界直线的倾角等于 C 在 $z = a$ 处切线的倾角 α.见图 7-5(b).

2° 函数 $w_2 = w_1^2$ 把这 w_1 半平面映射成沿射线 $\arg w_2 = 2\alpha$ 剪开的 w_2 平面 G_2.见图 7-5(c).

3° 函数 $w = a\frac{1+w_2}{1-w_2}$ 把 G_2 映射成沿连接点 $w = a$ 与 $w = -a$ 的圆弧割开的 w 平面 G.见图 7-5(d).

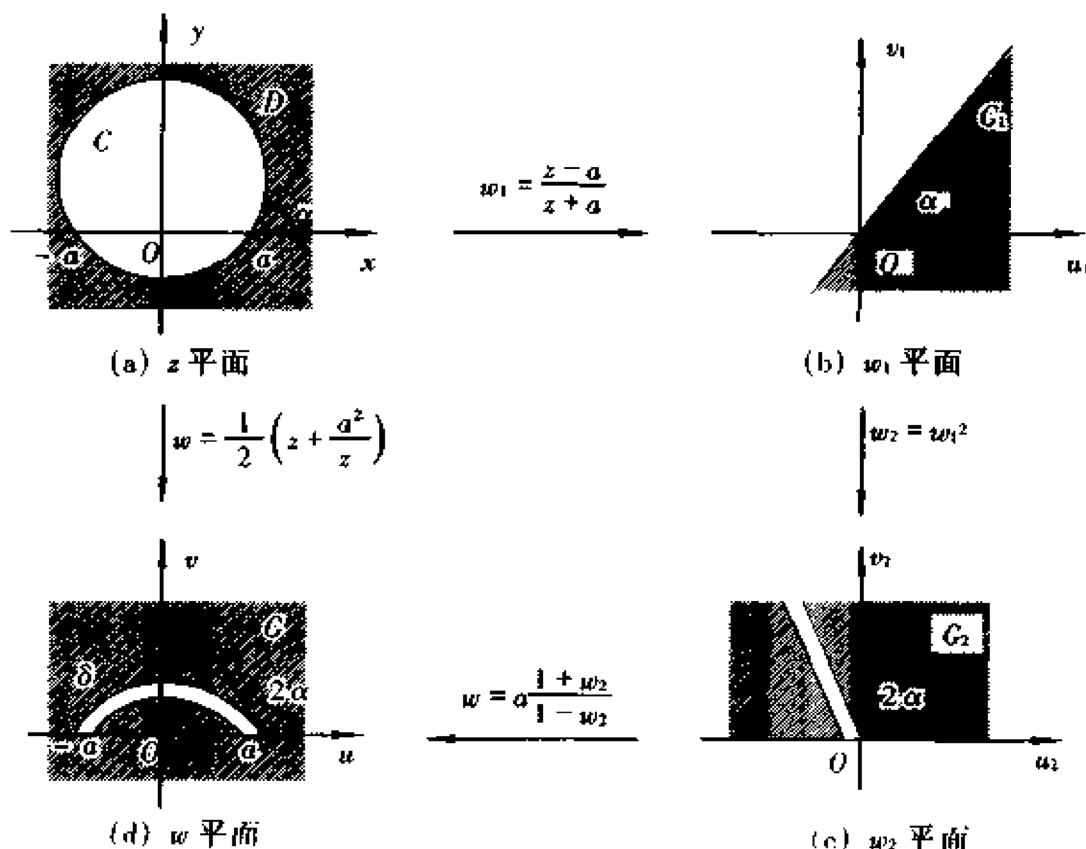


图 7-5

将这3个映射复合起来,即得

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{2}\right), a > 0.$$

这就是著名的**儒可夫斯基(Жуковский)映射**.

当 $a = 1$ 时,儒可夫斯基映射为

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

它把单位圆的外部: $|z| > 1$ ——对应地、保形地映射成具有割痕$[-1,1]$的扩充平面.

7.4 多角形映射

上述各节只是依靠初等函数来实现给定区域之间的保形映射,而施瓦兹-克里斯托费尔(Schwarz-Christoffel)映射实现了半平面与多角形区域之间的保形映射.因此,又称这个保形映射为多角形映射.

设 z 平面实轴上有 n 个点 $x_k(-\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \infty)$, w 平面上有一 n 角形,顶点为 $w_1, w_2, \cdots, w_n$,在顶点 w_k 处的顶角是 $\alpha_k\pi(0 < \alpha_k \leqslant 2, k = 1,2,\cdots, n)$.则**施瓦兹-克里斯托费尔积分**为

$$w = f(z) = c_1\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}(z - x_k)^{\alpha_k - 1}\mathrm{d}z + c_2, \tag{7-1}$$

其中 z_0, c_1, c_2 是3个常数.

公式(7-1)把 z 平面的上半平面映射到已给 n 角形内部, z 平面实轴上的 n 个点 $x_k(k = 1,2,\cdots,n)$ 分别映射到 w 平面的 n 角形的 n 个顶点 $w_k(k = 1,2,\cdots,n)$,见图7-6.

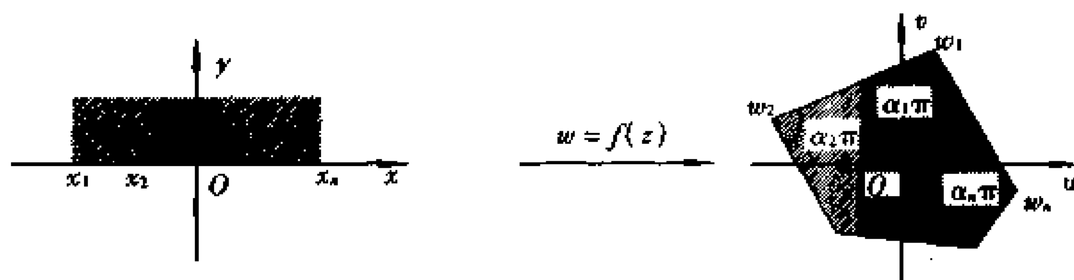


图7-6

若 z 平面的无穷远点(设 $x_n = \infty$)与 n 角形一个顶点(设 w_n)对应,则映射简化成

$$w = f(z) = c_1\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n-1}(z - x_k)^{\alpha_k - 1}\mathrm{d}z + c_2. \tag{7-2}$$

例7 求将 z 上半平面映射到 w 平面的正三角形的保形映射.

解 这时, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$.设正三角形的点为 w_1, w_2, w_3,并取 $w_2 = 0$(在

原点).

由于 w_1,w_2,w_3 在 x 轴上对应的点可任意指定3个.现指定 $x_1=-1,x_2=1$,$x_3=\infty$,再取 $z_0=1$,则 $c_2=0$.又因 c_1 只影响正三角形的大小和位置,不妨取 $c_1=1$.由公式(7-2),得到

$$w=\int_1^z(z+1)^{\frac{1}{3}-1}(z-1)^{\frac{1}{3}-1}\mathrm{d}z=\int_1^z\frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)^{3/2}}.$$

例8　求将 z 上半平面映射到 w 平面上的矩形的保形映射.

解　如图7-7所示,首先考虑 z 平面的第一象限到矩形内部的右半部分 Ow_1w_2B,同时选取 $z=0,1,\infty$ 分别与 $w=0,w_1=h_1,B=hi$ 对应,w_2 的原象记为 $\frac{1}{k}(0<k<1)$,把这个映射关于 y 轴的正半轴应用对称原理,就有 $z=x_3,x_4$ 分别与 $w=w_3,w_4$ 对应.同时根据施瓦兹-克里斯托费尔积分,所求映射就是

$$w=c_1\int_{z_0}^z\frac{\mathrm{d}z}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}+c_2.$$

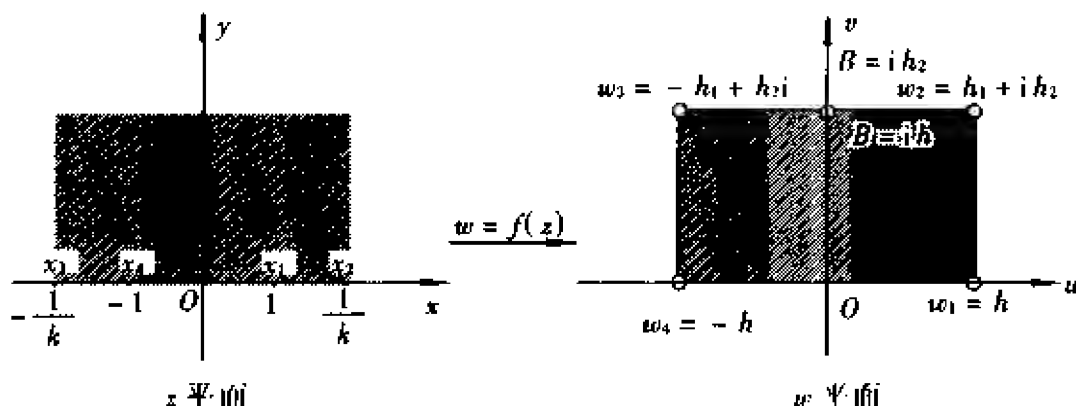


图7-7

由于 $z=0$ 与 $w=0$ 对应,因此 $c_2=0$.又由于 $x=x_1,x_2$ 分别与 $w=w_1,w_2$ 对应,所以

$$h=c_1\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$h_1+\mathrm{i}h_2=c_1\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$=h_1+\mathrm{i}c_1\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

设常数 $k(0<k<1)$ 已知,适当选取矩形的长和宽(即 h_1 和 h_2)使积分中的常数 $c_1=1$,则有

$$w=\int_0^z\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

这是**第一类椭圆积分**.

8　调和函数

所谓调和函数就是区域内拉普拉斯(Laplace)方程的连续可微解.调和函数与解析函数有某些类似的性质.对于解析函数,有柯西积分公式;而对于调和函数,有泊松(Poisson)积分公式;解析函数有平均值定理和极值原理;调和函数也有类似的结果.

8.1　平均值定理与极值原理

8.1.1　调和函数

对于区域 G 内的实值函数 $u(x,y)$,若它本身及一阶和二阶偏导数都连续且满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则称 $u(x,y)$ 在区域 G 内是**调和函数**,有时也简写为 $u(z)$.记

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

称算符"Δ"为**拉普拉斯算子**.

8.1.2　平均值定理与极值原理

(1) 平均值公式　若 $u(z)$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 内调和($0<\rho<\infty$),则有平均值公式:

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\varphi})d\varphi,$$

上式表示调和函数在圆盘中心值可用它的周界上值的积分的平均值表示.

均值性是调和函数的特征性质.

(2) 极值原理　域 D 中非常数的调和函数 $u(z)$ 在 D 内部不能达到最大(小)值.

8.2　泊松积分与狄利克雷问题

8.2.1　泊松公式

设 $u(z)$ 在 $|z|\leqslant\rho$ 上为调和函数($0<\rho<\infty$),记 $z=re^{i\theta},0\leqslant r\leqslant\rho,0\leqslant\theta<2\pi$,则有泊松(Poisson)公式

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\varphi})\frac{(\rho^2-r^2)d\varphi}{\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)+r^2}.$$

8.2.2 狄利克雷问题

(1) 狄利克雷(Dirichlet)问题的提法　求出一个在区域 D 内调和,在 $\overline{D}$ 上连续的函数 $u(z)$,使它在 D 的边界 Γ 上等于给定的连续函数 $f(\zeta)$. 或即求解定解问题:

$$\begin{cases}\Delta u = 0 & (z \in D), \\ u\mid_\Gamma = f(\zeta) & (\Gamma \text{ 是 } D \text{ 的边界}).\end{cases}$$

(2) 在圆上的狄利克雷问题及其解　设在圆 $|\zeta| = \rho(0 < \rho < \infty)$ 上给定函数 $f(\zeta)$,它除了在有限多个点: $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ 处有第一类间断外处处连续. 求在圆盘 $|z| < \rho$ 内调和的函数 $u(z)$,使它在圆周 $|\zeta| = \rho$ 上等于函数 $f(\zeta)$,在 $f(\zeta)$ 连续的点 ζ 处,有

$$\lim_{\substack{z\to\zeta_0 \\ |z|<\rho}} u(z) = f(\zeta_0),$$

这就是圆上的广义狄利克雷问题,其解为

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi}) \frac{(\rho^2 - r^2)\mathrm{d}\varphi}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\varphi - \theta) + r^2}.$$

(3) 上半平面的狄利克雷问题　设函数 $f(t)$ 在实轴上有定义,它除了有限个第一类间断点: $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 外处处连续,而且 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ 及 $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)$ 是有限数. 求出上半平面内有界调和的函数 $u(z)$,使得当实数 $t \neq t_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 时,都有

$$\lim_{\substack{z\to t \\ \operatorname{Im} z>0}} u(z) = f(t),$$

这就是上半平面的狄利克雷问题,其解为

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{y\mathrm{d}t}{(t - x)^2 + y^2}.$$

8.3 调和函数与解析函数的关系

8.3.1 共轭调和函数

定义　若 $u(x,y), v(x,y)$ 均在域 D 内调和且满足柯西-黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

则称 v 是 u 的**共轭调和函数**,但不能说 u 也是 v 的共轭调和函数. 即 u 与 v 不是互为共轭的调和函数.

定理　函数 $u + iv = f(z)$ 在域 D 内解析的充要条件为: v 是 u 的共轭调和函数.

8.3.2 由调和函数求解析函数

已知调和函数 $u(x,y)$(或 $v(x,y)$),求共轭调和函数 $v(x,y)$(或 $u(x,y)$)的

公式为

$$1° \quad v(x,y) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}dy + c. \tag{8-1}$$

$$2° \quad u(x,y) = -\int_{x_0}^{x} -\frac{\partial v}{\partial y}dx + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}dy + c. \tag{8-2}$$

例1　已知 $u(x,y)=x^2-y^2$,求 $v(x,y)$,使函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

在复平面上解析.

解　因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2.$

所以

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

从而 $u(x,y)$ 是全平面上的调和函数,由公式(8-2)并取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}dy + c \\ &= \int_0^x 2y dx + \int_0^y 2x\bigg|_{x=0}dy + c = 2xy + c. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f(z) &= u+iv=(x^2-y^2)+i(2xy+c) \\ &= (x+iy)^2+ic=z^2+ic. \end{aligned}$$

8.3.3　等值线

若 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析,则两族等值线:

$$u(x,y)=c_1 \quad 与 \quad v(x,y)=c_2$$

正交,其中 c_1 与 c_2 均为常数.

例如,由解析函数 $w=z^2$ 的实部 $u(x,y)=x^2-y^2$ 和虚部 $v(x,y)=2xy$,得到的两族等值线:$x^2-y^2=c_1$ 和 $2xy=c_2$ 是相互正交的两族双曲线.

参 考 文 献

1　余家荣编.复变函数.第2版.北京:高等教育出版社,1992.
2　路见可,钟寿国,刘士强编.复变函数.武汉:武汉大学出版社,1993.
3　陈方权,蒋绍惠编.解析函数论基础.北京:北京师范大学出版社,1987.
4　西安交通大学高等数学教研室编.复变函数.第4版.北京:高等教育出版社,1996.
5　范莉莉,何成奇编.复变函数论.上海:上海科学技术出版社,1987.
6　林化夷编.工程数学概要.武汉:华中工学院出版社,1986.

·经典数学卷·

第7篇

实变函数

编　者　胡适耕
审校者　刘培德

目　录

引　言

由牛顿(Newton)、莱布尼兹(Leibniz)等人开创,后经柯西(Cauchy)、黎曼(Riemann)等人改进的经典微积分,在19世纪后期已经成熟定形,且成为普遍应用的数学工具.然而,就在人们欢庆之际,天边已出现乌云:经典微积分的一些重大缺陷逐渐为人们所注意.为革除这些缺陷所作的最初尝试,为创立新的微积分理论揭开了序幕.

人们注意的重点是积分学.由黎曼等人奠定理论基础的经典积分学在许多方面不能令人满意.

首先,黎曼积分基本上只适用于连续函数(严格地说,是"几乎处处连续"的函数),因而其应用大受局限.

其次,黎曼积分与极限互换及两次黎曼积分的互换均要求很强的条件,这使人们深感不便.

最后,经典积分学从常义定积分开始,然后到广义定积分,进而发展到二重积分、三重积分、曲线积分、曲面积分等,名目繁多,体系庞杂,这自然不能使追求简洁与统一的数学家们满意.人们希望有一种简便、统一且适用范围更广的积分理论取而代之.

新的积分理论也就应运而生,它就是出现于20世纪初的勒贝格(Lebesgue)积分.勒贝格首先开创了测度论,然后以测度论为基础建立了他所引入的积分理论.经过短暂的沉寂之后,数学家们很快接受了勒贝格积分,且最终确信它已消除黎曼积分的主要缺陷.新的积分在数学的多个应用领域很快显示出强大的威力,它的应用导致一系列深刻结果.而且,在以测度论为基础的新方法的推动下,经典微分学也取得了前所未有的进展.这样,以勒贝格积分为中心的新的微积分理论终于形成.由于历史的原因,这一理论被称作"实变函数论",也常被称为"实分析".实际上,在很多方面它并非仅限于考虑"实变量函数".

今天,实变函数论已成为近代分析的不可缺少的理论基础.泛函分析的诞生在很大程度上受到实变函数论的推动.实变函数论的概念、结论与方法,已广泛应用于需要分析工具的学科,如微分方程论、傅里叶(Fourier)分析、数值分析、函数逼近论等.现代概率论已经完全建立在测度论与勒贝格积分论的基础上,在这个意义上甚至可以说,概率论不过是得到扩展的实变函数论.实变函数论对于现代数学的重要性,在此可见一斑.

本篇主要介绍构成实变函数论核心的勒贝格积分论,同时也简要介绍作为积分理论基础的测度论及与积分论密切相关的微分论.

1 测度与可测函数

1.1 集 合

1.1.1 集合的概念

1. 集合

在研究具有某种性质的对象时，通常将具有该性质的对象的全体称为集或集合，称其中的对象为该集的元素．一个集合被认为是给定了，应该能够判定某个元素是否属于它．通常以字母 A,B,X,Y 等表示集合，以 a,b,x,y 等表示集的元素．若 x 是集 A 的元素，则说 x 属于 A，记作 $x\in A$；以 $x\notin A$（或 $x\bar{\in}A$）表示 x 不属于 A．称不含任何元素的集合为空集，记作 $\varnothing$．

2. 集合的表示

表示集的方式通常有两种：列举式，例如，自然数集 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$，整数集 $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\cdots\}$；命题式，即 $A=\{x\mid x$ 满足命题 $P\}$，例如 $\mathbf{R}_+=\{x\mid x$ 是实数且 $x\geqslant0\}$，也写作 $\mathbf{R}_+=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant0\}$，其中 $\mathbf{R}$ 记实数集．

3. 包含

若集 A 的元素皆属于集 B，则说 A 包含于 B 或 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，且称 A 为 B 的子集．若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则说集 A 与集 B 相等，记作 $A=B$．若 $A\subset B\neq A$，则说 B 真包含 A 或 A 是 B 的真子集．约定空集是任何集的子集．

4. 幂集

一集 A 的子集之全体称为 A 的幂集，记作 2^A．例如，若 $A=\{1,2,3\}$，则 $2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}$．

1.1.2 集的运算

给定集 $A,B,A_i(i\in I)$，假定它们皆含于某集 X．

1. 集运算之定义

并：$\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\{x\mid(\exists i\in I)x\in A_i\}$；

　$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$；

交：$\bigcap\limits_{i\in I}A_i=\{x\mid(\forall i\in I)x\in A_i\}$；

　$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$；

差：$A\setminus B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$；

对称差：$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$．

补：$A^c=X\setminus A$（此记号在 X 不说自明时使用）．

2. 集运算规则

$(\bigcup_{i\in I}A_i)^c = \bigcap_{i\in I}A_i^c$，$(\bigcap_{i\in I}A_i)^c = \bigcup_{i\in I}A_i^c$（对偶律）；

$A\cap(\bigcup_{i\in I}A_i) = \bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$，

$A\cup(\bigcap_{i\in I}A_i) = \bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$（分配律）；

$A\cup A = A = A\cap A$（幂等律）；

$A\setminus B = A\cap B^c$.

集运算有两种功能：将一给定集合分解为某些（通常较简单的）集合的并与交；由已知的某些集构造满足一定条件的新集.

例1 设$f, f_n(n = 1,2,\cdots)$是定义在某集X上的实值函数，$A = \{x\in X: f_n(x)\to f(x)\}$，$A_{mn} = \{x\in X: |f_m(x) - f(x)| < 1/n\}$.用集$A_{mn}$表示集$A$.

解 因$f_n(x)\to f(x)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists n\geq 1,\forall m\geq n: |f_m(x)-f(x)|<\varepsilon\Leftrightarrow\forall k\geq 1,\exists n\geq 1,\forall m\geq n: |f_m(x)-f(x)|<1/k$，故

$$x\in A\Leftrightarrow\forall k\geq 1,\exists n\geq 1,\forall m\geq n: x\in A_{mk}.$$

这表明$A = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_{mk}$.

1.1.3 映射

1. 映射概念

设X, Y是非空集.若每个$x\in X$，依某个确定的规则f对应唯一的$y\in Y$（记作$y = f(x)$），则称f为从X到Y的映射，或称f为定义于X上取值于Y中的函数，记作$f: X\to Y$.

2. 像与原像

设$f: X\to Y$是一映射，$A\subset X$，$B\subset Y$.令

$$f(A) = \{f(x): x\in A\},\ f^{-1}(B) = \{x: f(x)\in B\}.$$

称$f(A)$为A在f下的像；称$f^{-1}(B)$为B关于f的原像.分别称X与$f(X)$为f的定义域与值域.若$f(X) = Y$，则称f为满射.若$f(x) = f(y)\Rightarrow x = y$，则称$f$为单射.若$f$既是单射又是满射，则称$f$为双射，此时$f$有一逆映射$f^{-1}: Y\to X$（即反函数），使得$f^{-1}f(x) = x$，$ff^{-1}(y) = y\ (x\in X, y\in Y)$.

1.1.4 基数与可数集

1. 基数 若存在从集A到集B的双射，则说A与B对等，记作$A\sim B$.当$A\sim B$时说A与B有相同的基数.以$|A|$记A的基数.若$A\sim A'\subset B$，则约定$|A|\leq|B|$；当$|A|\leq|B|\leq|A|$时，必有$|A| = |B|$.若A为有限集，则$A\sim B\Leftrightarrow A$与B含同样多的元素，因此认定$|A|$就是A中所含元素之个数，而$|\varnothing| = 0$.

2. 可数集

设A是一集，$\mathbf{N}$记自然数集.若$|A|\leq|\mathbf{N}|$，则称A为**可数集**.A可数的充要条件是A的元素可排列为有限或无限序列：$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

3. 可数集的运算

可数个可数集之并是可数集;若 $A_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是可数集,则积集

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in A_i(1 \leqslant i \leqslant n)\}$$

亦是可数集.利用以上结论可推出:有理数集是可数集;$\mathbf{R}^n$ 中的有理点(即诸坐标为有理数的点)集是可数集.但任何实区间$(a,b)(a < b)$不是可数集.

任何无限集必含无限可数子集,因此可以说无限可数集是"最小"的无限集.若 $A \subset B$,A 可数而 B 不可数,则 $B \setminus A$ 必不可数.可以说"B 比 A 大得多",例如,"实数比有理数多得多".

例 2 平面上至少有一圆周不含有理点.

证 若结论不真,则对每个 $r \in (0, \infty)$,圆周 $x^2 + y^2 = r^2$ 上含一有理点 P_r.但$(0, \infty)$不可数,而$\{P_r\}$为可数集,得出矛盾.

1.1.5 特征函数

设 $A \subset X$.在 X 上定义一函数 χ_A 如下:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

称 χ_A 为集 A 的**特征函数**.关于集的许多事实可以用特征函数来刻画.例如:

1° $A = \varnothing \Leftrightarrow \chi_A(x) \equiv 0$;$A = X \Leftrightarrow \chi_A(x) \equiv 1$;

2° $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B$;$A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$;

3° $A = \bigcup_i A_i \Leftrightarrow \chi_A(x) = \max_i \chi_{A_i}(x)$;

$A = \bigcap_i A_i \Leftrightarrow \chi_A(x) = \min_i \chi_{A_i}(x)$;

4° $A = B^c \Leftrightarrow \chi_A = 1 - \chi_B$;

5° $C = A \Delta B \Leftrightarrow \chi_C = |\chi_A - \chi_B|$.

1.2 点 集

以 $\mathbf{R}^n$ 记 n 元有序实数组 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 之全体,称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点,称 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧几里德空间.$\mathbf{R}^n$ 依通常的向量运算是一个实向量空间.

1.2.1 欧几里德度量

1. 内积

任给 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$,称$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum x_i y_i$ 为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积.内积有以下性质:

1° $(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$;

2° $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;

3° $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$,$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$(以上 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^n$,$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$).

2. 欧几里德范数

称 $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n)$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的模或欧几里德范数,它有以下性质:

1° 齐次性：$|\alpha \boldsymbol{x}| = |\alpha||\boldsymbol{x}|$；

2° 三角不等式：$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$；

3° 正定性：$|\boldsymbol{x}| \geqslant 0$，$|\boldsymbol{x}| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$（以上 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$，$\alpha \in \mathbf{R}$）.

3. 距离

任给 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$，称 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 为点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的欧几里德距离. 任给 $A, B \subset \mathbf{R}^n$，称

$$d(A,B) = \inf_{\boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{b} \in B} |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$$

为集 A 与集 B 之间的距离；令 $d(\boldsymbol{x},B) = d(\{\boldsymbol{x}\},B)$.

4. 球

任给 $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，$r > 0$，称

$$B_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| < r\}$$

为以 $\boldsymbol{a}$ 为中心、以 r 为半径的球，或称为 $\boldsymbol{a}$ 的 r- 邻域.

5. 收敛性

设 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\} \subset \mathbf{R}^n$ 是一序列，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$. 若 $|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}| \to 0\ (k \to \infty)$，则说 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于 $\boldsymbol{x}$，记作 $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}$. $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x} \Leftrightarrow x_i^{(k)} \to x_i\ (k \to \infty, 1 \leqslant i \leqslant n)$；$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(l)}| \to 0\ (k, l \to \infty)$.

1.2.2 内部与闭包

给定 $A \subset \mathbf{R}^n$.

1. 内部

若 $\exists r > 0 : B_r(\boldsymbol{x}) \subset A$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为 A 的内点，而称 A 为 $\boldsymbol{x}$ 的邻域. 以 A° 记 A 的内点之全体（可能 $A^\circ = \varnothing$！）称 A° 为 A 的内部.

2. 闭包

令 $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$，则 $A^\circ = (\overline{A^c})^c$；$\boldsymbol{x} \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0 : A \cap B_r(\boldsymbol{x}) \neq \varnothing \Leftrightarrow d(\boldsymbol{x}, A) = 0 \Leftrightarrow$ 存在序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\} \subset A : \boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}$. 称 $\overline{A}$ 为 A 的闭包.

3. 边界

令 $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$，则 $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A^c$，$\overline{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup \partial A$，称 ∂A 为 A 的边界.

4. 聚点

若 $\boldsymbol{x} \in \overline{A \setminus \{\boldsymbol{x}\}}$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为 A 的聚点或极限点. 以 A' 记 A 的聚点之全体，称 A' 为 A 的导集. $\boldsymbol{x} \in A' \Leftrightarrow \boldsymbol{x}$ 的每个邻域含 A 中无限个点 $\Leftrightarrow$ 存在序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\} \subset A \setminus \{\boldsymbol{x}\}$：$\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}$；$\overline{A} = A \cup A'$. 若 $\boldsymbol{x} \in A \setminus A'$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为 A 的孤立点.

1.2.3 开集与闭集

1. 开集

若 $A = A^\circ$，则称 A 为**开集**. 任意个开集之并与有限个开集之交是开集；$\mathbf{R}^n$ 与 $\varnothing$ 是开集.

2. 闭集

若 $A = \overline{A}$，则称 A 为**闭集**. A 是闭集 $\Leftrightarrow \partial A \subset A \Leftrightarrow A' \subset A \Leftrightarrow A^c$ 是开集. 任意个闭

集之交与有限个闭集之并是闭集；$\mathbf{R}^n$ 与 $\varnothing$ 是闭集.

3. 完备集

若 $A = A'$，则称 A 为完备集. 完备集就是无孤立点的闭集.

4. 紧集

若 A 含于某个球，则称 A 为有界集. 称有界闭集为紧集.

5. 博雷尔集

由开集(或闭集)经可数次集合的并、交与差运算而得之集称为博雷尔(Borel)集. 可数个开集之交称为 G_δ 集；可数个闭集之并称为 F_σ 集，G_δ 集与 F_σ 集都是博雷尔集.

1.2.4　稠集与疏集

1. 稠集

若 $\overline{A} = \mathbf{R}^n$，则称 A 为稠集或说 A 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密. A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的稠集 $\Leftrightarrow \mathbf{R}^n$ 中每点可用 A 中的点任意逼近. 例如，$\mathbf{R}^n$ 中的有理点集是稠集.

2. 疏集

若 $(\overline{A})^\circ = \varnothing$，则称 A 为疏集. A 是疏集 $\Leftrightarrow (A^c)^\circ$ 是稠集；闭集 A 是疏集 $\Leftrightarrow A$ 不含内点.

1.2.5　开集的构造

1. 一维开集的构造

若 $G \subset \mathbf{R}$ 是非空开集，则 G 是可数个互不相交的开区间 δ_i 之并，每个 δ_i 称为 G 的构成区间，亦称 δ_i 为闭集 G^c 的余区间.

2. n 维开集的构造

若 $G \subset \mathbf{R}^n$ 是非空开集，则 G 是可数个互不相交的 n 维半开方体之并，半开方体是形如 $[a_1,b_1) \times [a_2,b_2) \times \cdots \times [a_n,b_n)$ 的集.

例3　从区间 $[0,1]$ 中挖去开区间 $(1/3,2/3)$；继而挖去开区间 $(1/9,2/9)$，$(7/9,8/9)$；一般地，挖去开区间

$$\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\cdots,\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right),\quad n = 1,2,\cdots.$$

余下的集记为 P，它就是著名的康托尔(Cantor)集. P 是一完备集且无内点，因此是疏集. 补集 P^c 是 $\mathbf{R}$ 中的稠开集，它是可数个互不相交的开区间之并.

1.2.6　关于点集的基本定理

1. 有限覆盖定理

若一族开集 $\{G_\alpha\}$ 覆盖紧集 A，则可选出有限个 G_α 覆盖 A.

2. 聚点原理

$\mathbf{R}^n$ 中的有界无限集必有聚点.

3. 紧性定理

$\mathbf{R}^n$ 中任何有界序列必含收敛子列.

4. 闭集套定理

若 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空有界闭集，$A_1\supset A_2\supset\cdots$，则 $\bigcap A_k\neq\varnothing$.

实际上，以上四定理在逻辑上互相等价.

1.2.7 相对开集与相对闭集

设 $A\subset X\subset\mathbf{R}^n$.

1. 相对开集

若存在开集 $G\subset\mathbf{R}^n$，使得 $A=X\cap G$，则称 A 为 X 中的相对开集.

例如，区间 $[0,1)$ 是 $[0,\infty)$ 中的相对开集，尽管它在 $\mathbf{R}$ 中并非开集. 若 A 是开集，则它必为 X 中的相对开集.

2. 相对闭集

若存在闭集 $F\subset\mathbf{R}^n$，使得 $A=X\cap F$，则称 A 为 X 中的相对闭集.

例如，区间 $[0,1)$ 是 $(-\infty,1)$ 中的相对闭集，尽管它在 $\mathbf{R}$ 中并非闭集. 若 A 是闭集，则它必为 X 中的相对闭集.

3. 局部紧集

若对每点 $x\in X$，存在 X 中的相对开集 V 与紧集 B，使得 $x\in V\subset B\subset X$，则称 X 为局部紧集.

例如，$\mathbf{R}^3$ 中的光滑曲面是局部紧集；有理点集不是局部紧集.

1.2.8 连续映射

设 $X\subset\mathbf{R}^n$，$f:X\to\mathbf{R}^m$，$x\in X$. 若对任何序列 $\{x^{(k)}\}\subset X$，当 $x^{(k)}\to x$ 时 $f(x^{(k)})\to f(x)$，则说 f 在 x 连续. 若 f 在每点 $x\in X$ 连续，则说 f 在 X 上连续. 以 $C(X,\mathbf{R}^m)$ 记从 X 到 $\mathbf{R}^m$ 的连续映射之全体，约定 $C(X)=C(X,\mathbf{R})$. 关于连续映射的以下结论成立.

1. 连续性条件

$f:X\to\mathbf{R}^m$ 连续 $\Leftrightarrow$ 任给开(闭)集 $B\subset\mathbf{R}^m$，$f^{-1}(B)$ 是 X 中的相对开(闭)集；$f:X\to\mathbf{R}$ 连续 $\Leftrightarrow\forall\alpha\in\mathbf{R}$：$X(f<\alpha)$ 与 $X(f>\alpha)$ 是 X 中的相对开集 $\Leftrightarrow\forall\alpha\in\mathbf{R}$：$X(f\leqslant\alpha)$ 与 $X(f\geqslant\alpha)$ 是 X 中的相对闭集，其中 $X(f<\alpha)=\{x\in X:f(x)<\alpha\}$，$X(f>\alpha)$ 等仿此.

2. 有界性定理

若 X 是紧集，$f\in C(X,\mathbf{R}^m)$，则 $f(X)$ 有界.

3. 最值定理

若 X 是紧集，$f\in C(X)$，则 $f(x)$ 在 X 上取得最大值与最小值.

4. 一致连续性定理

若 X 是紧集，$f\in C(X,\mathbf{R}^m)$，则 f 在 X 上一致连续，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x,y\in X$，$|x-y|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

1.3 测　　度

1.3.1 测度概念

1. 可测空间

设 X 是一非空集. 若 $\mathscr{A} \subset 2^X$ 满足条件: 1° $\varnothing \in \mathscr{A}$; 2° 当 $A_n \in \mathscr{A}(n = 1,2,\cdots)$ 时 $\bigcup A_n \in \mathscr{A}$; 3° 当 $A \in \mathscr{A}$ 时 $A^c \in \mathscr{A}$, 则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的**σ-代数**, 称$(X,\mathscr{A})$为一个**可测空间**, 称每个 $A \in \mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}$-可测集或简称可测集. 由定义直接推出: 任意可数个可测集的并与交是可测集; 可测集之差是可测集; X 本身是可测集.

2. 测度空间

设$(X,\mathscr{A})$是一可测空间, $[0,\infty] = [0,\infty) \cup \{\infty\}$. 若函数 $\mu: \mathscr{A} \to [0,\infty]$ 满足条件: 1° $\mu\varnothing = 0$; 2° 当 $A_n \in \mathscr{A}(n = 1,2,\cdots)$ 互不相交时 $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu A_n$, 则称 μ 为 X 上的一个**测度**, 称$(X,\mathscr{A},\mu)$为**测度空间**, 也简写作(X,μ). 若 μ 还满足: 3° 存在分解 $X = \bigcup X_n$, 使 $\mu X_n < \infty(n = 1,2,\cdots)$, 则称 μ 为**σ-有限测度**; 当 $\mu X < \infty$ 时称 μ 为有限测度; 当 $\mu X = 1$ 时称 μ 为概率测度.

3. 零测集

设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一测度空间. 若 $A \in \mathscr{A}, \mu A = 0$, 则称 A 为**零测集**. 任意可数个零测集之并是零测集. 若 P 是与 X 中的点 x 有关的命题, 集 $\{x \in X \mid P$ 在 x 不成立$\}$ 含于某零测集, 则说 P 在 X 上几乎处处(或 μ-几乎处处)成立, 写作 P, a.e. (或 P, μ-a.e). 例如, 若 $f: X \to \mathbf{R}$ 满足: $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$ 含于某零测集, 则说 f 几乎处处为零, 写作 $f = 0$, a.e.

4. 完备测度

设$(X,\mathscr{A},\mu)$是测度空间. 若零测集之子集恒为可测集, 则称 μ 为**完备测度**. μ 总可以扩张为某个 σ-代数 $\overline{\mathscr{A}}$ 上的完备测度 $\overline{\mu}$ 使得每个 $A \in \overline{\mathscr{A}}$ 可表为 $A = B \cup C$, 其中 $B \in \mathscr{A}$, C 含于某个零测集. 称 $\overline{\mu}$ 为 μ 的完备化. 因此, 可以仅考虑完备测度而并不失一般性.

1.3.2 测度的简单例子

设 X 是任一非空集.

1. 平凡测度

令 $\mathscr{A} = \{\varnothing, X\}$, $\mu\varnothing = 0$, $\mu X = 1$, 则 μ 是一完备测度且是概率测度.

2. 计数测度

取 $\mathscr{A} = 2^X$. 当 $A \subset X$ 是有限集时令 μA 为 A 中元之个数; 当 A 为无限集时令 $\mu A = \infty$. 则 μ 是一完备测度, 称它为 X 上的**计数测度**. 当且仅当 X 为可数集时 μ 是 σ-有限测度.

3. 狄拉克测度

设 $\mathscr{A} \subset 2^X$ 是一 σ-代数, $x_0 \in X$. 任给 $A \in \mathscr{A}$, 当 $x_0 \in A$ 时令 $\mu A = 1$, 当 $x_0 \overline{\in} A$

时令 $\mu A = 0$,则 μ 是一概率测度,称为 x_0 处的狄拉克(Dirac)测度,通常记作 δ_{x_0}.

1.3.3 测度的性质

给定测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$, μ 有如下性质.

1. 单调性

若 $A, B \in \mathscr{A}, A \subset B$,则 $\mu A \leqslant \mu B$.

2. 可减性

若 $A, B \in \mathscr{A}, A \subset B, \mu A < \infty$,则 $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

3. 次可加性

若 $A_n \in \mathscr{A}(n = 1,2,\cdots)$,则 $\mu(\bigcup A_n) \leqslant \sum \mu A_n$;当 A_n 互不相交时等号成立.

4. 下连续性

若 $A_n \in \mathscr{A}, A_n \subset A_{n+1}(n = 1,2,\cdots)$,则 $\mu A_n \to \mu(\bigcup A_n)$.

5. 上连续性

若 $A_n \in \mathscr{A}, A_n \supset A_{n+1}(n = 1,2,\cdots), \mu A_1 < \infty$,则 $\mu A_n \to \mu(\bigcap A_n)$.

以上性质有助于测度的计算与估计.

例 4 设 $A_n(n = 1,2,\cdots)$ 为可测集, $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, $\sum \mu A_n < \infty$. 证明 $\mu A = 0$.

证 由测度的单调性及次可加性推出

$$\mu A \leqslant \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k \to 0 (n \to \infty),$$

因此 $\mu A = 0$.

1.3.4 正则测度概念

设 $X \subset \mathbf{R}^n$ 是局部紧的.

1. 正则测度

设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一测度空间. 若 $\mathscr{A}$ 包含 X 中所有相对开集,且对任何紧集 $A \subset X$ 有 $\mu A < \infty$,则称 μ 为 X 上的**正则测度**. 正则测度 μ 有以下性质:1° μ 是 σ- 有限的;2° $\forall \varepsilon > 0, A \in \mathscr{A}$,存在 X 中的相对开集 G 与相对闭集 F,使得 $F \subset A \subset G$, $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

2. 外测度

设 μ 是 X 上的正则测度. 任给 $A \subset X$,令

$$\mu^* A = \inf\{\mu G \mid A \subset G \subset X, G \text{ 是 } X \text{ 中的相对开集}\},$$

则得到函数 $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$. μ^* 有性质:1° $\mu^* \varnothing = 0$;2° $\mu^*(\bigcup A_n) \leqslant \sum \mu^* A_n$, $A_n \subset X(n = 1,2,\cdots)$,称 μ^* 为 μ 导出的外测度. 若 $A \subset X$ 可测,则必定 $\mu A = \mu^* A$.

1.3.5 勒贝格测度

任给 $n \geqslant 1$,在 $\mathbf{R}^n$ 上存在唯一具有以下性质的测度 μ.

1° μ 定义在某个 σ-代数 $\mathscr{S}$ 上，$\mathscr{S}$ 包含所有开集；$A \in \mathscr{S} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，存在开集 G 与闭集 F，使得 $F \subset A \subset G$ 且 $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

2° 平移不变性 任给 $A \in \mathscr{S}, a \in \mathbf{R}^n$，有 $\mu(a + A) = \mu A$.

3° 设 C 是 n 维单位方体：

$$C = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 (1 \leqslant i \leqslant n)\},$$

则 $\mu C = 1$.

称如上的 μ 为 n 维勒贝格测度，通常记作 m 或 m_n；称每个 $A \in \mathscr{S}$ 为 n 维勒贝格可测集. m 的进一步的性质如下：

4° m 是完备正则测度，因而是 σ-有限的.

5° 任给 n 维方体

$$C = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i (1 \leqslant i \leqslant n)\},$$

有 $mC = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$. 一般地，若 $A \subset \mathbf{R}^n$ 具有 n 维体积 v，则 $A \in \mathscr{S}$ 且 $mA = v$.

6° 若 $P \subset \mathbf{R}^n$ 为超平面(即 $n-1$ 维子空间的平移像)，$A \subset P$，则 $mA = 0$. 例如，$\mathbf{R}^2$ 中任何线段的 2 维勒贝格测度为零.

7° 任给可数集 $A \subset \mathbf{R}^n$，有 $mA = 0$.

1.3.6 1 维勒贝格测度的构成

归纳地定义 m 如下.

1° 若 $-\infty < a < b < \infty$，则定义 $m(a,b) = b - a$.

2° 若 $G = \bigcup \delta_k$ 是有界开集，δ_k 是 G 的构成区间，则定义 $mG = \sum m\delta_k$.

3° 若 $F \subset \mathbf{R}^n$ 是紧集，$[a,b]$ 是包含 F 的最小闭区间，则 $G = [a,b] \setminus F$ 是有界开集，定义 $mF = b - a - mG$.

4° 若 $A \subset \mathbf{R}$ 是有界集，则令

$$m^* A = \inf mG, \quad m_* A = \sup mF, \tag{1-1}$$

其中 G 遍取包含 A 的有界开集，F 遍取 A 的闭子集. 分别称 $m^* A$ 与 $m_* A$ 为 A 的外测度与内测度. 若 $m^* A = m_* A$，则称 A 为可测集，且令 $mA = m^* A$.

5° 任给 $A \subset \mathbf{R}$，若 $\forall x > 0, A_x = A \cap (-x, x)$ 可测，则称 A 为可测集，且称 $mA = \lim\limits_{x \to \infty} mA_x$ 为 A 的测度.

如上定义的 m 与 1.3.5 中所描述的勒贝格测度(取 $n = 1$)一致. 这就得到 1 维勒贝格测度的一种具体构成. 类似地，可给出 n 维勒贝格测度的构成.

例 5 求康托尔集 P 的测度(参考例 3).

解 令 $G = [0,1] \setminus P$，则

$$G = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \cdots;$$

$$mG = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} + \cdots = 1.$$

于是 $mP = m[0,1] - mG = 1 - 1 = 0$.

例 6 设 $a < b$,证明 $A = (a,b)$ 是不可数集.

证 若 A 是可数集,则必 $mA = 0$,这与 $mA = b - a > 0$ 矛盾.

例 7 设某台打字机已缺损"5"的字模,这对它打出数字的功能影响如何?

解 只需考虑区间[0,1]中的数.令

$$G = \{x \in [0,1]: x \text{ 的十进位小数必用到 } 5\},$$

则

$$G = (0.5,0.6) \cup (0.05,0.06) \cup \cdots \cup (0.95,0.96) \cup (0.005,0.006) \cup \cdots$$

故
$$mG = 0.1 + 9 \times 0.01 + 9^2 \times 0.001 + \cdots = 1,$$

从而 $m([0,1] \setminus G) = 0$.如用十进位小数,G 中的数不能打出.在这个意义上,该打字机几乎完全丧失打出数字的功能!

1.3.7 外测度与内测度

由式(1-1)定义的 m^*A 与 m_*A 除了构成 1 维勒贝格测度时用到外,还有其独立应用价值.其性质可概述如下.

1° $0 \leqslant m_*A \leqslant m^*A < \infty$.

2° 单调性 $A \subset B \Rightarrow m_*A \leqslant m_*B, m^*A \leqslant m^*B$.

3° 次可加性 $m^*(\bigcup A_n) \leqslant \sum m^*A_n$;当 A_n 互不相交时 $m_*(\bigcup A_n) \geqslant \sum m_*A_n$.

4° Caratheodory 条件 $A \subset \mathbf{R}$ 为勒贝格可测的充要条件是,对任何有界集 $E \subset \mathbf{R}$ 有 $m^*E = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$.

1.4 可测函数

设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是给定的测度空间,以 m 记 n 维勒贝格测度.任给 $E \subset X$,当说到 f 是 E 上的实函数时,意指对每个 $x \in E$,$f(x)$ 是实数或 $\pm\infty$.任给 $c \in \mathbf{R}$,约定

$$E(f > c) = \{x \in E \mid f(x) > c\}.$$

$E(f \geqslant c)$,$E(a < f < b)$ 等记号的意义仿此.

1.4.1 可测函数概念

1. 实可测函数

设 f 是可测集 $E \subset X$ 上的实函数.若 $\forall c \in \mathbf{R}$,$E(f > c)$ 可测,则称 f 为 E 上的可测(或 μ-可测)函数.以下任何一个条件对于 f 可测是充分必要的:

1° $\forall c \in \mathbf{R}: E(f \leqslant c)$ 可测;

2° $\forall c \in \mathbf{R}: E(f < c)$ 可测;

3° $\forall c \in \mathbf{R}: E(f \geqslant c)$ 可测;

4° $\forall a,b \in \mathbf{R}: E(a < f < b)$ 与 $E(f = \infty)$ 可测;

5° 任给开集 $G \subset \mathbf{R}: f^{-1}(G)$ 与 $E(f = \infty)$ 可测.

2. 复可测函数

若 $f = u + iv$, u 与 v 是 E 上的实可测函数,则称 f 为 E 上的复可测函数.

3. 勒贝格可测函数

设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为勒贝格可测集, E 上的实(或复)函数 f 可测,则称 f 为 E 上的勒贝格可测函数. 说到 $\mathbf{R}^n$ 中的可测函数而未加说明时,总是指勒贝格可测函数,且通常简称为可测函数.

例 8 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为勒贝格可测集, f 是 E 上的连续实(或复)函数,则 f 是可测函数.

证 只需考虑实函数. 任给开集 $G \subset \mathbf{R}$, 由 1.2.6, $A = f^{-1}(G)$ 是 E 中的相对开集. 取开集 $V \subset \mathbf{R}^n$, 使 $A = E \cap V$. 因 E 与 V 皆可测,故 A 亦可测. 因此 f 是可测函数.

例 9 任给 $A \subset X$, A 是可测集 $\Leftrightarrow A$ 的特征函数 χ_A 是可测函数.

证 这由以下等式看出:

$$X(\chi_A > c) = \begin{cases} X, & c < 0; \\ A, & 0 \leqslant c < 1; \\ \varnothing, & c \geqslant 1. \end{cases}$$

若以 Q 记 $\mathbf{R}$ 上的有理点之全体,则例 9 表明 χ_Q(它就是狄里克莱函数)是可测函数. 但 χ_Q 处处不连续. 可见,可测函数较连续函数为广.

1.4.2 可测函数的运算

1. 代数运算

若 f, g 是可测集 $E(\subset X)$ 上的实(或复)可测函数,则 $f \pm g$, fg 与 f/g 亦是 E 上的可测函数,只要这些函数在 E 上处处有定义.

2. 格运算

若 f, g 是 E 上的实可测函数,则

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

与

$$f \wedge g = -[(-f) \vee (-g)]$$

皆是 E 上的可测函数. 特别,

$$f^+ = f \vee 0, \quad f^- = (-f)^+, \quad |f| = f^+ + f^-$$

是可测函数,其中 f^+ 与 f^- 分别称为 f 的正部与负部. 一般地,若 $f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是 E 上的可测函数,则

$$\sup_n f_n(x) \quad 与 \quad \inf_n f_n(x)$$

皆为 E 上的可测函数.

3. 极限运算

设 $f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是 E 上的实可测函数,则上、下极限函数

$$\overline{\lim_n} f_n(x) = \inf_{n \geqslant 1} \sup_{k \geqslant n} f_k(x)$$

与

$$\underline{\lim_n} f_n(x) = \sup_{n \geqslant 1} \inf_{k \geqslant n} f_k(x)$$

都是 E 上的可测函数. 特别,若 $f_n(x) \to f(x) (x \in E, n \to \infty)$, 则 f 是 E 上的可测

函数.最后一个结论亦适用于复可测函数.

1.4.3 简单函数

1. 定义

若 f 是 X 上的可测函数,且它仅取有限个实(或复)数值,则称 f 为**简单函数**.

显然,X 上的实(或复)值函数 f 是简单函数的充要条件是,f 可表成 $\sum c_k\chi_{e_k}$,其中 c_k 是实(或复)常数,$e_k \subset X$ 是可测集,$k = 1,2,\cdots,n$.不失一般性,可以要求 e_k 互不相交.

2. 用简单函数逼近可测函数

若 f 是 X 上的实(或复)可测函数,则存在 X 上的一列实(或复)简单函数 $\{\varphi_n\}$,使得 $\varphi_n(x) \to f(x)(\forall x \in X)$;且当 $f \geqslant 0$ 时可要求 $0 \leqslant \varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}(n = 1,2,\cdots)$.在后一种情形下,通常采用记号 $0 \leqslant \varphi_n \uparrow f$;在一般情况下可要求 $|\varphi_n| \leqslant |f|$.

以上结论表明,可测函数类是包含简单函数类且使极限运算封闭的最小函数类.

3. 阶梯函数

将区间 $[a,b]$ 分划成有限个子区间 δ_k 的不交并,任取常数 c_k,则 $f = \sum c_k\chi_{\delta_k}$ 是 $[a,b]$ 上的简单函数,称为阶梯函数.若 $f \in C[a,b]$,则可取一列阶梯函数一致收敛于 f.

以下设 $f,f_n(n = 1,2,\cdots)$ 是 X 上几乎处处有限的实(或复)可测函数.

1.4.4 可测函数列的收敛性

1. 几乎处处收敛

若存在零测集 $A \subset X$,$\forall x \in A^c$:$f_n(x) \to f(x)$,则说 $\{f_n\}$ 在 X 上几乎处处收敛于 f,记作 $f_n \to f$,a.e..

2. 测度收敛

若 $\forall \varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty}\mu X(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

则说 $\{f_n\}$ 在 X 上依测度 μ 收敛于 f,或简单地说测度收敛于 f,记作 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

3. 一致收敛

若 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists N > 0$,$\forall n \geqslant N$,$\forall x \in X$,有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,则说 $\{f_n\}$ 在 X 上一致收敛于 f,记作 $f_n \rightrightarrows f$.

4. 几乎一致收敛

若 $\forall \delta > 0$,$\exists A_\delta \subset X$:$\mu A_\delta < \delta$,在 A_δ^c 上 $f_n \rightrightarrows f$,则说 $\{f_n\}$ 在 X 上几乎一致收敛于 f,记作 $f_n \to f$,a.u..

以上几种收敛性强度不等,各有其用.不难直接看出:一致收敛 $\Rightarrow$ 几乎一致收敛 $\Rightarrow$ 几乎处处收敛且测度收敛.下面用例子说明反向的推理不能成立.

例 10 设 $f_n = \chi_{[n,\infty)}(n = 1,2,\cdots)$,则 $f_n(x) \to 0(x \in \mathbf{R}, n \to \infty)$.另一方面,

对 $\varepsilon = 1$ 有

$$m\{x \in \mathbf{R}: |f_n(x)| \geqslant \varepsilon\} = m([n,\infty)) = \infty,$$

可见 $\{f_n\}$ 不依测度收敛于零.这表明处处收敛推不出测度收敛,自然更推不出几乎一致收敛.

例 11 令 $e_{ki} = \left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right]$, $n = \frac{k(k-1)}{2} + i$, $f_n = \chi_{e_{ki}}(i = 1,2,\cdots,k, k = 1,2,\cdots)$, $X = [0,1]$. $\forall \varepsilon > 0$,有

$$mX(|f_n| \geqslant \varepsilon) = me_{ki} = 1/k \leqslant \sqrt{2/n} \to 0(n \to \infty),$$

可见 $f_n \xrightarrow{m} 0$.另一方面,对任给 $x \in X$ 与任何 $k \geqslant 1$,有 i 使 $x \in e_{ki}$,从而 $f_n(x) \nrightarrow 0$.这表明测度收敛序列可以处处不收敛,自然更不必几乎处处收敛与几乎一致收敛.

1.4.5 收敛定理

黎兹定理 若在 X 上 $f_n \xrightarrow{\mu} f$,则 $\{f_n\}$ 有子列几乎一致收敛(更几乎处处收敛)于 f.

叶果罗夫定理 若在 X 上 $f_n \to f$, a.e. 且 $\mu X < \infty$,则 $f_n \to f$, a.u..因此,当 $\mu X < \infty$ 时,在 X 上的几乎处处收敛与几乎一致收敛等价.

利用黎兹定理,可将关于几乎处处收敛的某些性质过渡到测度收敛.

例 12 设 $f_n \leqslant g_n(n = 1,2,\cdots)$.若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$,则 $f \leqslant g$, a.e..

证 由黎兹定理,可取 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n'}\}$: $f_{n'} \to f$, a.e..因依然有 $g_{n'} \xrightarrow{\mu} g$,故可取出 $\{g_{n'}\}$ 的子列 $\{g_{n''}\}$: $g_{n''} \to g$, a.e..因亦有 $f_{n''} \to f$, a.e.,而 $f_{n''} \leqslant g_{n''}$,故 $f \leqslant g$, a.e..

例 13 设 $\mu X < \infty$,在 X 上 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$,则 $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$.

证 否则有 $\varepsilon > 0$: $\mu X(|f_n g_n - fg| \geqslant \varepsilon) \nrightarrow 0$.不妨设有 $\delta > 0$,使 $\mu X(|f_n g_n - fg| \geqslant \varepsilon) > \delta$.取 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n'}\}$,使 $f_{n'} \to f$, a.e.;再取 $\{g_{n'}\}$ 的子列 $\{g_{n''}\}$,使 $g_{n''} \to g$, a.e..于是 $f_{n''}g_{n''} \to fg$, a.e..由叶果罗夫定理,必 $f_{n''}g_{n''} \to fg$, a.u.,从而 $f_{n''}g_{n''} \xrightarrow{\mu} fg$.但这与 $\mu X(|f_{n''}g_{n''} - fg| \geqslant \varepsilon) > \delta$ 矛盾.

1.4.6 逼近定理

用性质较好的函数(如连续函数或多项式)逼近性质较差的函数,是函数论的重要课题之一.最基本的结果如下.

鲁金(Lusin)定理 设 $X \subset \mathbf{R}^n$ 是一紧集,f 是定义于 X 上的几乎处处有限的实(或复)可测函数.则对任给 $\varepsilon > 0$,存在 X 上的连续实(或复)函数 $g(x)$,使得 $mX(f \neq g) < \varepsilon$,且 $\sup\limits_{x\in X}|g(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$.由此推出:存在 X 上的实(或复)连续函数 $f_n(n = 1,2,\cdots)$,使得 $f_n \to f$, a.e.,且 $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$.

魏尔斯特拉斯定理　若f是区间$[a,b]$上的实(或复)连续函数,则存在多项式序列$\{P_n\}$,在$[a,b]$上有$P_n \rightrightarrows f$.由此推出:若f是$[a,b]$上几乎处处有限的实(或复)可测函数,则存在一列多项式几乎处处收敛于f.

推论　若f是以2π为周期的连续实(或复)函数,则存在一列三角多项式一致收敛于f.

一个形如

$$A+\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的函数称为n次三角多项式.

2　勒贝格积分

2.1　定义与性质

设$(X,\mathscr{R},\mu)$是给定的测度空间.

2.1.1　勒贝格积分的定义

定义由如下几个递进的步骤归纳地完成.

1.非负简单函数的积分

设$f=\sum c_i\chi_{e_i}$,$c_i\in[0,\infty)$,$e_i\subset X(1\leqslant i\leqslant n)$是互不相交的可测集,则定义

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\sum c_i\mu e_i.$$

当$c_i=0$,$\mu e_i=\infty$时约定$c_i\mu e_i=0$.

2.非负可测函数的积分

设f在X上可测且$f(x)\geqslant 0(x\in X)$,则定义

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_X\varphi\mathrm{d}\mu,$$

其中φ遍取满足$0\leqslant\varphi\leqslant f$的所有简单函数.

3.实可测函数的积分

设f是X上的实可测函数,$\int_X f^+\mathrm{d}\mu$与$\int_X f^-\mathrm{d}\mu$中至少有一个有限,则定义

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\int_X f^+\mathrm{d}\mu-\int_X f^-\mathrm{d}\mu.$$

4.复可测函数的积分

设u,v是X上的实可测函数,$f=u+iv$.若$\int_X u\mathrm{d}\mu$与$\int_X v\mathrm{d}\mu$存在且有限,则定义

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X u\mathrm{d}\mu + i\int_X v\mathrm{d}\mu.$$

5. 任何可测集上的积分

设 $A \subset X$ 是一可测集，f 是 X 上的实（或复）可测函数，则定义

$$\int_A f\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_A\mathrm{d}\mu,$$

只要右端之积分存在.

当 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 存在时，称它为 f 在 X 上（对测度 μ）的积分，若 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 有限，则说 f 在 X 上可积，以 $L^1(X)$ 记 X 上可积的实（或复）函数之全体，$L^1(X)$ 也写作 $L^1(X,\mu)$ 或简写作 L^1. 关于测度 m 的积分称为**勒贝格积分**，关于 m 可积称为**勒贝格可积**，关于任意测度 μ 的积分也称为**抽象勒贝格积分**.

2.1.2 积分的基本性质

设 f,g 是 X 上的实（或复）可测函数，积分 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 与 $\int_X g\mathrm{d}\mu$ 存在；α,β 是实（或复）常数.

1. 线性性

若 $f,g \in L^1$ 或 f,g,α,β 非负，则

$$\int_X(\alpha f + \beta g)\mathrm{d}\mu = \alpha\int_X f\mathrm{d}\mu + \beta\int_X g\mathrm{d}\mu.$$

2. 完全可加性

若 $X = \bigcup A_n$，A_n 是可数个互不相交的可测集；$f \in L^1$ 或非负，则

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \sum\int_{A_n} f\mathrm{d}\mu.$$

3. 单调性

若在 X 上 $f \leqslant g$，a.e.，则

$$\int_X f\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g\mathrm{d}\mu.$$

4. 若 $\mu A = 0$，则 $\int_A f\mathrm{d}\mu = 0$.

以上性质皆由积分的定义直接推出.

2.1.3 可积条件

设 f 是 X 上的实（或复）可测函数.

1. 充要条件

f 可积的充要条件是 $|f|$ 可积. 因此，在勒贝格积分理论中没有“绝对可积”概念.

2. 必要条件

若 f 可积，则 f 必几乎处处有限，且集 $\{x : f(x) \neq 0\}$ 具 σ- 有限测度.

3. 充分条件

若 $|f| \leqslant g$, a.e., g 可积,则 f 可积. 特别,若 $\mu X < \infty$ 而 f 有界,则 f 可积.

4. 零测集对积分不起作用

若 $f = g$, a.e., 则 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 存在 $\Leftrightarrow \int_X g\mathrm{d}\mu$ 存在且 $\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X g\mathrm{d}\mu$; f 可积 $\Leftrightarrow g$ 可积. 鉴于此,在处理积分问题时,可随意改变一个函数在某零测集上的值,也不必顾及一函数在某零测集上是否有定义.

例如,对狄里克莱函数 χ_Q(参看上章例 9) 求积分时,可以认为 $\chi_Q = 0$,因而有 $\int_R \chi_Q \mathrm{d}m = 0$. 另一方面,$\chi_Q$ 因其处处间断而在任何区间 $[a,b](a < b)$ 上非黎曼可积!

2.1.4　积分的其他性质

下面诸性质都是积分基本性质(1) ~ (4) 的推论.

(1) 设 $f, g \in L^1(X)$, $f \leqslant g$, a.e.. 若 $\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X g\mathrm{d}\mu$, 则 $f = g$, a.e.. 特别,若 $\int_X |f| \mathrm{d}\mu = 0$, 则 $f = 0$, a.e..

(2) 若 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 存在,则 $\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f| \mathrm{d}\mu$.

(3) **绝对连续性**　若 $f \in L^1(X)$, 则 $\lim\limits_{\mu e \to 0} \int_e f\mathrm{d}\mu = 0$. 这意味着: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $e \subset X$, $\mu e < \delta$ 时,恒有 $\left|\int_e f\mathrm{d}\mu\right| < \epsilon$.

(4) 下连续性　设 $A_n \subset X$ 是可测集, $A_1 \subset A_2 \subset, \cdots, A = \bigcup A_n$, $f \in L^1(X)$ 或 f 非负,则 $\int_{A_n} f\mathrm{d}\mu \to \int_A f\mathrm{d}\mu$.

(5) 上连续性　设 $A_n \subset X$ 是可测集, $A_1 \supset A_2 \supset, \cdots, A = \bigcap A_n$, $f \in L^1(X)$, 则 $\int_{A_n} f\mathrm{d}\mu \to \int_A f\mathrm{d}\mu$.

例 1　设可测集 $E \subset X$ 被可测集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 所覆盖,且每点 $x \in E$ 至少被其中 p 个集包含,则必有某个 A_i 的测度 $\geqslant (p/n)\mu E$.

证　若以 f_i 记集 A_i 的特征函数,则在 E 上 $\sum f_i \geqslant p$. 于是

$$p\mu E \leqslant \int_E \sum f_i \mathrm{d}\mu = \sum \int_E f_i \mathrm{d}\mu \leqslant \sum \int_X f_i \mathrm{d}\mu = \sum \mu A_i,$$

由此得出必有某个 $\mu A_i \geqslant (p/n)\mu E$ 因此

$$p\mu E \leqslant n \cdot \max_i \mu A_i,$$

由此得 $\max\limits_i \mu A_i \geqslant (p/n)\mu E$.

例 2　设 $f \in L^1(X)$, 则 $\lim\limits_{n \to \infty} \mu X(|f| \geqslant n) = 0$.

证　令 $A_n = X(|f| \geqslant n)$，则

$$\mu A_n = \int_{A_n} \mathrm{d}\mu \leqslant \int_{A_n} \frac{1}{n}|f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{n}\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu \to 0(n \to \infty).$$

2.1.5　可和性

设 μ 是 X 上的计数测度．任给 $f \in L^1(X,\mu)$，将 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 写作 $\sum_{x\in X} f(x)$，称它为 $f(x)$ 在 X 上的和，并说 $f(x)$ 在 X 上可和．利用积分性质推出如下结论．

(1) $f(x)$ 在 X 上可和 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 在 X 上可和．若 $f(x)$ 可和，则存在可数集 $\{x_n\} \subset X$，在 $X \setminus \{x_n\}$ 上 $f(x) = 0$，因此 $\sum_{x\in X} f(x) = \sum f(x_n)$．可见，当 f 可和时 $\sum f(x)$ 实际上是一无穷级数或有限和．

(2) 若 f 可和，则 $\left|\sum_{x\in X} f(x)\right| \leqslant \sum_{x\in X}\left|f(x)\right|$．

(3) 若级数 $\sum a_n$ 绝对收敛，则它的项可以任意重排而不影响收敛性与和．

2.2　积分收敛定理

关于积分的三大收敛定理通常被认为是勒贝格积分理论的中心结果．

以下设 (X,μ) 是给定的测度空间，$f, g, f_n(n = 1,2,\cdots)$ 是 X 上的可测函数．

2.2.1　勒维定理

(1) 特殊形式　若 $0 \leqslant f_n \uparrow f$，则

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu. \tag{2-1}$$

(2) 一般形式　设 $g \in L^1$．若 $g \leqslant f_n \uparrow f$ 或 $g \geqslant f_n \downarrow f$，则式(2-1)成立．

(3) 级数形式　若 $f_n \geqslant 0(n = 1,2,\cdots)$，则

$$\int_X \sum f_n\mathrm{d}\mu = \sum\int_X f_n\mathrm{d}\mu. \tag{2-2}$$

注意，对于式(2-1)并未假定 $f \in L^1$；对于式(2-2)并未假定 $\sum f_n$ 收敛．正因为如此，勒维(Levi)定理在应用上特别方便．

例3　设 $f \geqslant 0$．令

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & 若 f(x) \leqslant n; \\ n, & 若 f(x) > n, \end{cases}$$

则 $0 \leqslant f_n \uparrow f$，于是依式(2-1)有 $\int_X f_n\mathrm{d}\mu \to \int_X f\mathrm{d}\mu$．

例4　求 $I = \int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x$．

解　利用展开式 $(1 - \mathrm{e}^{-x})^{-1} = \sum_{n=0}^\infty \mathrm{e}^{-nx}$ 及式(2-2)：

$$I=\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x\mathrm{e}^{-(n+1)x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

2.2.2 法图(Fatou)定理

(1) 特殊形式　若 $f_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则

$$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_X f_n \mathrm{d}\mu. \tag{2-3}$$

(2) 一般形式　设 $g\in L^1$,若 $f_n \geqslant g(n=1,2,\cdots)$,则式(2-3)成立;若 $f_n \leqslant g(n=1,2,\cdots)$,则

$$\int_X \varlimsup_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \varlimsup_{n\to\infty}\int_X f_n \mathrm{d}\mu. \tag{2-4}$$

例 5　设 $f,f_n\in L^1, f_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots), f_n\to f$, a.e.. 且式(2-1)成立. 则对任给可测集 $A\subset X$ 有

$$\int_A f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\mathrm{d}\mu.$$

证　相继两次应用式(2-3):

$$\begin{aligned}\int_A f\mathrm{d}\mu &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_A f_n\mathrm{d}\mu \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\int_A f_n\mathrm{d}\mu\\ &=\varlimsup_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\mathrm{d}\mu-\int_{A^c}f_n\mathrm{d}\mu\right)\\ &=\int_X f\mathrm{d}\mu-\varliminf_{n\to\infty}\int_{A^c}f_n\mathrm{d}\mu\\ &\leqslant\int_X f\mathrm{d}\mu-\int_{A^c}f\mathrm{d}\mu=\int_A f\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

由此得出 $\int_A f_n\mathrm{d}\mu\to\int_A f\mathrm{d}\mu$.

2.2.3 控制收敛定理

1° 设 $f_n\to f$, a.e.(或 $f_n\xrightarrow{\mu}f$). 若存在 $g\in L^1$,使 $|f_n|\leqslant g(n=1,2,\cdots)$(称 g 为"控制函数"),则 $f\in L^1$,且 $\int_X |f_n-f|\mathrm{d}\mu\to 0$;这推出式(2-1)成立.

2° 有界收敛定理　若存在常数 $K>0$,使 $|f_n|\leqslant K(n=1,2,\cdots)$,且 $\mu X<\infty$, $f_n\xrightarrow{\mu}f$,则 1° 的结论成立.

例 6　设 $f\in L^1(X)$. 令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & 若\ |f(x)|\leqslant n;\\ 0, & 若\ |f(x)|>n.\end{cases}$$

则 $\int_X f_n\mathrm{d}\mu\to\int_X f\mathrm{d}\mu$, $\int_X |f_n-f|\mathrm{d}\mu\to 0$.

证　因 $f\in L^1$,故 f 几乎处处有限,于是 $f_n\to f$, a.e.. 其次,可用 $|f|$ 作为 $\{f_n\}$ 的控制函数,故可用 2.2.3 得出所要结论.

例7　求 $l = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}dx$.

解　因

$$e^{-x^n} \leqslant g(x) = \begin{cases}1, & 0 \leqslant x \leqslant 1;\\ e^{-x}, & x > 1,\end{cases}$$

而 $g \in L^1[0,\infty)$,故依2.2.3有

$$l = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} e^{-x^n}dx = \int_0^1 1\cdot dx + \int_1^\infty 0\cdot dx = 1.$$

2.2.4　韦达利(Vitali)定理

1.等度绝对连续积分

设 $F \subset L^1(X)$.若 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$,当 $e \subset X, \mu e < \delta$ 时,对一切 $f \in F$ 有 $\left|\int_e f d\mu\right| < \varepsilon$,则说 F 在 X 上有**等度绝对连续积分**.

2.韦达利定理

设 $X \subset \mathbf{R}^n, mX < \infty, \{f_n\} \subset L^1(X,m)$ 有等度绝对连续积分且 $f_n \xrightarrow{m} f$,则 $f \in L^1(X,m)$,且

$$\int_X f dm = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n dm.$$

2.2.5　与黎曼积分的联系

利用积分收敛定理,可建立勒贝格积分与黎曼积分之间的联系.

1.常义定积分

设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界实函数,则 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积 $\Leftrightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.若 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积,则亦必勒贝格可积,且两种积分值相等.

2.广义定积分

设 (a,b) 是有限或无限区间,$f(x)$ 在 (a,b) 内至多有限个间断点,则

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b |f|dm,$$

左端表广义定积分.由此推出 $f \in L^1(a,b) \Leftrightarrow$ 广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛.当 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛时有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f dm.$$

3.重积分

设 f 是 n 维区域 D 上的实函数,$n \geqslant 2$.若 D 与 f 皆有界,则 f 在 D 上黎曼可积 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上几乎处处连续;当 f 在 D 上黎曼可积时亦必勒贝格可积,且两种积分值相等.若 D 或 f 无界,但 f 在 D 上几乎处处连续,则 f 在 D 上的广义积分收敛 $\Leftrightarrow f \in$

$L^1(D)$，且当 $f \in L^1(D)$ 时有

$$\int_D f(x)\mathrm{d}x = \int_D f\mathrm{d}m, \tag{2-5}$$

左端表广义 n 重积分.

鉴于以上结论，对 $D \subset \mathbf{R}^n (n \geqslant 1)$ 上的勒贝格积分亦用记号 $\int_D f(x)\mathrm{d}x$.

例 8 设广义 n 重积分 $\int_D f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$n \geqslant 2$；D_k 是 D 的子区域，$D_1 \subset D_2 \subset \cdots$，$D = \bigcup D_k$，则

$$\int_D f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{D_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

证 由式(2-5)及勒贝格积分的性质有

$$\int_D f(x)\mathrm{d}x = \int_D f\mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty}\int_{D_k} f\mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty}\int_{D_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

例 9(平均逼近) 设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 是有界闭区域，$f \in L^1(D)$. 则对任给 $\varepsilon > 0$，存在 D 上的连续函数 g，使得

$$\int_D |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

证 由例 6 有 D 上的有界可测函数 φ，使得

$$\int_D |f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $|\varphi(x)| \leqslant M < \infty$. 由鲁塞定理，有 D 上的连续函数 g，使得 $mD(\varphi \neq g) < \varepsilon/(4M)$ 且 $|g(x)| \leqslant M$. 于是

$$\begin{aligned}\int_D |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \int_D |f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x + \int_D |\varphi(x) - g(x)|\mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{D(\varphi\neq g)} |\varphi(x) - g(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot mD(\varphi \neq g) < \varepsilon.\end{aligned}$$

2.2.6 参变积分

设 $f(x,y)$ 是定义于 $X \times Y$ 上的实(或复)函数，$Y \subset \mathbf{R}^n$，$f(x,y)$ 关于 x 在 X 上可积. 令

$$\varphi(y) = \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x),$$

$\mathrm{d}\mu(x)$ 表示积分是对变元 x 取的. 利用积分收敛定理推出，函数 $\varphi(y)$ 有以下性质：

(1) 积分号下取极限 若 $|f(x,y)| \leqslant g(x) \in L^1(X)$，则

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y) = \int_X \lim_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}\mu(x),$$

只要积分号下的极限几乎处处存在；

(2) 连续性　若 $|f(x,y)| \leqslant g(x) \in L^1(X)$,对几乎所有 $x \in X, f(x,y)$ 对 y 在 y_0 连续,则 $\varphi(y)$ 在 y_0 连续;

(3) 可微性　设 $Y \subset \mathbf{R}$,偏导数 $f_y(x,y)$ 存在,且 $|f_y(x,y)| \leqslant g(x) \in L^1(X)$,则 $\varphi(y)$ 可微,且

$$\varphi'(y) = \int_X f_y(x,y) \mathrm{d}\mu(x).$$

例 10　设 $f \in L^1(\mathbf{R})$. 定义 f 的傅里叶变式为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}x.$$

则 $\hat{f}(\xi)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续;当 $xf(x) \in L^1(\mathbf{R})$ 时 $\hat{f}(\xi)$ 连续可微.

证　因 $|f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}| = |f(x)| \in L^1(\mathbf{R})$,故由 2.2.6 知 $\hat{f}(\xi)$ 连续,若 $xf(x) \in L^1(R)$,则

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \right| = |xf(x)| \in L^1(\mathbf{R}),$$

于是由 2.2.6 有

$$\hat{f}'(\xi) = -\mathrm{i}\int_{\mathbf{R}} xf(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}x.$$

再由 2.2.6 知 $\hat{f}'(\xi)$ 连续.

2.3　傅比尼定理

设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 与 $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ 是给定的 σ- 有限测度空间.

2.3.1　乘积测度空间

1. 乘积测度

设 $\mathscr{U}$ 是 $X \times Y$ 上包含 $\{A \times B : A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$ 的最小 σ- 代数,则存在 $\mathscr{U}$ 上的唯一 σ- 有限测度 λ,使得:

1° 对任给 $A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}$,有 $\lambda(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$,即"可测矩形"$A \times B$ 的测度是其"边"测度之积;

2° 对任给 $E \in \mathscr{U}$,有

$$\lambda(E) = \int_X \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) \mathrm{d}\nu(y),$$

其中 $E_x = \{y : (x,y) \in E\}, E^y = \{x : (x,y) \in E\}$(称为"截口").

称如上的 λ 为 μ 与 ν 的"**乘积测度**",记作 $\mu \times \nu$.

2. 勒贝格测度的乘积

设 m_k 记 k 维勒贝格测度,则对任何自然数 k, l,乘积测度 $m_k \times m_l$ 的完备化就是 $k+l$ 维勒贝格测度,即 $\overline{m_k \times m_l} = m_{k+l}$(参看 1.3.1).

2.3.2 傅比尼定理

(1) 设 $f(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上关于测度 $\mu\times\nu$ 的非负可测函数,则

$$\int_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_X \mathrm{d}\mu(x)\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$$

$$= \int_Y \mathrm{d}\nu(y)\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x). \tag{2-6}$$

(2) 若 $f(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上关于测度 $\mu\times\nu$ 可积的实(或复)函数,则式(2-6)成立,其中两个逐次积分的内层积分分别对 x 与 y 几乎处处存在且有限.

(3) 设 $f(x,y)$ 是(有限或无限)矩形 $D=(a,b)\times(c,d)$ 上的实(或复)可测函数.若 f 非负,或者广义二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛,则成立

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{2-7}$$

傅比尼定理主要用来解决积分换序问题.

例 11 求 $I=\int_0^\infty (\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2})\dfrac{\mathrm{d}x}{x}(0<a<b)$.

解 应用式(2-7):

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}\int_b^a \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{-yx^2})\mathrm{d}y = \int_0^\infty \mathrm{d}x\int_a^b x\mathrm{e}^{-yx^2}\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-yx^2}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{2y} = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

上例中,$f(x,y)=x\mathrm{e}^{-yx^2}$ 是 $(0,\infty)\times(a,b)$ 上的非负连续(必定可测)函数,应用公式(2-7)时无需验证 f 的可积性,更不必考虑参变积分 $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-yx^2}\mathrm{d}x$ 的一致收敛性.可见应用傅比尼定理是十分方便的.

例 12 设 $f,g\in L^1(\mathbf{R})$,$h=f*g$,即

$$h(x)=\int_{-\infty}^\infty f(y)g(x-y)\mathrm{d}y;$$

$\hat{f}$ 依例 10.则 $\hat{h}=\hat{f}\hat{g}$.

证 对任给 $\xi\in\mathbf{R}$,有

$$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^\infty h(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^\infty f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)\xi}g(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^\infty f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^\infty g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)\xi}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dy\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\xi}dx$$

$$= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),$$

其中用了公式(2-7),其合法性在于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)e^{-iy\xi}g(x-y)e^{-i(x-y)\xi}|\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,dy\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)|\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,dy\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx < \infty.$$

傅比尼定理也常用于某些测度问题.

例 13 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 是一可测集,平行于某定直线的每条直线与 E 的交为1维零测集,则 $m_nE = 0$,m_n 记 n 维勒贝格测度.

证 对每点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,记 $\boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$,$z = x_n$.不妨设定直线为 x_n 轴(否则考虑一平移或旋转变换). $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^{n-1}$,令 $E_y = \{z:(y,z) \in E\}$.由假设有 $m_1E_y = 0$,于是由傅比尼定理有

$$m_nE = \int_{\mathbf{R}^n}\chi_E(y,z)dydz = \int_{\mathbf{R}^{n-1}}dy\int_{\mathbf{R}}\chi_E(y,z)dz = \int_{\mathbf{R}^{n-1}}m_1E_ydy = 0.$$

例 14 设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 可测,f 是 D 上的非负可测函数,$E = \{(\boldsymbol{x},y):\boldsymbol{x} \in D, 0 \leqslant y < f(\boldsymbol{x})\}$.则 E 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中可测,且

$$m_{n+1}E = \int_D f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

证 当 f 是简单函数时显然 E 可测,因而用简单函数逼近易看出 E 可测.于是由傅比尼定理有

$$m_{n+1}E = \int_{\mathbf{R}^n}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbf{R}}\chi_E(\boldsymbol{x},y)dy = \int_D f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

2.4 空 间 L^p

本节设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是给定的测度空间,$p \in [1, \infty]$,$1/p + 1/q = 1$,当 $p = 1$ 或 ∞ 时,$q = \infty$ 或 1.

2.4.1 L^p 空间概念

(1) L^p 范数 任给 X 上的实(或复)可测函数,令

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty; \\ \inf\limits_{\mu e = 0}\sup\limits_{x \in X \setminus e} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

称 $\|f\|_p$ 为 f 的 L^p 范数.

(2) 空间 L^p 令

$$L^p(X)=\{f:f\text{在}X\text{上可测且}\ \|f\|_p<\infty\}.$$

当 $1\leqslant p<\infty$ 时称 $L^p(X)$ 为 X 上的 p 次可积函数空间；称 $L^\infty(X)$ 为 X 上的本性有界函数空间. $L^p(X)$ 也记作 $L^p(X,\mu)$，或 $L^p(\mu)$，L^p. L^p 是一向量空间.

(3) 赫尔德(Hölder)不等式　任给 $f\in L^p$，$g\in L^q$，有

$$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q.$$

当 $1<p<\infty$ 时即

$$\int_X|fg|\,\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int_X|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\left(\int_X|g|^q\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.\tag{2-8}$$

(4) 范数公理　L^p 范数满足如下范数公理：

1° 齐次性：$\|\alpha f\|_p=|\alpha|\,\|f\|_p$；

2° 三角不等式：$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$；

3° 正定性：$\|f\|_p\geqslant0$；$\|f\|_p=0\Leftrightarrow f=0$，a.e.，

以上 $f,g\in L^p$，α 是常数.

2.4.2 L^p 收敛

(1) 定义　若 $f,f_n\in L^p(n=1,2,\cdots)$，$\|f_n-f\|_p\to0(n\to\infty)$，则说序列 $\{f_n\}$ 依 L^p 范数收敛于 f，或简单地说"L^p 收敛于"f，记作 $f_n\to f(L^p)$. 若 $1\leqslant p<\infty$，则称 L^p 收敛为 p 次平均收敛；称 L^1 收敛为平均收敛；称 L^2 收敛为均方收敛.

(2) 性质

1° 若 $\{f_n\}$ L^p 收敛，则 $\sup\limits_n\|f\|_p<\infty$.

2° 若 $f_n\to f(L^p)$，$g_n\to g(L^p)$，$\alpha_n\to\alpha$，则

$$f_n+g_n\to f+g(L^p),\alpha_nf_n\to\alpha f(L^p);$$
$$\|f_n\|_p\to\|f\|_p.$$

3° 若 $f_n\to f(L^p)$，$f_n\to g(L^p)$，则 $f=g$，a.e..

(3) 与其他收敛的关系

1° $f_n\to f(L^p)\Rightarrow f\xrightarrow{\mu}f$；其逆不真.

2° $f_n\to f(L^p)\Rightarrow$ 在子列 $f_{n_k}\to f$，a.e..

3° 若 $f_n\to f$，a.e.，存在 $g\in L^p$，使 $|f_n|\leqslant g(n=1,2,\cdots)$，$1\leqslant p<\infty$，则 $f_n\to f(L^p)$.

(4) 完备性　序列 $\{f_n\}\subset L^p$ 为 L^p 收敛的充要条件是 $\|f_n-f_m\|_p\to0(m,n\to\infty)$.

2.4.3 L^p 空间的特例

(1) 若 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是一勒贝格可测集，则空间 $L^p(X)$ 通常指 $L^p(X,m)$，m 为 n 维勒贝格测度. 当 $X=(a,b)\subset\mathbf{R}^1$ 时，记 $L^p(X)$ 为 $L^p(a,b)$. 若 a,b 有限，则 $L^p(a,b)$ 与 $L^p[a,b]$ 并无区别.

(2) 约定 $l^p(X)=L^p(X,\mu)(1\leqslant p\leqslant\infty)$，其中 X 是任一非空集，μ 是 X 上的

计数测度.

(3) 约定 $l^p = l^p(\mathbf{N})(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. 当 $p < \infty$ 时, l^p 对任何 $x = (x_n) = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p$ 有

$$\| x \|_p = (\sum | x_n |^p)^{1/p};$$

而赫尔德不等式可写成($x \in l^p, y \in l^q$):

$$\sum | x_n y_n | \leqslant \left(\sum | x_n |^p \right)^{1/p} \left(\sum | y_n |^q \right)^{1/q}.$$

l^∞ 是有界数列空间;对每个 $x = (x_n) \in l^\infty$ 有

$$\| x \|_\infty = \sup_n | x_n |.$$

2.4.4 L^p 逼近

设 $1 \leqslant p < \infty$.

(1) 一般概念　$M \subset L^p$. 若 $\forall f \in L^p, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in M: \| f - g \|_p < \varepsilon$, 则说 M 在 L^p 中稠密, 或每个 $f \in L^p$ 可用 M 中的函数 L^p 逼近. 这等价于: $\forall f \in L^p$, 存在 $\{f_n\} \subset M$, 使得 $f_n \to f(L^p)$. 通常取 M 为尽可能简单或性质良好的函数构成的函数类. 若 M 可数且在 L^p 中稠密, 则称 L^p 为可分空间.

(2) 用简单函数逼近　每个 $f \in L^p(X)$ 可用 X 上的简单函数 L^p 逼近.

(3) 用连续函数逼近　若 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是任何区域, 则每个 $f \in L^p(\Omega)$ 可用连续函数 L^p 逼近; $L^p(\Omega)$ 是可分空间.

(4) 用阶梯函数逼近　若 $-\infty < a < b < \infty$, 则每个 $f \in L^p[a,b]$ 可用 $[a,b]$ 上的阶梯函数 L^p 逼近.

下面是应用逼近结果的一个典型例子.

例 15　设 $f \in L^1[a,b]$, 则

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \mathrm{d}x = 0. \tag{2-9}$$

证　若 $f = \chi_\Delta, \Delta = (\alpha, \beta) \subset (a, b)$, 则

$$\int_a^b f(x) \sin nx \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \sin nx \mathrm{d}x = n^{-1}(\cos n\alpha - \cos n\beta) \to 0 (n \to \infty).$$

由此进而推出, 当 f 是阶梯函数时式(2-9)成立.

$\forall \varepsilon > 0$, 取阶梯函数 g, 使 $\| f - g \|_1 < \varepsilon$; 取 $N > 0$, 使当 $n \geqslant N$ 时 $\left| \int_a^b g(x) \sin nx \mathrm{d}x \right| < \varepsilon$. 则当 $n \geqslant N$ 时有

$$\left| \int_a^b f(x) \sin nx \mathrm{d}x \right| \leqslant \| f - g \|_1 + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

可见式(2-9)成立.

2.4.5 空间 L^2

(1) 内积　$\forall f, g \in L^2$, 称

$$(f, g) = \int_X f \bar{g} \mathrm{d}\mu$$

为 f 与 g 的内积，它满足以下内积公理.

1° (f,g) 对 f 是线性的，对 g 是共轭线性的：

$$(f,\alpha g+\beta h)=\overline{\alpha}(f,g)+\overline{\beta}(f,h);$$

2° $(f,g)=\overline{(g,f)}$；

3° $(f,f)\geqslant 0,(f,f)=0\Leftrightarrow f=0$, a.e..

(2) 施瓦兹不等式　在(2-8)中取 $p=2$ 得

$$|(f,g)|\leqslant \|f\|_2\|g\|_2.$$

(3) 正交性　若 $(f,g)=0$，则称 f 与 g 正交，记作 $f\perp g$.

(4) 标准正交系　若 $\{\varphi_i\}\subset L^2$ 满足 $(\varphi_i,\varphi_j)=\delta_{ij}$，$\delta_{ij}=0(i\neq j)$，$\delta_{ii}=1$，则称 $\{\varphi_i\}$ 为标准正交系.

(5) 标准正交基　若 $\{\varphi_n\}\subset L^2$ 是标准正交系，且每个 $f\in L^2$ 可表为 L^2 收敛的"抽象傅里叶级数"

$$f=\sum_n (f,\varphi_n)\varphi_n,$$

则称 $\{\varphi_n\}$ 为 L^2 的标准正交基. 以下每个条件对于 $\{\varphi_n\}$ 为标准正交基是充分必要的.

1° 每个 $f\in L^2$ 可用形如 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\varphi_i$ 的函数 L^2 逼近.

2° 若 $f\in L^2$ 与每个 φ_n 正交，则 $f=0$, a.e..

3° 对每个 $f\in L^2$ 成立如下巴塞伐尔等式：

$$\|f\|_2^2=\sum|(f,\varphi_n)|^2.$$

例 16　取 $\varphi_n=e^{2in\pi x}$，则 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2[0,1]$ 中的标准正交系：

$$(\varphi_n,\varphi_m)=\int_0^1 e^{2i\pi(n-m)x}dx=\begin{cases}1, & n=m;\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

因 $\sum\limits_{j=-n}^{n}c_j\varphi_j$ 可表为三角多项式：

$$\alpha_0+\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j\cos 2j\pi x+\beta_j\sin 2j\pi x),$$

而每个 $f\in L^2\,[0,1]$ 可用如上的三角多项式 L^2 逼近，因此 $\{e^{2in\pi x}: n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是 $L^2[0,1]$ 的一个标准正交基. 于是，每个 $f\in L^2[0,1]$ 可展开为 L^2 收敛的傅里叶级数：

$$f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{2in\pi x},$$

其中

$$c_n=\int_0^1 f(x)e^{-2in\pi x}dx,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

3 微分理论

3.1 有界变差函数

3.1.1 单调函数

设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ $(a<b)$ 上的单调增函数，则它有如下性质.

(1) 连续性　$f(x)$ 至多有可数多个间断点，且只能有第一类间断点. 若 x 是 f 的间断点，则 $f(x^+)-f(x^-)$ 为 f 在 x 的跃度，约定

$$f(a^-)=f(a),f(b^+)=f(b).$$

(2) 跳跃函数　令 $s(a)=0$，则称

$$s(x)=\sum_{a\leqslant y<x}[f(y^+)-f(y^-)]+f(x)-f(x^-),\quad a<x\leqslant b$$

为 $f(x)$ 的跳跃函数. $s(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增，与 $f(x)$ 有同样的间断点，且在每个间断点与 $f(x)$ 有同样的跃度；$\varphi(x)=f(x)-s(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续增函数. 于是 $f(x)=\varphi(x)+s(x)$，$f(x)$ 的全部间断与跃度都转移到了 $s(x)$ 上.

(3) 可微性　f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a).$$

例 1　在康托尔集 P 的长 3^{-n} 的余区间

$$\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\cdots,\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)$$

上依次令 $f(x)$ 取值

$$\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n},\quad n=1,2,\cdots.$$

然后定义 $f(x)=\sup\limits_{x>y\in G}f(y)$，$f(0)=0$，其中 $G=[0,1]\setminus P$. 则 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的增函数. 因其值在 $[0,1]$ 中稠密，故不能有间断. 因当 $x\in G$ 时 $f'(x)=0$，故

$$\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=0<1=f(1)-f(0).$$

可见，即使对连续增函数 $f(x)$，亦不一定成立牛顿 - 莱布尼兹公式

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

3.1.2 全变差

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限实(或复)函数，$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$\Delta f(x_i)=f(x_i)-f(x_{i-1})$. 令

$$\bigvee_a^b(f) = \sup\sum_{i=1}^n |\Delta f(x_i)|,$$

上确界是对所有可能的点组$\{x_i\}$取的. 称$\bigvee_a^b(f)$为f在$[a,b]$上的**全变差**. 全变差有以下性质.

1° $0 \leqslant \bigvee_a^b(f) \leqslant \infty$; $\bigvee_a^b(f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv \text{const}$.

2° 齐次性　$\bigvee_a^b(\alpha f) = |\alpha|\bigvee_a^b(f)$, α是常数.

3° 次可加性(对函数)　$\bigvee_a^b(f+g) \leqslant \bigvee_a^b(f) + \bigvee_a^b(g)$.

以上性质合起来表明全变差是一半范.

4° 可加性(对区间)　$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f)(a < c < b)$. 这推出$\bigvee_a^x(f)(a \leqslant x \leqslant b)$是"上限"$x$的增函数.

3.1.3　有界变差函数

若$\bigvee_a^b(f) < \infty$, 则称f为$[a,b]$上的**有界变差函数**. 以$V[a,b]$记$[a,b]$上的有界变差实(或复)函数之全体. 有界变差函数有以下性质.

(1) 运算性质　有界变差函数之和、差、积仍为有界变差函数, 因此$V[a,b]$是一个代数. 若$f \in V[a,b]$, 则$|f| \in V[a,b]$. 因此, $V[a,b]$对格运算$\vee$、$\wedge$封闭, 注意

$$f \vee g = \frac{1}{2}(|f-g| + (f+g)).$$

(2) 若$f \in V[a,b]$是实函数, 令$\pi(x) = \bigvee_a^x(f)$, $v(x) = \pi(x) - f(x)$, 则$f(x) = \pi(x) - v(x)$, $\pi(x)$与$v(x)$都是$[a,b]$上的有界增函数. 因此, 实函数是有界变差函数的充要条件是它可表为两增函数之差.

若$f = u + \mathrm{i}v$, u,v是实函数, 则f有界变差$\Leftrightarrow u,v$皆有界变差. 利用以上结论及3.1.1得出:

(3) 连续性　若$f \in V[a,b]$, 则f至多有可数个间断点, 且只能有第一类间断点;

(4) 可微性　若$f \in V[a,b]$, 则f在$[a,b]$上几乎处处可微, 且$f' \in L^1[a,b]$.

例2　设$C: z = \varphi(t)(a \leqslant t \leqslant b)$是复平面上的任一连续曲线, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 则$\sum_K |\Delta\varphi(t_k)|$是在点$z_k = \varphi(t_k)(0 \leqslant k \leqslant n)$内接$C$的折线之长. 定义$s = \bigvee_a^b(\varphi)$为曲线$C$之长. 于是$C$是有限长曲线$\Leftrightarrow \varphi \in V[a,b]$.

若$C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}(a \leqslant t \leqslant b)$是一空间连续曲线, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 则在$t = t_k(0 \leqslant k \leqslant n)$处内接$C$的折线之长为

$$L=\sum_k|\Delta r(t_k)|=\sum_k\sqrt{|\Delta\varphi_1(t_k)|^2+|\Delta\varphi_2(t_k)|^2+|\Delta\varphi_3(t_k)|^2}.$$

规定 $s=\sup L$ 为曲线 C 之长,上确界是对所有可能的内接折线取的.因

$$\max\{|\Delta\varphi^1(t_k)|,|\Delta\varphi_2(t_k)|,|\Delta\varphi_3(t_k)|\}$$
$$\leqslant|\Delta r(t_k)|\leqslant|\Delta\varphi_1(t_k)|+|\Delta\varphi_2(t_k)|+|\Delta\varphi_3(t_k)|,$$

故 C 是有限长曲线 $\Leftrightarrow\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in V[a,b]$.

例3 设 $f(x)=x^a\sin(1/x)(0<x\leqslant 1)$, $f(0)=0$.讨论 $f(x)$ 是否为有界变差函数.

解 当 $0<x\leqslant 1$ 时,有

$$f'(x)=x^{a-2}\left(ax\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right).$$

若 $0\leqslant a\leqslant 1$,则

$$\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1x^{a-2}\left|\cos\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x-\int_0^1ax^{a-1}\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\int_1^\infty\frac{|\cos t|}{t^a}\mathrm{d}t-1=\infty,$$

可见 $f'\notin L^1[0,1]$,因而 $f\notin V[0,1]$.若 $a>1$, $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$, $\Delta f(x_i)=f(x_i)-f(x_{i-1})$,则

$$\sum|\Delta f(x_i)|=\sum\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_0^1x^{a-2}(a+1)\mathrm{d}x<\infty,$$

于是 $\bigvee_0^1(f)\leqslant\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x<\infty$,即 $f\in V[0,1]$.若 $a<0$,则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上无界,必定 $f\notin V[0,1]$.

上例中的函数 $f(x)$ 在 $0<a\leqslant 1$ 时连续而非有界变差.可见连续性不足以保证有界变差.实际上,可以证明,在一定意义上,"几乎所有"的连续函数都是非有界变差函数.

3.1.4 赫尔选择原理

(1) 设 $F\subset V[a,b]$ 是一无限集,存在常数 K,使得 $\forall f\in F$,有 $|f(x)|\leqslant K$, $\bigvee_a^b(f)\leqslant K$,则存在序列 $\{f_n\}\subset F$, $\{f_n\}$ 处处收敛于某个 $f\in V[a,b]$.

(2) 推论 若 F 是 $[a,b]$ 上增函数的无限集,存在 $K>0$,使对任给 $f\in F$, $x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\leqslant K$,则 F 中可取出序列处处收敛于某个增函数.

3.1.5 标准分解

设 f 是 $[a,b]$ 上的实有界变差函数.

(1) 正变差与负变差 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, $\Delta f(x_i)=f(x_i)-f(x_{i-1})$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.令

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{+}(f) = \sup\sum{}^{+}|\Delta f(x_i)|;$$
$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{-}(f) = \sup\sum{}^{-}|\Delta f(x_i)|,$$

其中$\sum^{+}$只收入使$\Delta f(x_i)\geqslant 0$的项，$\sum^{-}$收入使$\Delta f(x_i)<0$的项，sup是对所有可能的点组$\{x_i\}$取的. 分别称$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{+}(f)$与$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{-}(f)$为$f$在$[a,b]$上的正变差与负变差. 令

$$p(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{+}(f),\quad n(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{-}(f)\quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

二者分别称为f的正变差与负变差. 有等式:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{+}(f) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{-}(f);$$
$$p(x) - n(x) = f(x) - f(a).$$

(2) 标准分解　称分解

$$f(x) = p(x) - n(x) + f(a)$$

为f的标准分解. 若有增函数p_1, n_1, 使$p_1(a) = n_1(a) = 0$,

$$f(x) = p_1(x) - n_1(x) + f(a),$$

则$p_1 - p$与$n_1 - n$是非负增函数.

3.2　绝对连续函数

3.2.1　绝对连续函数的概念

设$f(x)$是区间$[a,b]$上的有限实(或复)函数. 若$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 对$[a,b]$中任意有限个互不相交的区间(a_k,b_k), 当$\sum(b_k-a_k)<\delta$时有$\sum|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$, 则说$f$在$[a,b]$上绝对连续. 以$AC[a,b]$或$AC$记$[a,b]$上的绝对连续函数之全体. 绝对连续函数有以下性质.

(1) 运算性质　设$f,g\in AC[a,b]$, 则$f\pm g, fg, |f|\in AC[a,b]$; 当$g(x)\neq 0(\forall x\in[a,b])$时$f/g\in AC[a,b]$.

(2) 绝对连续函数的复合　设f定义于$[a,b]$上取值于$[A,B]$中, g定义于$[A,B]$上. 若f与g皆绝对连续, 则$g(f(x))$绝对连续的充要条件是它为有界变差. 若f绝对连续, g是李普希茨函数(3.2.4), 则$g(f(x))$是绝对连续函数.

(3) 微分性质　若$f\in AC[a,b]$, 则必$f\in V[a,b]$, 因此f在$[a,b]$上几乎处处可微, 且$f'\in L^1[a,b]$.

3.2.2　牛顿 - 莱布尼兹公式

(1) 变上限积分　设$g\in L^1[a,b]$, $f(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, 则$f\in AC[a,b]$, 且$f'=g$, a.e., 即

$$\left[\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right]' = g(x),\text{a.e.}. \tag{3-1}$$

(2) 牛顿 - 莱布尼兹公式　若 $f \in AC[a,b]$,则

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{3-2}$$

反之,若 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微,$f' \in L^1[a,b]$ 且式(3-2)成立,则 $f \in AC[a,b]$.简言之,$f \in AC$ 的充要条件是关于它的牛顿 - 莱布尼兹公式成立.若 f 在 $[a,b]$ 上处处可微且 $f' \in L^1[a,b]$,则式(3-2)必成立.

(3) 为常数的条件　设 $f \in AC$.则 $f \equiv \text{const} \Leftrightarrow f' = 0,\text{a.e.}$.

例 4　设 $g \in L^1[a,b]$,$\forall c \in [a,b]$,有 $\int_a^c g(x)\mathrm{d}x = 0$,则 $g = 0,\text{a.e.}$.

证　由式(3-1),对几乎所有 $x \in [a,b]$ 有

$$g(x) = \left[\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right]' = 0.$$

例 5　设 $\alpha > 1$,则例 3 中的 f 绝对连续.

证　当 $\alpha > 1$ 时 $f' \in L^1[0,1]$.因 $f'(x)$ 在 $(0,1]$ 上连续,故当 $0 < a < x \leqslant 1$ 时成立

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

令 $a \to 0$ 得 $f(x) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t(0 \leqslant x \leqslant 1)$,可见 $f \in AC[0,1]$.

3.2.3　勒贝格点

设 f 是区间 J 上的可测函数.若 $x \in J$,

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y) - f(x)|\,\mathrm{d}y = 0,$$

则称 x 为 f 的**勒贝格点**.f 的勒贝格点之全体称为勒贝格集,记作 L_f.勒贝格点有以下性质.

(1) 若 $f \in L^1[a,b]$,$x \in L_f$,则

$$\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]' = f(x).$$

但 $x \in L_f$ 并非上式成立的必要条件.

(2) 若 f 在点 x 连续,则 $x \in L_f$.

(3) 若 $f \in L^1[a,b]$,则几乎每点 $x \in [a,b]$ 是 f 的勒贝格点.由此推出式(3-1).

3.2.4　利普希茨函数

设 $D \subset \mathbf{R}^n$,f 是定义在 D 上的有限实(或复)函数.若存在常数 $L > 0$,使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y| \quad (x,y \in D), \tag{3-3}$$

则称 f 为 D 上的**利普希茨函数**.若 f 在每点 $x \in D$ 的某邻域内是利普希茨函数,则

称 f 为局部利普希茨函数. 以 $\mathrm{Lip}(D)$ 记 D 上的利普希茨函数之全体. 利普希茨函数有以下性质.

(1) 运算性质　设 $f,g\in \mathrm{Lip}(D)$. 则 $f\pm g$, $|f|\in \mathrm{Lip}(D)$; 当 f,g 有界时有 $fg\in \mathrm{Lip}(D)$; 当 $|f(x)|\geqslant \delta>0$(δ 是常数) 时 $1/f\in \mathrm{Lip}(D)$.

(2) 连续性　若 $f\in \mathrm{Lip}(D)$, 则 f 在 D 上一致连续; 若 $f\in \mathrm{Lip}[a,b]$, 则 $f\in AC[a,b]$.

(3) 可微性　若 $f\in \mathrm{Lip}[a,b]$, 或 f 在开集 D 内为局部利普希茨函数, 则 f 几乎处处可微.

(4) 若 f 在 $[a,b]$ 上可微且 $f'(x)$ 有界, 则 $f\in \mathrm{Lip}[a,b]$.

已知的几类函数的相互关系如下:

$$C^1[a,b]\subset \mathrm{Lip}[a,b]\subset AC[a,b]\subset V[a,b],$$

其中 $C^1[a,b]$ 记 $[a,b]$ 上的连续可微函数之全体. 下面举例说明上述的包含都是真包含.

例 6　设 $f(x)=|x|$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可微. 另一方面, 可验证 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$. 这表明对 $a<0<b$ 有 $C^1[a,b]\neq \mathrm{Lip}[a,b]$.

例 7　设 $f(x)$ 依例 3, $1<\alpha<2$. 例 5 已说明 $f\in AC[0,1]$. 另一方面, 对 $x_n=\frac{1}{n\pi}$, $y_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}$ 有

$$\left|\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}\right|=\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^{\alpha-1}\cdot 2n\to\infty\quad(n\to\infty),$$

这推出 $f\notin \mathrm{Lip}[0,1]$. 因此 $\mathrm{Lip}[0,1]\neq AC[0,1]$.

例 1 中的函数 $f(x)$ 是连续增函数, 从而是连续有界变差函数. 但它不满足牛顿 - 莱布尼兹公式, 因此不绝对连续. 这表明 $AC[a,b]\neq V[a,b]$.

3.2.5　凸函数

若 $D\subset \mathbf{R}^n$ 有性质: $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$, $t\in[0,1]$, 有 $(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}\in D$, 则称 D 为凸集. 若 f 是定义在凸集 D 上的有限实函数, 满足

$$f((1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y})\leqslant(1-t)f(\boldsymbol{x})+tf(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D,\ t\in[0,1],\qquad(3\text{-}4)$$

则称 f 为**凸函数**. 凸函数有以下性质.

(1) 若 f 是 $D\subset \mathbf{R}^n$ 上的凸函数, 则 f 在 D 内部为局部利普希茨函数, 因而在 D 内部几乎处处可微. 若 f 在 D 内部处处可微, 则必连续可微.

(2) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续凸函数, 在 (a,b) 内可微, 则 $f'(x)$ 在 (a,b) 内连续, $f\in AC[a,b]$, $f'(x)$ 是单调增函数.

(3) 若 f 为凸函数, 则对定义域的点 x_i 与 $\lambda_i\in[0,1]$ $(1\leqslant i\leqslant k)$, 当 $\sum\lambda_i=1$ 时

$$f\left(\sum\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum\lambda_i\, f(x_i).$$

(4) 若 f_i 是 $D\subset \mathbf{R}^n$ 上的凸函数, $\lambda_i\geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 则 $\sum\lambda_i f_i$ 是 D 上的凸函数.

4　测度与积分的进一步推广

4.1　广义测度

设$(X,\mathscr{A})$是给定的可测空间.若$A_n \in \mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$互不相交,$A=\bigcup A_n$,则约定说$\{A_n\}$是$A$的一个分解.每个分解可看做无限分解,例如$A\cup B = A\cup B \cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$.

4.1.1　广义测度概念

(1) 实测度　若$\nu:\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}=[-\infty,\infty]$是一集函数,$\nu\varnothing=0$;对任给$A\in\mathscr{A}$与$A$的任一分解$\{A_n\}$,有$\nu(A)=\sum\nu(A_n)$(注意,这一条件蕴涵右端恒有意义且与项的顺序无关),则称ν为X上的**实测度**.为区别起见,称1.3.1中所述的测度为**正测度**.

(2) 复测度　若函数$\nu:\mathscr{A}\to\mathbf{C}$满足$\nu(A)=\sum\nu(A_n)$,其中$\{A_n\}$是$A$的任一分解,则称$\nu$为$X$上的**复测度**.显然,$\nu$是复测度的充要条件是$\nu=\nu_1+\mathrm{i}\nu_2$,$\nu_1,\nu_2$是有限实测度.

实测度与复测度统称为**广义测度**,以$M(X)$记X上的广义测度之全体.

例1　设μ是X上的正测度,$f\in L^1(X,\mu)$.定义

$$\nu(A)=\int_A f\mathrm{d}\mu, A\in\mathscr{A}. \tag{4-1}$$

由积分的完全可加性(2.1.2),知$\nu\in M(X)$.若$f\geqslant 0$,则ν是正测度.

例2　取定$x_0\in X$,$c\in\mathbf{R}$(或$c\in\mathbf{C}$),任给$A\in\mathscr{A}$,当$x_0\in A$时令$\nu(A)=c$;当$x_0\in A$时令$\nu(A)=0$.则$\nu\in M(X)$,称ν为"集中于x_0"的测度.

4.1.2　广义测度的性质

(1) 运算性质　若$\mu,\nu\in M(X)$,α,β是常数,则$\alpha\mu+\beta\nu\in M(X)$(但出现$\infty$、$-\infty$的情况例外).

(2) 可减性　任给$\nu\in M(X)$,$A,B\in\mathscr{A}$,当$A\subset B$,$|\nu A|<\infty$时有$\nu(B\setminus A)=\nu(B)-\nu(A)$.特别,$\nu(A^c)=\nu(X)-\nu(A)$.但须注意,$A\subset B$不必推出$\nu(A)\leqslant\nu(B)$!

(3) 连续性　若$\nu\in M(X)$,$A_n\in\mathscr{A}$,$A_1\subset A_2\subset\cdots$,$A=\bigcup A_n$(或$A_1\supset A_2\supset\cdots$,$A=\bigcap A_n$,$|\nu A_1|<\infty$),则$\nu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\nu(A_n)$.

若ν依例1,则ν的连续性正是积分的上连续性与下连续性(参看2.1.3).

4.1.3　变差与全变差

设$\nu\in M(X)$.

(1) 全变差　任给 $A \in \mathscr{A}$,定义

$$|\nu|(A) = \sup\{\sum |\nu(A_n)| : \{A_n\} \text{ 是 } A \text{ 的分解}\},$$

则 $|\nu|$ 是 X 上的一个正测度,称为 ν 的全变差. $|\nu|$ 有性质: $|\nu(A)| \leqslant |\nu|(A)(A \in \mathscr{A})$,且 $|\nu|$ 是有此性质的最小正测度.

(2) **正变差与负变差**　若 ν 是实测度,任给 $A \in \mathscr{A}$,令

$$\nu^+ A = \sup_{A \supset B \in \mathscr{A}} \nu B, \ \nu^- A = (-\nu)^+ A. \tag{4-2}$$

分别称 ν^+ 与 ν^- 为 ν 的正变差与负变差,二者都是 $\mathscr{A}$ 上的正测度,而且 $\nu^+ + \nu^- = |\nu|$.

(3) 约当分解　若 ν 是实广义测度,则有 $\nu = \nu^+ - \nu^-$,称它为 ν 的约当(Jordan)**分解**.若 $\lambda = \mu + \mathrm{i}\nu$ 是复测度,则由约当分解有

$$\lambda = \mu^+ - \mu^- + \mathrm{i}(\nu^+ - \nu^-). \tag{4-3}$$

利用上述分解,可将关于正测度的某些概念与结论推广到广义测度.

例 3　设 ν 依例 1,其中 f 是实可积函数.则可指明

$$|\nu|(A) = \int_A |f| \mathrm{d}\mu; \quad \nu^+ A = \int_A f^+ \mathrm{d}\mu;$$

$$\nu^- A = \int_A f^- \mathrm{d}\mu (A \in \mathscr{A}).$$

于是约当分解 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ 正好对应函数 f 的分解 $f = f^+ - f^-$.

4.1.4 哈恩分解

设 ν 是 $\mathscr{A}$ 上的实广义测度.

(1) 正集与负集　若 $B \in \mathscr{A}$,对 B 的任何可测子集 A 有 $\nu A \geqslant 0 (\nu A \leqslant 0)$,则说 B 是 ν 的**正集(负集)**.显然,B 是 ν 的正集相当于:ν 限制在 B 上(即限制在 $\{A \in \mathscr{A}: A \subset B\}$ 上)是正测度.

(2) **哈恩分解**　若有正集 P 与负集 N,使 $X = P \cup N, P \cap N = \varnothing$,则称 $X = P \cup N$ 为哈恩分解.哈恩分解必定存在,且在以下意义上是唯一的:若 $X = P \cup N = P_1 \cup N_1$ 是两个哈恩分解,则对任给 $A \in \mathscr{A}$ 有

$$\nu(A \cap P) = \nu(A \cap P_1) = \nu^+ A;$$

$$\nu(A \cap N) = \nu(A \cap N_1) = -\nu^- A.$$

粗略地说,$X = P \cup N$ 是哈恩分解意味着 P 与 N 分别为最大的正集与负集.对于例 3 中的 ν,取 $P = X(f \geqslant 0), N = X(f < 0)$,则显然 $X = P \cup N$ 即为一个哈恩分解.

4.1.5 绝对连续性

若 $\mu, \nu \in M(X)$,当 $|\mu|(A) = 0$ 时恒有 $\nu A = 0$,则说 ν 对于 μ 绝对连续,记作 $\nu \ll \mu$.关于绝对连续有以下结论.

(1) 等价性　$\nu \ll \mu \Leftrightarrow \nu^+ \ll \mu$ 且 $\nu^- \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll |\mu|$.

(2) 自反性与可传性　$\mu \ll \mu; \nu \ll \mu \ll \lambda \Rightarrow \nu \ll \lambda$.

(3) 若 $\nu \ll \mu$ 且 ν 是有限的,则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$,使得当 $|\mu|(A) < \delta$ 时恒有 $|\nu|(A) < \epsilon$. 这一事实可示意性地写作

$$\lim_{|\mu|(A)\to 0} |\nu|(A) = 0.$$

若 ν, μ 依例1,则显然 $\nu \ll \mu$,且 ν 的绝对连续性正好对应积分的绝对连续性.(见2.1.4). 若 ν 依例2, $X = \mathbf{R}^n, c \neq 0$,则 ν 对于 m 不绝对连续.

4.1.6 拉东-尼古东姆导数

设 $\nu, \mu \in M(X), \mu \geqslant 0$. 若存在 X 上的可测函数 f,使得 $\forall A \in \mathscr{B}$,有 $\nu A = \int_A f\mathrm{d}\mu$,则称 f 为 ν 对于 μ 的**拉东-尼古东姆导数**,简称为R-N导数,记作 $f = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$ 或 $\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu$. R-N导数具有以下性质.

(1) 唯一性　若 $\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu$,且 $\mathrm{d}\nu = g\mathrm{d}\mu$,则 $f = g, \mu$ - a.e..

(2) 线性规则　若 $\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu, \mathrm{d}\lambda = g\mathrm{d}\mu, \alpha, \beta$ 是常数, $\alpha\nu + \beta\lambda$ 与 $\alpha f + \beta g$ 有意义,则 $\mathrm{d}(\alpha\nu + \beta\lambda) = (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}\mu$,即

$$\frac{\mathrm{d}(\alpha\nu + \beta\lambda)}{\mathrm{d}\mu} = \alpha\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} + \beta\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}. \tag{4-4}$$

(3) 链规则　设 $\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\lambda, \mathrm{d}\lambda = g\mathrm{d}\mu$,则 $\mathrm{d}\nu = fg\mathrm{d}\mu$,即

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}, \quad u - \text{a.e.}. \tag{4-5}$$

(4) 若 $\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu$,则 $\mathrm{d}|\nu| = |f|\mathrm{d}\mu, \mathrm{d}\nu^+ = f^+\mathrm{d}\mu, \mathrm{d}\nu^- = f^-\mathrm{d}\mu$,即

$$\frac{\mathrm{d}|\nu|}{\mathrm{d}\mu} = \left|\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right|, \mu - \text{a.e.}; \tag{4-6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\nu^+}{\mathrm{d}\mu} = \left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right)^+, \mu - \text{a.e.}, \frac{\mathrm{d}\nu^-}{\mathrm{d}\mu} = \left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right)^-, \mu - \text{a.e.}. \tag{4-7}$$

式(4-7)用于 ν 是实广义测度的情况.

(5) 极分解　设 ν 是复测度,则 $f = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|$ 恒存在,且 $|f| = 1, |\nu|$ - a.e.. 因此可写成

$$\mathrm{d}\nu = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}|\nu|,$$

其中 θ 是实可测函数. 称上式为 ν 的极分解.

(6) 拉东-尼古东姆定理　设 $\mu, \nu \in M(X)$ 都是 σ-有限的, $\nu \ll \mu$ 且 $\mu \geqslant 0$,则 $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$ 存在.

4.1.7 对广义测度的积分

设 $\nu \in M(X), f \in L(X, |\nu|)$,则称

$$\int_X f\mathrm{d}\nu = \int_X f\mathrm{d}\nu^+ - \int_X f\mathrm{d}\nu^- \tag{4-8}$$

为 f 对广义测度 ν 的积分. 这种积分有以下性质.

1° 若 $\nu = \lambda - \mu, \lambda, \mu$ 是正测度, $f \in L^1(X, \lambda + \mu)$,则

$$\int_X f\mathrm{d}\nu = \int_X f\mathrm{d}\lambda - \int_X f\mathrm{d}\mu. \tag{4-9}$$

(2) 双线性性 $\int_X f\mathrm{d}\nu$ 分别对f与ν是线性的,即对$\mu,\nu\in M(X)$,常数α,β有

$$\int_X(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}\nu=\alpha\int_X f\mathrm{d}\nu+\beta\int_X g\mathrm{d}\nu;$$

$$\int_X f\mathrm{d}(\alpha\mu+\beta\nu)=\alpha\int_X f\mathrm{d}\mu+\beta\int_X f\mathrm{d}\nu,$$

假定其中所出现的积分皆存在.

(3)σ-可加性 若$A_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$互不相交,$A=\bigcup A_n$,$\nu\in M(X)$,$f\in L^1(X,|\nu|)$,则

$$\int_A f\mathrm{d}\nu=\sum\int_{A_n}f\mathrm{d}\nu.$$

(4) 设$\nu\in M(X)$,$f\in L^1(X,|\nu|)$,则

$$\left|\int_X f\mathrm{d}\nu\right|\leqslant\int_X|f|\mathrm{d}|\nu|.$$

(5) 连续性 若$A_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,$A_1\subset A_2\subset\cdots$,$A=\bigcup A_n$(或$A_1\supset A_2\supset\cdots$,$A=\bigcap A_n$),$\nu\in M(X)$,$f\in L^1(X,|\nu|)$,则

$$\int_A f\mathrm{d}\nu=\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}f\mathrm{d}\nu.$$

(6) 控制收敛定理 设$\nu\in M(X)$,$|f_n|\leqslant g\in L^1(X,|\nu|)(n=1,2,\cdots)$,$f_n\to f$,$|\nu|$-a.e.,则$f\in L^1(X,|\nu|)$,且

$$\int_X f\mathrm{d}\nu=\lim_n\int_X f_n\mathrm{d}\nu.$$

4.2 斯蒂尔切斯积分

4.2.1 勒贝格-斯蒂尔切斯测度

以下设$-\infty<a<b<\infty$,对$[a,b]$上的任何实函数f,约定在$(-\infty,a]$上$f(x)=f(a)$,在(b,∞)上$f(x)=f(b)$.

(1) 增函数生成的测度 设φ是$[a,b]$上的增函数.对有限开区间$\Delta=(\alpha,\beta)\subset\mathbf{R}$,约定$\mu\Delta=\varphi(\beta^-)-\varphi(\alpha^+)$;而$\mu(\alpha,\infty)=\varphi(b)-\varphi(\alpha^+)$,$\mu(-\infty,b)=\varphi(b^-)-\varphi(a)$.若$G=\bigcup\delta_k\subset\mathbf{R}$是开集,$\delta_k$是构成区间,则令$\mu G=\sum_k\mu\delta_k$,约定$\mu\varnothing=0$.定义外测度$\mu^*$为:

$$\mu^*A=\inf\{\mu G:G\supset A,G\text{ 为开集}\},A\subset\mathbf{R}$$

规定当且仅当

$$\mu^*B=\mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\setminus A)\ (\forall B\subset\mathbf{R})$$

满足时,$A\subset\mathbf{R}$为μ-可测.则

$$\mathscr{A}_\varphi=\{A:A\text{ 为}\mu\text{-可测}\}$$

是一σ-代数;对每个$A\in\mathscr{A}_\varphi$定义$\mu A=\mu^*A$,则μ是$\mathscr{A}_\varphi$上的一个测度,称为由

函数 φ 生成的测度,记作 μ_φ.

(2) 有界变差函数生成的测度　设 g 是 $[a,b]$ 上的实有界变差函数,p,n 分别为 $g(x)-g(a)$ 的正变差与负变差,μ_p 与 μ_n 分别为 p 与 n 生成的测度,二者分别定义在 $\mathscr{A}_p$ 与 $\mathscr{A}_n$ 上.令 $\pi=p+n$,μ_π 是 π 生成的测度,它定义在 $\mathscr{A}_\pi$ 上.则 $\mathscr{A}_\pi=\mathscr{A}_p\cap\mathscr{A}_n$,$\mu_\pi=\mu_p+\mu_n$,$\nu=\mu_p-\mu_n$ 是定义在 $\mathscr{A}_\pi$ 上的实广义测度,称它为 g 生成的勒贝格-斯蒂尔切斯(Lebesgue-Stieltjes)测度,简称为**LS测度**.区间的 ν 测度值如下:

$$\nu(\alpha,\beta)=g(\beta^-)-g(\alpha^+);$$
$$\nu\{\alpha\}=g(\alpha^+)-g(\alpha^-);$$
$$\nu[\alpha,\beta]=g(\beta^+)-g(\alpha^-).$$

因 $\nu(R)=g(b)-g(a)$,ν 是有限测度.

4.2.2　勒贝格-斯蒂尔切斯积分

设 g 是 $[a,b]$ 上的实有界变差函数,ν 是 g 生成的勒贝格-斯蒂尔切斯测度.对每个 $f\in L^1(|\nu|)$,定义

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=\int_a^b f\mathrm{d}\nu,$$

其中右端积分依式(4-8).称 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 为 f 对 g 的勒贝格-斯蒂尔切斯积分,简称为**LS积分**.LS积分有以下性质.

(1) 设 μ_p,μ_n,μ_π 如4.2.1,$f\in L^1(\mu_\pi)$,则 $f\in L^1(|\nu|)$,且

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=\int_a^b f\mathrm{d}\mu_p-\int_a^b f\mathrm{d}\mu_n.$$

(2) 线性性　若 $f,\varphi\in L^1(|\nu|)$,α,β 为常数,则

$$\int_a^b(\alpha f+\beta\varphi)\mathrm{d}g=\alpha\int_a^b f\mathrm{d}g+\beta\int_a^b\varphi\mathrm{d}g.$$

(3) 可加性　若 $f\in L^1(|\nu|)$,$a<c<b$,g 在 c 连续,则

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=\int_a^c f\mathrm{d}g+\int_c^b f\mathrm{d}g.$$

(4) 设 $f\in L^1(|\nu|)$,$|f|\leqslant\beta$,则

$$\left|\int_a^b f\mathrm{d}g\right|\leqslant\beta\bigvee_a^b(g).$$

(5) 控制收敛定理　设 $f_n\in L^1(|\nu|)$,$f_n\to f$,$|\nu|$-a.e..若存在 $h\in L^1(|\nu|)$,使得 $|f_n|\leqslant h(n=1,2,\cdots)$,则 $f\in L^1(|\nu|)$,且

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\mathrm{d}g.$$

(6) 设 $f\in L^1(|\nu|)$,$g\in AC$,则

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=\int_a^b fg'\mathrm{d}m.$$

4.2.3 黎曼-斯蒂尔切斯积分

设 f,g 是区间 $[a,b]$ 上的有限实(或复)函数.任意地取点 $x_i,\xi_i\in[a,b]$,使得

$$a=x_0\leqslant\xi_1\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant\xi_n\leqslant x_n=b;$$

令 $\Delta g(x_i)=g(x_i)-g(x_{i-1}),\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$.若

$$I=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta g(x_i)$$

存在且与点 x_i,ξ_i 的取法无关,则称 I 为 f 关于 g 在 $[a,b]$ 上的黎曼-斯蒂尔切斯积分,简称 **RS 积分**,记作 $\int_a^b f\mathrm{d}g$.RS 积分有以下性质.

(1) 分部积分公式　若积分 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 与 $\int_a^b g\mathrm{d}f$ 之一存在,则另一个亦必存在,且成立

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=fg\Big|_a^b-\int_a^b g\mathrm{d}f.\tag{4-10}$$

(2) 积分存在的充分条件　若 f 连续,g 有界变差,则积分 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 与 $\int_a^b g\mathrm{d}f$ 皆存在.

(3) 与 LS 积分的关系　若 g 是实有界变差函数,f 关于 g 的 RS 积分存在,则 LS 积分必存在且两种积分值相等.对于 $f\in C[a,b],g\in V[a,b]$,RS 积分 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 可看做 LS 积分.

(4) 积分收敛定理　若 $f_n\in C[a,b],f_n\rightrightarrows f,g\in V[a,b]$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\mathrm{d}g=\int_a^b f\mathrm{d}g.$$

若 $f\in C[a,b]$, $\bigvee\limits_a^b(g_n)\leqslant K<\infty(n=1,2,\cdots),g_n\to g$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\mathrm{d}g_n=\int_a^b f\mathrm{d}g.$$

参 考 文 献

1 Натансон, И. П. 实变函数论. 北京:人民教育出版社, 1958.
2 郑维行等. 实变函数与泛函分析概要:第一册. 第二版. 北京:高等教育出版社, 1989.
3 夏道行等. 实变函数与泛函分析:上册. 北京:人民教育出版社, 1978.
4 Rudin W. Real and complex analysis. 2ed. New York: McGraw-Hill, 1974.
5 周民强. 实变函数. 北京:北京大学出版社, 1985.

·经典数学卷·

第 8 篇

特殊函数

编　者　张学元
审校者　黄力民

目　录

引　言

作为微分方程的内容之一,特殊函数只不过是指某类微分方程的解由于不能用初等函数来表示而引进的级数形式解而已.然而,这样定义的特殊函数因其应用的广泛性和有效性,而成为理论物理工作者、现代科技工作者在解决实际问题时不可取代的数学工具.

特殊函数的种类很多,本篇将有选择地介绍在现代科技中常遇到的一些特殊函数,首先介绍几个由特定形式积分所定义的函数(如 Γ 函数等),以作为其他特殊函数的基础,它们与微分方程无关.然后介绍由级数定义的一些特殊函数,这些函数的主要特点是从它们所满足的微分方程的奇点来考虑的(如贝塞尔函数等).本篇力求包括常用的主要的特殊函数的运算方法和基本特性,使读者能从中得到处理特殊函数的基本方法,以增强在工作中灵活运用的能力.

由于计算技术的迅速发展,特殊函数的理论和计算便成为近代分析的许多分支及力学、物理学中不可缺少的工具.

1　由积分定义的特殊函数

1.1　Γ 函　数

1.1.1　Γ 函数的概念

在微积分中,称含实参变量 x 的积分

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt \quad (x>0) \tag{1-1}$$

为 Γ(伽马)函数(第二类欧拉积分).上式右边积分收敛的条件是 $x>0$.所以(1-1)式只定义了 $x>0$ 的 Γ 函数.

由(1-1)式,对 $\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x}dt$ 进行分部积分可得**递推公式**

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$$

即

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1). \tag{1-2}$$

特别,当 x 为正整数 n 时,则从(1-2)式得

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)=n!.$$

这样,Γ 函数可视为阶乘的推广.故在一般情况下也记为 $x!=\Gamma(x+1)$.

利用递推公式可把 Γ 函数向 $x<0$ 的区间延拓.例如,对于区间 $(-n,-n+1)$

$(n\in \mathbf{N})$上的 x,定义

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\Gamma(x+n),\tag{1-3}$$

$x+n$ 在区间$(0,1)$上,上式右边的 $\Gamma(x+n)$按(1-1)式是有定义的.但值得注意的是,由(1-2)式,有

$$\Gamma(0)=\frac{1}{0}\Gamma(1)=\infty,$$

$$\Gamma(-n)=-\frac{\Gamma(-n+1)}{n}=\cdots=(-1)^n\frac{\Gamma(0)}{n!}=\infty\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

(1-1),(1-2),(1-3)式定义了实变数 x 的 Γ 函数,这定义可延拓到整个复数 z 平面上,即复变数 z 的 Γ 函数定义为

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t,\tag{1-4}$$

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\quad 或\quad z!=z\cdot(z-1)!,\tag{1-5}$$

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\quad(\mathrm{Re}(z+n)>0).\tag{1-6}$$

1.1.2　Γ 函数的性质

1. Γ 函数的留数

由(1-6)式可看出 $\Gamma(z)$是一个半纯函数,它在有限区域内的奇点都是一阶极点,极点为 $z=-n(n=0,1,2,\cdots)$.在极点 $z=-n$ 处的留数为

$$\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)=\left.\frac{\Gamma(z+n-1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\right|_{z=-n}=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

2. 欧拉无穷乘积公式

根据极限关系 $\mathrm{e}^{-t}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ 可以把 $\Gamma(z)$作为下列积分

$$P_n(z)=\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\mathrm{d}t\quad(n\to\infty).\tag{1-7}$$

的极限.

在 $P_n(z)$中,令 $t=n\tau$,并用分部积分积分 n 次,得

$$\begin{aligned}P_n(z)&=n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\mathrm{d}\tau\\&=n^z\left[\frac{\tau^z}{z}(1-\tau)^n\right]_0^1+\frac{n^z\cdot n}{z}\int_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z\mathrm{d}\tau\\&\cdots\\&=\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}n^z.\end{aligned}$$

因此

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}.\tag{1-8}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(z+n)}=1$，故上式又可写为

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}. \tag{1-9}$$

(1-9)式中的最后一个因子可写为

$$n^z=\prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^z,$$

前面的因子可写为

$$\frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}.$$

因此得到欧拉无穷乘积公式

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\right]. \tag{1-10}$$

(1-8) 式中最后一个因子也可写成

$$n^z=\exp(z\ln n)=\exp\left\{z\left[\ln n-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\right\}\prod_{m=1}^{n}e^{z/m}.$$

由此得

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right], \tag{1-11}$$

其中 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n\right\}=0.5772156649015328606065l\cdots$，$\gamma$ 名为**欧拉常数**. 这个无穷乘积给出了任何 z 的 $\Gamma(z)$，同时指明了 $\Gamma(z)$ 的奇点为一阶极点 $z=0,-1,-2,\cdots$，而没有零点，这是魏尔斯特拉斯(Weierstrass) 给予 $\Gamma(z)$ 的定义，故名为魏氏乘积.

3. $\Gamma(z)$ 与三角函数的关系

由魏尔斯特拉斯对 $\Gamma(z)$ 的定义得

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(-z)&=-\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)^{z/n}\right\}^{-1}\\&=-\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

而 $\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$，故有

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{z\sin\pi z}. \tag{1-12}$$

由(1-5) 式知 $\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z)$，因此又有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}, \tag{1-13}$$

或者写成下列对称形式

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = z!(-z)! = \frac{\pi z}{\sin \pi z}. \tag{1-14}$$

在(1-13)式中令 $z=\frac{1}{2}$,得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

又在$\frac{\sin \pi z}{\pi z}$的无穷乘积中令$z=\frac{1}{2}$,得

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{m\to\infty}\left(\prod_{n=1}^{m}\frac{2n}{2n-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{2m+1}. \tag{1-15}$$

这是瓦利(Wallis)乘积.

4. 乘积公式

由极限公式(1-9)可证

$$\phi = \frac{n^{nz}}{n\Gamma(nz)}\prod_{r=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{r}{n}\right) \tag{1-16}$$

与 z 无关,特别令 $z=\frac{1}{n}$,得

$$\phi = \prod_{r=0}^{n-1}\Gamma\left(\frac{r+1}{n}\right) = \prod_{r=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{r}{n}\right) = \prod_{r=1}^{n-1}\Gamma\left(1-\frac{r}{n}\right).$$

由(1-13)式,得

$$\phi^2 = \prod_{r=1}^{n-1}\left\{\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\} = \pi^{n-1}\prod_{r=1}^{n-1}\left(\sin\frac{\pi r}{n}\right)^{-1}.$$

令 $z^n-1=0$的根为 $z=e^{2\pi ri/n}$　$(r=0,1,2,\cdots,n-1)$,则得

$$\frac{z^n-1}{z-1} = \sum_{r=0}^{n-1}z^r = \prod_{r=1}^{n-1}(z-e^{2\pi ri/n}),$$

令 $z=1$,则得

$$n = \prod_{r=1}^{n-1}(1-e^{2\pi ri/n}) = \prod_{r=1}^{n-1}e^{\pi ri/n}\left(-2i\sin\frac{\pi r}{n}\right) = 2^{n-1}\prod_{r=1}^{n-1}\sin\frac{\pi r}{n},$$

由此得

$$\phi^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}.$$

取平方根,代入(1-16)式,即得Γ函数的乘积公式

$$\prod_{r=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{r}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz). \tag{1-17}$$

特别令 $n=2$,得倍数公式

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right),$$

这又可写成

$$2^{2z}z!\left(z-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}(2z)!.$$

5. 围道积分

围道积分
$$I=\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t,$$
其中围道是从上半平面挨近正实数无穷远处出发，向左行，围绕原点正向一周，到下半平面，再向右行到下半平面挨近正实轴无穷远处（见图1-1）。

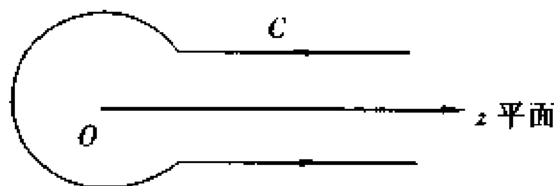


图 1-1

这个围道积分适用于任意 z 值，可以作为对 $\Gamma(z)$ 在任意的 z 值下定义的基础. 先设 z 的值被限制在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 的范围内且不等于整数，这时，这个围道积分与 $\Gamma(z)$ 有如下关系
$$\Gamma(z)=-\frac{1}{2\mathrm{i}\sin\pi z}\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}(-t)^{z-1}\mathrm{d}t\quad(|\arg(-t)|<\pi).\tag{1-18}$$
这个关系是在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 的条件下得到的，但按解析开拓原理，这一条件可以取消. 这个关系可不适用于 z 是整数的情形，因为当 z 是正整数时，(1-18)式的右边是一个未定式，当 z 为负整数时，右边为无穷大. 但由(1-13)式得
$$\frac{1}{\Gamma(1-z)}=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}(-t)^{z-1}\mathrm{d}t\quad(|\arg(-t)|<\pi),\tag{1-19}$$
这个表达式适用于任意 z 值，包括 z 为整数.

把(1-19)式中的 $1-z$ 换成 z，得
$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}(-t)^{-z}\mathrm{d}t\quad(|\arg(-t)|<\pi),\tag{1-20}$$
再把 t 换成 $-t$，得
$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{(0+)}e^{t}t^{-z}\mathrm{d}t\quad(|\arg t|<\pi),\tag{1-21}$$
其中的围道从负实轴无穷远处（$t=-\infty$）出发，正向绕原点一周，再回到出发点.

上面(1-18)～(1-21)各式中的围道可以整个地绕原点转一角度 α，只要 $|\alpha|<\frac{\pi}{2}$，围道积分之值不变. 例如，由(1-21)式得
$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty e^{\mathrm{i}\alpha}}^{(0+)}e^{t}t^{-z}\mathrm{d}t\quad(|\arg t-\alpha|<\pi).$$

6. Γ 函数的对数微商

令 $\ln\Gamma(z)$ 的一阶导数为 $\psi_1(z)$：
$$\psi_1(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$
由(1-5)式取对数微商，得
$$\psi_1(z+1)=\psi_1(z)+\frac{1}{z},$$
由(1-13)式取对数微商，得

$$\psi_1(1-z)=\psi_1(z)+\pi\cot\pi z,$$

由(1-6)式取对数微商,得

$$\psi_1(z+n)=\psi_1(z)+\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{z+r}.$$

由(1-11)式求得

$$\psi_1(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right),\tag{1-22}$$

其中 γ 为欧拉常数.

在(1-22)式中令 $z=m$(整数),得

$$\psi_1(m)=\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right]_{z=m}=-\gamma+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n}.$$

作为上式的一个特殊情形:

$$\psi_1(1)=\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right]_{z=1}=-\gamma.$$

$\ln\Gamma(z)$ 的二阶导数记为 $\psi_2(z)$,n 阶导数记为 $\psi_n(z)$,即

$$\psi_2(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+z)^2},$$

$$\psi_n(z)=(-1)^n(n-1)!\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+z)^n}.$$

对于 $\ln\Gamma(z)$ 有如下第一、第二比涅(Biner)公式:

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\int_0^{+\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right\}\frac{e^{-zt}}{t}dt\quad(\operatorname{Re}z>0),$$

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+2\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t/z)}{e^{2\pi t}-1}dt.$$

7. 渐近展开式

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}B_r}{2r(2r-1)}z^{-2r+1}+O(z^{-2n-1})\tag{1-23}$$

(B_r 为伯努利数),

或

$$\ln z!=z(\ln z-1)+\frac{1}{2}\ln(2\pi z)+\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1260z^5}-\frac{1}{1680z^7}+\cdots,\tag{1-24}$$

$$z!\backsim z^z e^{-z}(2\pi z)^{1/2}\left\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}+\cdots\right\}.\tag{1-25}$$

当 $z=x$ 为正实数时,有

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}[1+r(x)],$$

其中$|r(x)|\leqslant\exp\left(\frac{1}{12x}\right)-1$.

$$n!\approx\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\quad(n\to\infty).$$

公式(1-23),(1-24),(1-25)称为**斯特林**(Stirling)公式.

1.2　欧拉第一类积分、B函数

1.2.1　定义和基本关系式

(1) 称定积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{1-26}$$

为**欧拉第一类积分**,其中参变量p,q必须要求$\mathrm{Re}(p)>0,\mathrm{Re}(q)>0$,以保证上述积分收敛.

(2) 由定义引出的基本关系式:

1° 作变换$x=1-t$,可以证明

$$B(p,q)=B(q,p). \tag{1-27}$$

2° $B(p,q)$可以用Γ函数表达,即

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1-28}$$

为了证明公式(1-28),考虑

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{p-1}du\int_0^{+\infty}e^{-v}v^{q-1}dv,$$

令$u=x^2,v=y^2$,得

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty}e^{-x^2}x^{2p-1}dx\int_0^{+\infty}e^{-y^2}y^{2q-1}dy$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy.$$

引进平面极坐标:$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,得

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta. \tag{1-29}$$

在第一个积分中,令$r^2=t$,得

$$\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{p+q-1}dt=\frac{1}{2}\Gamma(p+q), \tag{1-30}$$

在第二个积分中,令$\cos^2\theta=x$,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{1}{2}B(p,q). \tag{1-31}$$

将(1-30),(1-31)式代入(1-29)式就得到(1-28)式.

由(1-28)式及解析开拓原理，可得到不受条件 $\mathrm{Re}(p)>0,\mathrm{Re}(q)>0$ 限制的函数称为 B 函数(贝塔函数).

(3) 由上述基本关系可导出一系列重要公式，例如：

1° $\mathrm{B}(m,n)=\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\quad(m,n\in\mathbf{N})$,

是(1-28)式当 $p=m,q=n$ 时的特殊情形.

2° $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^p(\sin\theta)^q\mathrm{d}\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}-1\right)},$$

是(1-31)式应用(1-28)式的特殊情形.其中 $2p$ 和 $2q$ 分别换为 $p+1$ 和 $q+1$.

3° $$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r^p\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right),\tag{1-32}$$

是(1-30)式的特殊情形.其中 $2(p+q)-1$ 换成 p.

4° $$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

是(1-32)式当 $p=0$ 时的特殊情形.

5° $$\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t=\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\tag{1-33}$$

是(1-26)式的特殊情形，其中 $x=t/(1+t)$.

6° $$\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p},$$

是(1-33)式当 $q=1-p$ 时的特殊情形.

1.2.2 狄利克雷积分

作为 B 函数的一个应用，考虑狄利克雷(Dirichlet)积分

$$\iint\cdots\int f(t_1+t_2+\cdots+t_n)t_1^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n,$$

其中积分限为 $t_r\geqslant 0(r=1,2,\cdots,n),\sum\limits_{r=1}^{n}t_r\leqslant 1$，$f$ 是连续函数，为了保证积分在 $t_r=0$ 处收敛，必须 $\mathrm{Re}(\alpha_r)>0$.

先计算 t_1,t_2 两重积分，令 $\lambda=t_3+t_4+\cdots+t_n,\tau_2=t_1+t_2$，有

$$\begin{aligned}&\int_0^{1-\lambda}\mathrm{d}t_2\int_0^{1-\lambda-t_2}\mathrm{d}t_1f(t_1+t_2+\lambda)t_1^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}\\&=\int_0^{1-\lambda}\mathrm{d}t_2\int_{t_2}^{1-\lambda}\mathrm{d}\tau_2f(\tau_2+\lambda)(\tau_2-t_2)^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1},\end{aligned}$$

交换积分次序，然后令 $t_2=\tau_2t$，得

$$\begin{aligned}&\int_0^{1-\lambda}\mathrm{d}\tau_2\int_0^{\tau_2}\mathrm{d}t_2f(\tau_2+\lambda)(\tau_2-t_2)^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}\\&=\int_0^{1-\lambda}\mathrm{d}\tau_2f(\tau_2+\lambda)\tau_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}\int_0^1\mathrm{d}t(1-t)^{\alpha_1-1}t^{\alpha_2-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int_0^{1-\lambda} d\tau_2 f(\tau_2+\lambda)\tau_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}.$$

这样就减少了一重积分，而积分的形式不变．再把这个方法用到 τ_2 和 t_3，又可减少一重，而积分前面的因子为

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)},$$

照此作下去，最后得公式

$$\iint\cdots\int f\Big(\sum_{r=1}^n t_r\Big)\prod_{r=1}^n t_r^{\alpha_r-1}dt_1dt_2\cdots dt_n$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)}\int_0^1 f(\tau)\tau^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-1}d\tau.$$

特别当 $f\equiv 1$ 时，有

$$\underset{\substack{t_1,t_2,\cdots,t_n>0\\ \sum_{r=1}^n t_r\leqslant 1}}{\iint\cdots\int}\prod_{r=1}^n t_r^{\alpha_r-1}dt_1dt_2\cdots dt_n = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+1)}.$$

上式的一般情形是

$$\underset{\substack{t_1,t_2,\cdots,t_n>0\\ \sum_{r=1}^n\left(\frac{t_r}{\beta_r}\right)^{\gamma_r}\leqslant 1}}{\iint\cdots\int}\prod_{r=1}^n t_r^{\alpha_r-1}dt_1dt_2\cdots dt_n = \frac{\prod_{r=1}^n\beta_r^{\alpha_r}}{\prod_{r=1}^n\gamma_r}\frac{\prod_{r=1}^n\Gamma\left(\frac{\alpha_r}{\beta_r}\right)}{\Gamma\left(\sum_{r=1}^n\frac{\alpha_r}{\gamma_r}+1\right)}.$$

当 $n=3$（三维空间）时，在三维球体的第一象限中，上式成为

$$\underset{\substack{x,y,z>0\\ \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{b}\right)^\beta+\left(\frac{z}{c}\right)^\gamma\leqslant 1}}{\iiint} x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}dxdydz = \frac{a^pb^qc^r}{\alpha\beta\gamma}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1\right)}. \tag{1-34}$$

在计算规则物体的体积、静矩、惯矩和惯性积时，常应用公式(1-34)．例如，密度为 1 在第一象限的椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1 \quad (\alpha=\beta=\gamma=2)$$

的体积、静力矩、惯性矩和惯性积分别为

1° 体积($p=q=r=1$)

$$V=\frac{abc}{8}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{\pi}{6}abc,$$

2° 对 x 轴的静力矩($p=2,q=r=1$)

$$M_{yz}=\frac{a^2bc}{8}\frac{\Gamma(1)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}=\frac{\pi}{16}a^2bc,$$

3° 对 x 轴的惯性矩($p=3,q=r=1$)

$$I_{yz}=\frac{a^3bc}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{\pi}{36}a^3bc,$$

4° 对 y,z 轴的惯性积($p=1,q=r=2$)

$$K_{yz}=\frac{ab^2c^2}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)[\Gamma(1)]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{1}{15}ab^2c^2.$$

1.3 误差函数(概率积分)

1.3.1 误差函数的定义

复下限积分

$$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kz^{2k+1}}{k!(2k+1)}\quad(|z|<+\infty)$$

称为误差函数(概率积分).它与标准正态分布函数 $\Phi(z)$有如下的关系:

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

误差函数的渐近公式为

$$\mathrm{erf}(z)=1-\frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2z^2)^k}\right]$$

$$\left(|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta,\delta>0,\ |z|\to+\infty\right).$$

如果用这级数的前 n 项的和作为 $\mathrm{erf}(z)$的近似值,则误差为

$$|r_n(z)|\leqslant\frac{(2n+1)!!}{(2z^2)^{n+1}}\sec\delta,$$

当 z 为实数 x 时,误差不超过级数中所略去的第一项的绝对值.

1.3.2 误差函数的应用

误差函数常应用于正态概率计算和求解二阶常系数抛物型偏微分方程的定解问题.

例1 设 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$,求 $p(|\xi-\mu|<\lambda)$.

解 $p(|\xi-\mu|<\lambda)=\int_{-\lambda+\mu}^{\lambda+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}t$

$$=\Phi\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\lambda}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)-1=\operatorname{erf}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

例 2　在一渠道的首端($x=0$)有一水池,在 $t=0$ 时突然注入浓度为 c_0 之污染液,求它向渠道的扩散规律.

解　设在时刻 t,渠道某一断面的污染浓度为 $c(x,t)$,它满足的扩散方程和边界及初始条件为

$$\begin{cases}c_t-a^2c_{xx}=0,\\ c|_{x=0}=c_0,c|_{t=0}=0.\end{cases}$$

令 $c(x,t)=c_0+v(x,t)$,则上述关于 c 的定解问题化为 v 对于 x 的反对称条件的定解问题:

$$\begin{cases}v_t-a^2v_{xx}=0,\\ v|_{t=0}=\varphi(x)=\begin{cases}-c_0 & (x>0),\\ c_0 & (x<0).\end{cases}\end{cases}$$

用分离变量法并注意到初始条件,解得

$$v(x,t)=\frac{c_0}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_{-\infty}^{0}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi-\int_0^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi\right\}.$$

对上式的两个积分分别作换元:

$$u=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}},u'=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}},$$

则

$$v(x,t)=\frac{c_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2a\sqrt{t}}^{x/2a\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=-c_0\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

变量换回到原来的未知函数 $c(x,t)$,得

$$c(x,t)=c_0\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

1.4　指数积分、对数积分、正弦积分、余弦积分和双曲积分

1.4.1　指数积分

(1) 复上限积分

$$\operatorname{Ei}(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u=\gamma+\ln(-z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{kk!}$$

称为**指数积分**.它在除去半实轴$(0,+\infty)$的 z 平面内单值解析.式中 γ 为欧拉常数.

当 $z=x$ 为实数时,

$$\operatorname{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u\quad(x<0),$$

$$\operatorname{Ei}(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u=-\int_x^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u$$

$$= \gamma + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{kk!} \quad (0 < x < +\infty),$$

$$\overline{\mathrm{Ei}}(x) = \mathrm{V.P.}\int_{-x}^{\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u = -\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-x}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u\right]$$

$$= \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\mathrm{d}u = \gamma + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{kk!} \quad (0 < x < +\infty).$$

(2) 指数积分的渐近表达式为

$$\mathrm{Ei}(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{z^k} + r_n(z)\right] \quad (|z| \to +\infty),$$

式中

$$|r_n(z)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{(n+1)!}{|z|^{n+1}} & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{3\pi}{2}\right), \\ \dfrac{(n+1)!}{|z|^{n+1}(\sin\delta)^{n+1}} & \left(0 < \delta < \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2} \text{ 或 } \dfrac{3\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \delta\right). \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{Ei}}(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{x^k} \quad (x > 0, x \to +\infty).$$

特别

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\overline{\mathrm{Ei}}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\overline{\mathrm{Ei}}(x) = 1.$$

1.4.2 对数积分

(1) 定义积分

$$\mathrm{li}(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$$

为对数积分.它在除去$(-\infty,0)$和$[1,+\infty)$的z平面内单值解析.

当z为正实数时,积分取主值:

$$\mathrm{li}(x) = \gamma + \ln(-\ln x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k x}{kk!} \quad (0 < x < 1),$$

$$\overline{\mathrm{li}}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u}\right] = \overline{\mathrm{Ei}}(x)$$

$$= \gamma + \ln\ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k x}{k!k} \quad (0 < x < +\infty),$$

式中γ为欧拉常数.

(2) 对数积分的渐近公式为

$$\mathrm{li}(z) = \frac{z}{\ln z}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{\ln^k z} + r_n(z)\right] \quad (|\arg z| < \pi, |z| \to +\infty),$$

式中

$$|r_n(z)| \leqslant \frac{(n+1)!}{|\ln z|^{n+1}}.$$

1.4.3 正弦积分和余弦积分

(1) 下面两积分

$$\mathrm{Si}(z)=\int_0^z \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u \quad (|z|<+\infty),$$
$$\mathrm{Ci}(z)=-\int_z^\infty \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u \quad (|\arg z|<\pi)$$

分别称为**正弦积分**和**余弦积分**.它们的级数表达式分别为

$$\mathrm{Si}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!(2k-1)} \quad (|z|<+\infty),$$
$$\mathrm{Ci}(z)=\gamma+\ln z+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{z^{2k}}{(2k)!(2k)} \quad (|\arg z|<\pi).$$

定义
$$\mathrm{si}(z)=-\int_z^\infty \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\mathrm{Si}(z)-\frac{\pi}{2} \quad (|z|<+\infty),$$
$$\mathrm{ci}(z)=\mathrm{Ci}(z) \quad (|\arg z|<\pi).$$

(2) 正弦积分和余弦积分的渐近表达式分别为

$$\mathrm{ci}(z)=\frac{\sin z}{z}P(z)-\frac{\cos z}{z}Q(z) \quad (|\arg z|<\pi),$$
$$\mathrm{si}(z)=-\frac{\cos z}{z}P(z)-\frac{\sin z}{z}Q(z) \quad (|\arg z|<\pi),$$

其中
$$P(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k)!}{z^{2k}}+O(z^{-2n-2}),$$
$$Q(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k+1)!}{z^{2k+1}}+O(z^{-2n-3}).$$

特别有
$$\lim_{x\to+\infty}x^{\rho}\mathrm{si}(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}x^{\rho}\mathrm{ci}(x)=0 \quad (\rho<1),$$
$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{si}(x)=-\pi,\quad \lim_{x\to-\infty}\mathrm{ci}(z)=\pi\mathrm{i}.$$

(3) 当 $z=x$ 为实数时,正弦积分和余弦积分之间有如下关系:

$$\mathrm{ci}(x)\pm\mathrm{i}\,\mathrm{si}(x)=\mathrm{Ei}(\pm\mathrm{i}x),\qquad \mathrm{Ci}(x\mathrm{e}^{\pm\pi\mathrm{i}})=\mathrm{Ci}(x)\pm\pi\mathrm{i}\quad(x>0);$$
$$\frac{\mathrm{dSi}(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin x}{x},\qquad \frac{\mathrm{dCi}(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos x}{x};$$
$$\mathrm{Si}(x)+\mathrm{Si}(-x)=0,\qquad \mathrm{si}(x)+\mathrm{si}(-x)=-\pi;$$
$$\mathrm{Si}(x)\sim x,\qquad \mathrm{si}(x)\sim-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad(x\ll 1);$$
$$\mathrm{Ci}(x)\sim\overline{\mathrm{Ei}}(x)\sim\ln\frac{1}{\gamma x},\qquad \mathrm{Si}(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{\cos x}{x};$$
$$\mathrm{si}(x)\sim-\frac{\cos x}{x},\qquad \mathrm{ci}(x)\sim\frac{\sin x}{x}\quad(x\gg 1).$$

1.4.4 双曲积分

下面两积分

$$\mathrm{Shi}(z)=\int_0^z\frac{\sinh u}{u}\mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{Chi}(z)=\int_0^z\frac{\cosh u}{u}\mathrm{d}u+\gamma+\ln z\quad(|\arg z|<\pi)$$

分别称为**双曲正弦积分**和**双曲余弦积分**.式中 γ 为欧拉常数.它们的级数表达式分别为

$$\mathrm{Shi}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)},$$

$$\mathrm{Chi}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!(2k)}+\gamma+\ln z.$$

1.5　椭圆积分和椭圆函数

形如

$$\int R(x,y)\mathrm{d}x$$

(R 是 x,y 的有理函数,$y^2=P(x)$是 x 的三次或四次多项式)的积分称为**椭圆积分**.

1.5.1　勒让德椭圆积分

(1) 下面3个积分

$$\mathrm{F}(k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

$$\mathrm{E}(k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\Pi(h,k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{\mathrm{d}x}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+h\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

分别称为**勒让德第一类、第二类、第三类椭圆积分**.数 k 称为这些积分的**模数**,数 $k'=\sqrt{1-k^2}$称为**补模数**,数 h 称为第三类积分的**参数**.

当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$时,得到相应的3个**完全椭圆积分**:

$$\mathrm{K}=\mathrm{K}(k)=\mathrm{F}(k,\frac{\pi}{2})=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\quad(|k|<1),$$

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}(k)=\mathrm{E}\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\,d\theta \quad (|k| < 1),$$

$$\Pi\left(h, k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + hx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + h\sin^2\theta)\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}} \quad (|h| < 1).$$

定义

$$K' = K'(k) \equiv K(k'), \quad E' = E'(k) \equiv E(k'),$$

它们依勒让德关系式

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}$$

联系着.

(2) 许多积分都可归结为椭圆积分,例如

1° $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2t^2}} = F(k, \arcsin x)$;

2° $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}\sqrt{1 + k^2t^2}} = F(\sqrt{1 - k^2}, \arctan x)$ $\left(令\ u = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right)$;

3° $\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}\sqrt{b^2 - t^2}} = \frac{1}{a}F\left(\frac{b}{a}, \arcsin\frac{x}{b}\right)$ $\left(令\ u = \frac{t}{b}\right)$;

4° $\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}\sqrt{t^2 - b^2}} = \frac{1}{a}F\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \arcsin\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - b^2}}\right)$

$\left(令\ u = \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{a^2 - b^2}}\right)$;

5° $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - b^2 + b^2t^2}} = F(b, \arccos x)$ $(令\ u = \sqrt{1 - t^2})$;

6° $\int_x^b \frac{dt}{\sqrt{a^2 + t^2}\sqrt{b^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}F\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \arccos\frac{x}{b}\right)$

$\left(令\ u = \sqrt{1 - \left(\frac{t}{b}\right)^2}\right)$;

7° $\int_a^x \frac{dt}{\sqrt{(t - a)(t - b)(t - c)}} = \frac{2}{\sqrt{a - c}}F\left(\sqrt{\frac{b - c}{a - c}}, \arcsin\sqrt{\frac{x - a}{x - b}}\right)$

$\left(令\ u = \sqrt{\frac{t - a}{t - b}}\right)$;

8° $\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t - a)(t - b)(t - c)}} = \frac{2}{\sqrt{a - c}}F\left(\sqrt{\frac{b - c}{a - c}}, \arcsin\sqrt{\frac{a - c}{x - c}}\right)$

$\left(令\ u = \sqrt{\frac{a - c}{t - c}}\right)$;

9° $\int_x^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} \mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a-c}}, \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}\right)$

$\left(令\ u = \sqrt{\frac{a-t}{a-b}}\right)$;

10° $\int_0^x \frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \frac{1}{k^2}\mathrm{F}(k, \arcsin x) - \frac{1}{k^2}\mathrm{E}(k, \arcsin x)$;

11° $\int_0^x \sqrt{\frac{a^2-t^2}{b^2-t^2}}\mathrm{d}t = a\mathrm{E}\left(\frac{b}{a}, \arcsin\frac{x}{b}\right) \quad \left(令\ u = \frac{t}{b}\right)$;

12° $\int_x^a \sqrt{\frac{b^2+t^2}{a^2-t^2}}\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+b^2}\mathrm{E}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \arccos\frac{x}{a}\right)$

$\left(令\ u = \sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}\right)$;

13° $\int_b^x \frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{t^2+a^2}{t^2-b^2}}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\mathrm{E}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \arccos\frac{b}{x}\right)$

$\left(令\ u = \sqrt{1-\left(\frac{b}{t}\right)^2}\right)$;

14° $\int_0^x \sqrt{\frac{a^2+t^2}{(b^2+t^2)^2}}\mathrm{d}t = \frac{a}{b^2}\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \arctan\frac{x}{b}\right) \quad \left(令\ u = \frac{t}{\sqrt{b^2+t^2}}\right)$;

15° $\int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{(t^2-b^2)(a^2-t^2)}} = \frac{1}{ab^2}\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \arcsin\sqrt{\frac{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}}\right)$

$\left(令\ u = \frac{a}{t}\sqrt{\frac{t^2-b^2}{a^2-b^2}}\right)$.

1.5.2 雅可比椭圆函数

(1) 第一类椭圆积分

$$z = \int_0^w \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \mathrm{F}(k,\varphi)$$

的反函数叫做椭圆正弦,记作

$$w = \mathrm{sn}z = \mathrm{sn}(z,k), \quad \varphi = \mathrm{am}z,$$

这里 k 称为模,$k' = \sqrt{1-k^2}$称为补模,φ 称为 z 的振幅函数.其他椭圆函数的定义为

$$\mathrm{cn}z = \cos\varphi = \sqrt{1-w^2} = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2z} \quad (椭圆余弦),$$

$$\mathrm{tn}z = \tan\varphi = \frac{\mathrm{sn}z}{\mathrm{cn}z} = \frac{\mathrm{sn}z}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2z}} \quad (椭圆正切),$$

$$\mathrm{dn}z = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2z}.$$

snz、cnz，tnz、dnz 统称为**雅可比椭圆函数**.

(2) 雅可比椭圆函数与三角函数有许多相似的性质和基本公式.

1° 特殊点的值如表 1-1 所示.

表 1-1

z	0	$\frac{K}{2}$	K	$\frac{iK'}{2}$	$K+\frac{iK'}{2}$	iK'	$K+iK'$
snz	0	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	1	$\frac{i}{\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	∞	$\frac{1}{k}$
cnz	1	$\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	0	$\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	$-\sqrt{\frac{k-1}{k}}$	∞	$-\frac{ik'}{k}$
dnz	1	$\sqrt{k'}$	k'	$\sqrt{1+k}$	$\sqrt{1-k}$	∞	0

2° 周期、零点、极点和留数如表 1-2 所示

表 1-2

z	基本周期	零　点	极　点	留　数
snz	4K;2iK'	$2mK+2niK'$	$2mK+(2n+1)iK'$	$(-1)^m\frac{1}{k}$
cnz	4K;2K+2iK'	$(2m+1)K+2niK'$	$2mK+(2n+1)iK'$	$(-1)^{m+n}\frac{1}{k}$
dnz	2K;4iK'	$(2m+1)K+(2n+1)iK'$	$2mK+(2n+1)iK'$	$(-1)^{n-1}\frac{1}{k}$

3° 诱导公式

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(z+2mK+2niK') = (-1)^m \operatorname{sn}z, \\ \operatorname{cn}(z+2mK+2niK') = (-1)^{m+n}\operatorname{cn}z, \\ \operatorname{tn}(z+2mK+2niK') = (-1)^n \operatorname{tn}z, \\ \operatorname{dn}(z+2mK+2niK') = (-1)^n \operatorname{dn}u. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(z+(2m-1)K+2niK') = (-1)^{m+1}\operatorname{cd}z = (-1)^{m+1}\dfrac{\operatorname{cn}z}{\operatorname{dn}z}, \\ \operatorname{cn}(z+(2m-1)K+2niK') = (-1)^{m+n}k'\operatorname{sd}z = (-1)^{m+n}k'\dfrac{\operatorname{sn}z}{\operatorname{dn}z}, \\ \operatorname{dn}(z+(2m-1)K+2niK') = (-1)^n k'\operatorname{nd}z = (-1)^n k'\dfrac{1}{\operatorname{dn}z}, \\ \operatorname{tn}(z+(2m-1)K+2niK') = (-1)^{n+1}\dfrac{\operatorname{cs}z}{k'} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{k'}\dfrac{1}{\operatorname{tn}z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{sn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{i}\mathrm{K}')=\dfrac{(-1)^{m+1}}{k}\mathrm{dc}z=\dfrac{(-1)^{m+1}}{k}\dfrac{\mathrm{dn}z}{\mathrm{cn}z},\\ \mathrm{cn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{i}\mathrm{K}')=\dfrac{(-1)^{m+n}}{k}\mathrm{i}k'(\mathrm{nc}z)=(-1)^{m+n}\dfrac{\mathrm{i}k'}{k}\dfrac{1}{\mathrm{cn}z},\\ \mathrm{dn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{i}\mathrm{K}')=(-1)^{n}\mathrm{i}k'\mathrm{tn}z,\\ \mathrm{tn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{i}\mathrm{K}')=\dfrac{(-1)^{n}}{k'}\mathrm{i}(\mathrm{dn}z).\end{cases}$$

其中 m,n 均为一切整数,i 是虚数单位 $i^2=-1$.

4° 基本关系

$$\begin{cases}\mathrm{sn}^2z+\mathrm{cn}^2z=1,\\ \mathrm{dn}^2z+k^2\mathrm{sn}^2z=1,\\ \mathrm{dn}^2z-k^2\mathrm{cn}^2z=1-k^2=k'^2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{am}(-z)=-\mathrm{am}(z),\\ \mathrm{sn}(-z)=-\mathrm{sn}(z),\\ \mathrm{cn}(-z)=\mathrm{cn}(z),\\ \mathrm{tn}(-z)=-\mathrm{tn}(z),\\ \mathrm{dn}(-z)=-\mathrm{dn}(z).\end{cases}$$

5° 加法公式和乘法公式

$$\mathrm{sn}(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}\zeta\pm\mathrm{cn}z\ \mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{dn}z}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}^2z-\mathrm{sn}^2\zeta}{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z},$$

$$\mathrm{cn}(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{cn}z\ \mathrm{cn}\zeta\mp\mathrm{sn}z\ \mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{dn}z\ \mathrm{dn}\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}z}{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z},$$

$$\mathrm{dn}(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{dn}z\ \mathrm{dn}\zeta\mp k^2\mathrm{sn}z\ \mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{cn}\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}z\mp\mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}\zeta}{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z},$$

$$\mathrm{sn}(z+\zeta)\mathrm{sn}(z-\zeta)=\frac{\mathrm{sn}^2z-\mathrm{sn}^2\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\mathrm{sn}^2\zeta},$$

$$\mathrm{cn}(z+\zeta)\mathrm{cn}(z-\zeta)=\frac{\mathrm{cn}^2z-\mathrm{sn}^2\zeta\mathrm{dn}^2z}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\mathrm{sn}^2\zeta},$$

$$\mathrm{dn}(z+\zeta)\mathrm{dn}(z-\zeta)=\frac{\mathrm{dn}^2z-k^2\mathrm{sn}^2\zeta\mathrm{cn}^2z}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\mathrm{sn}^2\zeta}.$$

6° 倍数公式和半数公式

$$\mathrm{sn}2z=\frac{2\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z}{1-k^2\mathrm{sn}^4z},$$

$$\mathrm{cn}2z=\frac{\mathrm{cn}^2z-\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{dn}^2z}{1-k^2\mathrm{sn}^4z}=1-\frac{2\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{dn}^2z}{1-k^2\ \mathrm{sn}^4z}=\frac{2\mathrm{cn}^2z}{1-k^2\mathrm{sn}^4z}-1,$$

$$\mathrm{dn}2z=\frac{\mathrm{dn}^2z-k^2\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{cn}^2z}{1-k^2\mathrm{sn}^4z}=1-\frac{2k^2\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{cn}^2z}{1-k^2\ \mathrm{sn}^4z}=\frac{2\mathrm{dn}^2z}{1-k^2\mathrm{sn}^4z}-1.$$

$$\mathrm{sn}^2\frac{z}{2}=\frac{1-\mathrm{cn}z}{1+\mathrm{dn}z}=\frac{1-\mathrm{dn}z}{k^2(1+\mathrm{cn}z)}=\frac{\mathrm{dn}z-\mathrm{cn}z}{k^2+\mathrm{dn}z-k^2\mathrm{cn}z},$$

$$\mathrm{cn}^2\frac{z}{2}=\frac{\mathrm{cn}z+\mathrm{dn}z}{1+\mathrm{dn}z}=\frac{k^2\mathrm{cn}z-k'^2+\mathrm{dn}z}{k^2(1+\mathrm{cn}z)}=\frac{k'^2(1+\mathrm{cn}z)}{k'^2+\mathrm{dn}z-k^2\mathrm{cn}z},$$

$$\mathrm{dn}^2\frac{z}{2}=\frac{\mathrm{cn}z+\mathrm{dn}z}{1+\mathrm{cn}z}=\frac{k'^2+k^2\mathrm{cn}z+\mathrm{dn}z}{1+\mathrm{dn}z}=\frac{k'^2(1+\mathrm{dn}z)}{k'^2+\mathrm{dn}z-k^2\mathrm{cn}z}.$$

7° 导数和积分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{sn}z=\mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{cn}z=\mathrm{sn}z\ \mathrm{dn}z,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{dn}z=-k^2\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}z.$$

$$\int\mathrm{sn}z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{k}\ln(\mathrm{dn}z-k\mathrm{cn}z),$$

$$\int\mathrm{cn}z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{k}\ln(\mathrm{dn}z-\mathrm{i}k\mathrm{sn}z),$$

$$\int\mathrm{dn}z\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\ln(\mathrm{cn}z-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}z).$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{sn}z}=\ln\frac{\mathrm{sn}z}{\mathrm{cn}z+\mathrm{dn}z}=\ln\frac{\mathrm{dn}z-\mathrm{cn}z}{\mathrm{sn}z},$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{cn}z}=\frac{1}{k'}\ln\frac{k'\mathrm{sn}z+\mathrm{dn}z}{\mathrm{cn}z}=\frac{1}{2k'}\ln\frac{\mathrm{dn}z+k'\mathrm{sn}z}{\mathrm{dn}z-k'\mathrm{sn}z},$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{dn}z}=\frac{1}{k'}\mathrm{argtan}\frac{k'\mathrm{sn}z-\mathrm{cn}z}{k'\mathrm{sn}z+\mathrm{cn}z}=\frac{1}{2k'}\mathrm{argtan}\frac{k'\mathrm{sn}z}{\mathrm{cn}z}.$$

1.5.3 椭圆积分应用举例

例 3 计算椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$的弧长.

解 椭圆的参数方程为 $x=a\sin\theta, y=b\cos\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$，其弧长的微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s&=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

这里，$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，为椭圆离心率. 于是椭圆弧长为

$$s=a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{E}(\varepsilon,\varphi).$$

这就是第二类椭圆积分，椭圆积分由此而得名.

特别，令 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，得椭圆周长的$\frac{1}{4}$，可表示为完全椭圆积分

$$s'=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=a\mathrm{E}(\varepsilon),$$

而椭圆的周长为 $4s'=4a\mathrm{E}(\varepsilon)$.

例4 求单摆的周期.

解 设单摆的摆长为 l,在时刻 t 的摆角为 $\theta=\theta(t)$,则摆的运动微分方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0,$$

其中 g 为重力加速度.令 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$,则上式化为

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0,$$

其通解为 $\omega^2=\frac{2g}{l}\cos\theta+C$.若给定初始条件 $\omega|_{\theta=\theta_0}=0$,则其特解为

$$\begin{aligned}\omega^2&=\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_0)\\&=\frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}t&=\int_0^\theta\frac{d\theta}{\omega}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}\\&\xlongequal{\text{令}\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\\&=\sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{F}(k,\varphi).\end{aligned}$$

其中 $k=\sin\frac{\theta_0}{2}$,这是第一类椭圆积分.于是摆的周期可表示为第一类完全椭圆积分:

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{F}\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=4\sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{K}(k).$$

例5 求 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=r^2(R>r)$ 两柱面所围之体积.

解 由已知条件易知所求体积为

$$V=8\int_0^r\sqrt{(R^2-x^2)(r^2-x^2)}\,dx,$$

作变换 $x=r\sin\theta,k=\frac{r}{R}$,得

$$\begin{aligned}V&=8Rr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta\\&=8Rr^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta-k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta\right]\\&=\frac{8}{3}Rr^2\left[\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\mathrm{E}(k)-\left(\frac{1}{k^2}-1\right)\mathrm{K}(k)\right]\end{aligned}$$

1.6 δ-函 数

1.6.1 δ-函数的定义

(1) δ-函数是定义在$(-\infty,+\infty)$上,并且满足以下条件的函数:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0 & (x\neq x_0),\\ +\infty & (x=x_0);\end{cases} \tag{1-35}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1. \tag{1-36}$$

δ-函数的引进,使集中分布的量就得到了数学描述.例如,对于在 $x=x_0$ 处集中分布电量为 q 的点电荷的密度$\rho(x)$可用 δ-函数表示:

$$\rho(x)=q\delta(x-x_0).$$

(2) δ-函数有一个基本性质:对任何连续函数 $\varphi(x)$,下述关系式成立:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(x_0). \tag{1-37}$$

因此,也用(1-37)式来定义 δ-函数:如果某函数乘以任意连续函数 $\varphi(x)$后,再在$(-\infty,+\infty)$上积分,其积分值为 $\varphi(x_0)$,那么该函数称为 δ-函数,记为 $\delta(x-x_0)$.

当 $x_0=0$ 时,(1-35)式与(1-36)式分别化为

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & (x\neq 0),\\ +\infty & (x=0);\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1.$$

并且对任意的连续函数 $\varphi(x)$,(1-37)式化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0).$$

由定义可以看出,δ-函数不是普通函数,它没有通常意义的"函数值",不能以"每一点对应一个函数值"来理解,它的值只能通过积分运算(1-37)式来体现,也就是说,它的"值"是在显示任意连续函数在每一点的函数时才体现出来.因此,δ-函数是一种关于分布的描述形式,只能求它的"投影值"(或"运算值").

(3) 三维空间中的 δ-函数定义为

$$\delta(M-M_0)=\begin{cases}0, & M\neq M_0,\\ +\infty, & M=M_0;\end{cases}$$

$$\iiint\delta(M-M_0)\mathrm{d}M=1.$$

式中三重积分的积分域是全空间.它又可定义为:对于任意连续函数 $\varphi(M)$,下述关系式成立:

$$\iiint\delta(M-M_0)\varphi(M)\mathrm{d}M=\varphi(M_0).$$

容易证明

$$\delta(M-M_0)=\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$
$$=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0).$$

类似地可定义二维 δ-函数,以及一般地定义 n 维 δ-函数.

1.6.2 δ-函数的性质

1° $\delta(x)$是偶函数:$\delta(-x)=\delta(x)$.

2° $\delta(x)$的积分变换.$\delta(x)$的傅里叶变换与拉普拉斯变换均为1:

$$\mathscr{F}[\delta(x)]=1,\quad \mathscr{L}[\delta(x)]=1.$$

3° $\delta(x-x_0)$的傅里叶积分展开式为

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega(x-x_0)}d\omega.$$

特别,当 $x_0=0$ 时,得 $\delta(x)$的积分表达式

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}d\omega.$$

4° $\delta(x-x_0)$的广义傅里叶级数展开式.设$\{y_n(x)\}$是$[a,b]$上的正交完全函数系,其中 $y_n(x)$的模为

$$N_n=\sqrt{\int_a^b y_n^2(x)dx},$$

则 $\delta(x-x_0)$按$\{y_n(x)\}$展开的广义傅里叶级数为

$$\delta(x-x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N_n^2}y_n(x_0)y_n(x).$$

特别有

$$\delta(x-x_0)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$\delta(x-x_0)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{(2n+1)\pi x_0}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

1.6.3 δ-函数作为函数序列的极限

设可积函数序列为$\{f_\alpha(x)\}(a\leqslant x\leqslant b)$,如果对于任意连续函数 $\varphi(x)$,存在可积函数 $f(x)$,使得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^b f_\alpha(x)\varphi(x)dx=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

则称 $f(x)$为函数序列 $f_\alpha(x)$的弱极限.

δ-函数可看作某些函数序列——δ-型序列的弱极限.下面是常用的几个 δ-型序列的弱极限形式:

1° $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\delta_\varepsilon(x)\xlongequal{\text{弱}}\delta(x)$，其中 $\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & (|x|<\varepsilon),\\ 0 & (|x|>\varepsilon);\end{cases}$

2° $\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)}\xlongequal{\text{弱}}\delta(x)$;

3° $\lim\limits_{\omega\to+0}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin\omega x}{x}\xlongequal{\text{弱}}\delta(x)$;

4° $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\xlongequal{\text{弱}}\delta(x-\xi)$;

5° $\lim\limits_{r\to+0}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\xlongequal{\text{弱}}\delta(\theta-\varphi)$.

2 贝塞尔函数

2.1 贝塞尔函数的概念

2.1.1 贝塞尔方程及其来源

贝塞尔(Bessel)函数是下列贝塞尔方程的解：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \tag{2-1}$$

其中 n 是常数，称为方程的阶.

贝塞尔函数除了作为方程(2-1)的解而引进外，它还出现在某些函数的展开中.

贝塞尔方程常在用分离变数法解偏微分方程的边值问题或本征值问题中见到.例如，在圆柱坐标系中解波动方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0,$$

设 $u(r,\theta,z,t)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)e^{i\omega t}$，得到关于 $R(r)$ 的方程

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R=0.$$

其中 k 和 m 是分离变数引进的常数.令 $\xi=kr$，$R(r)=y(\xi)$，上式就化为贝塞尔方程(2-1).

又如在球坐标系中解波动方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0,$$

设 $u(r,\theta,\varphi,t)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)e^{i\omega t}$，得到关于 $R(r)$ 的方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0,$$

其中 $l=0,1,2,\cdots$. 令 $\xi=kr, R(r)=\xi^{-\frac{1}{2}}y(\xi)$,得

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dy}{d\xi}+\left[1-\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{\xi^2}\right]y(\xi)=0.$$

这是半奇数阶$\left(l+\frac{1}{2}\right)$的贝塞尔方程.

2.1.2 第一类贝塞尔函数

第一类贝塞尔函数 $J_n(x)$是当 $n\neq$整数时的 n 阶贝塞尔方程(2-1)在它的正则奇点 $x=0$ 处的两个线性无关解.下面用级数解法求解方程(2-1).

根据复变函数论中富克斯(Fuchs)定理,方程(2-1)有级数解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+r}, \tag{2-2}$$

其中 $c_0\neq0$. 把这级数代入方程(2-1)(设 n 为任意实数),得 $r=\pm n, c_1=0$.

(1) 取 $r=n$,级数(2-2)的系数有递推公式

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(2n+k)}.$$

系数间的指标差2,故 $c_3,c_5,c_7,\cdots$都可用 c_1 表示,且都等于零;而 $c_2,c_4,c_6,\cdots$都可用 c_0 表示,即

$$c_{2m}=\frac{(-1)^mc_0}{2^{2m}\cdot m!\ (n+1)(n+2)\cdots(n+m)}.$$

因此,级数解(2-2)的一般项为

$$(-1)^m\frac{c_0x^{2m+n}}{2^{2m}m!\ (n+1)(n+2)\cdots(n+m)},$$

其中 c_0 为任意常数,当 c_0 取一定值,就得到方程(2-1)的一个解(由比值法知,级数解(2-2)的收敛半径 $R=+\infty$).

取常数 $c_0=\dfrac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$.这样就得到贝塞尔方程(2-1)的一级数解,这级数的和函数称为 n 阶第一类贝塞尔函数,记为 $J_n(x)$,即

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}. \tag{2-3}$$

当 n 为正整数或零时,$\Gamma(n+m+1)=(n+m)!$,因此

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

显然,n 为偶数时,$J_n(x)$ 为偶函数;n 为奇数时,$J_n(x)$ 为奇函数.

(2) 取 $r=-n$,同样可得方程(2-1) 的另一特解

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(-n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}. \tag{2-4}$$

对于(2-4)式应注意两点:

1° 因为当 $-n$ 为负整数 $-N$ 时，(根据 $\Gamma(s)\to\pm\infty$ $(s\to 0,-1,-2,\cdots)$) $\Gamma(-N+m+1)\to\pm\infty$ $(m=0,1,2,\cdots,N-1)$，所以系数 $\dfrac{1}{\Gamma(-n+m+1)}=0$，这时

$$J_{-N}(x)=\sum_{m=N}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(-N+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-N}.$$

2° 比较(2-3)式与(2-4)式，可知，不论 n 为何实数，总可以用(2-3)式统一地表示第一类贝塞尔函数.

2.1.3 第二类贝塞尔函数

(1) 当 n 不是整数时，由分析函数 $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 在 $x=0$ 附近的性态(设 $n>0$，$J_n(x)\to 0$，$J_{-n}(x)\to\infty$ $(x\to 0)$)，可知 $J_n(x)$ 和 $J_{-n}(x)$ 线性无关，因此贝塞尔方程(2-1)的通解为

$$y=AJ_n(x)+BJ_{-n}(x),\tag{2-5}$$

其中 A,B 为任意常数.

当 n 为整数时，$J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 线性相关，它们之间有关系式

$$J_{-N}(x)=(-1)^N J_N(x)\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

这时需要构造另一个与 $J_n(x)$ 线性无关的解. 通常用线性组合与极限方法作出方程(2-1)的另一解(记作 $N_n(x)$).

(2) 当 n 不是整数时，

$$N_n(x)=\cot n\pi J_n(x)-\csc n\pi J_{-n}(x)=\frac{J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\sin n\pi}.\tag{2-6}$$

当 n 是整数时

$$N_n(x)=\lim_{\alpha\to n}N_\alpha(x).\tag{2-7}$$

由(2-6)式与(2-7)式所定义的函数 $N_n(x)$ 称为 n 阶第二类贝塞尔函数(也叫做诺伊曼(Neumann)函数). 它的级数表达式为

$$N_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}-$$
$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

其中 $\psi(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$；当 $n=0$ 时，去掉第二项有限和. 特别，在 $x=0$ 的小邻域内有近似公式

$$N_0(x)\approx\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2},$$

$$N_n(x)\approx-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\quad(n\geqslant 1).$$

(3) 不论 n 为何实数，$N_n(x)$ 与方程(2-1)的另一个解 $J_n(x)$ 线性无关，因此方程(2-1)的通解可表示为

$$y = AJ_n(x) + BN_n(x). \tag{2-8}$$

在一些定解问题中，n 是零或正整数，且相应的本征值问题带有自然边界条件：$y(0)$有界，因此，方程(2-1)的通解不能取(2-5)式，而应取(2-8)式．因为当 $x\to+0$ 时，$N_n(x)\to-\infty$ $(n=0,1,2,\cdots)$，于是在(2-8)式中常取 $B=0$，即在条件 $|y(0)|<+\infty$ 下，方程(2-1)的解($n=0,1,2,\cdots$)为

$$y = AJ_n(x), \tag{2-9}$$

其中 A 为任意常数．

2.1.4 第三类贝塞尔函数

(1) 由第一类、第二类贝塞尔函数的线性组合可定义出第三类贝塞尔函数(又叫做汉克尔(Hankel)函数)．

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + \mathrm{i}\, N_n(x), \tag{2-10}$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - \mathrm{i}\, N_n(x), \tag{2-11}$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 是虚数单位，n 为任何实数．由于它们是方程(2-1)的两个线性无关解，因此，对任何实数 n，方程(2-1)通解的另一表达式为

$$y = AH_n^{(1)}(x) + BH_n^{(2)}(x),$$

其中 A,B 为任意常数．

(2) 当 $|x|\to+\infty$ 时，三类贝塞尔函数的渐近表达式为

$$J_n(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n}{2}\pi\right);$$

$$N_n(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n}{2}\pi\right);$$

$$H_n^{(1)}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n}{2}\pi\right)},$$

$$H_n^{(2)}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n}{2}\pi\right)}.$$

这些渐近公式在讨论波的散射时常用到．

贝塞尔函数还有其他许多类型，不再一一介绍．由于贝塞尔函数主要出现在柱面坐标中，因此又把它们统称为**圆柱函数**．

2.2 贝塞尔函数的性质

2.2.1 递推公式

不同阶的贝塞尔函数之间存在一定的递推关系．

(1) 第一组是微分公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \tag{2-12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n}\mathrm{J}_n(x)] = -x^{-n}\mathrm{J}_{n+1}(x). \tag{2-13}$$

利用贝塞尔函数的级数表达式(2-3)可以证明：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^n\mathrm{J}_n(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n}2^n \\ &= x^n\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(n+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n-1} \\ &= x^n\mathrm{J}_{n-1}(x).\end{aligned}$$

类似可证(2-13)式. 当 $n=1$ 时，(2-12)式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\mathrm{J}_1(x)] = x\mathrm{J}_0(x),$$

当 $n=0$ 时、(2-13)式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_0(x) = -\mathrm{J}_1(x).$$

由以上 4 式可得不定积分公式：

$$\int x^n\mathrm{J}_{n-1}(x)\mathrm{d}x = x^n\mathrm{J}_n(x) + C,$$

$$\int x^{-n}\mathrm{J}_{n+1}(x)\mathrm{d}x = -x^{-n}\mathrm{J}_n(x) + C,$$

$$\int x\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x = x\mathrm{J}_1(x) + C,$$

$$\int \mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{J}_0(x) + C.$$

(2) 第二组是高阶用低阶表示的递推公式：

$$\mathrm{J}_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}\mathrm{J}_n(x) - \mathrm{J}_{n-1}(x), \tag{2-14}$$

$$\mathrm{J}_{n+1}(x) = \mathrm{J}_{n-1}(x) - 2\mathrm{J}'_n(x). \tag{2-15}$$

这组公式由第一组公式推出：将(2-12)与(2-13)两式左端的导数求出来经化简后相减即得(2-14)式，相加即得(2-15)式.

又由(2-12)，(2-13)两式可以分别证明

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^p[x^n\mathrm{J}_n(x)] = x^{n-p}\mathrm{J}_{n-p}(x), \tag{2-16}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^p[x^{-n}\mathrm{J}_n(x)] = (-1)^p x^{-(n+p)}\mathrm{J}_{n+p}(x), \tag{2-17}$$

其中记号 $\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^p f(x)$ 表示运算

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^p f(x) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\left\{\cdots\left[\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)\right]\right.}_{\text{共}p\text{次}} \left. f(x)\right\}.$$

所有上述关于 $\mathrm{J}_n(x)$ 的递推公式对任何 n 都成立.

2.2.2　半奇阶贝塞尔函数

半奇阶贝塞尔函数 $J_{n+\frac{1}{2}}(x)(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的一个重要特点是它可以用初等函数表达.例如

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,$$

这里用到了公式

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+1\right)=\frac{2m+1}{2}\frac{2m-1}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)(2m+1)}{2^{m+1}}\sqrt{\pi}.$$

类似地可证

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

一般地,利用递推公式(2-17)可证得 $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$是初等函数:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\left\{x^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(x)\right\}$$

$$=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{n+1}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}\quad(n=0,1,2,\cdots),\qquad(2\text{-}18)$$

利用(2-16)式可证得 $J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)$是初等函数:

$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{n+1}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\left\{\frac{\cos x}{x}\right\}\quad(n=0,1,2,\cdots).\qquad(2\text{-}19)$$

用归纳法可以分别由(2-18)式和(2-19)式证明 $J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(x)$的明显表达式:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^m(n+2m)!}{(2m)!(n-2m)!(2x)^{2m}}+\right.$$

$$\left.\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\frac{(-1)^m(n+2m+1)!}{(2m+1)!(n-2m-1)!(2x)^{2m+1}}\right\},$$

$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^m(n+2m)!}{(2m)!(n-2m)!(2x)^{2m}}-\right.$$

$$\left.\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\frac{(-1)^m(n+2m+1)!}{(2m+1)!(n-2m-1)!(2x)^{2m+1}}\right\}.$$

2.2.3　母函数与积分表达式

(1) 利用复变函数的级数理论,可把函数

$$G(z,x)=\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$$

展开为 z 的级数(洛朗(Laurent) 级数)：

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}\right]z^n$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)z^n. \tag{2-20}$$

这说明 $\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$ 可生成整数阶的贝塞尔函数.因此把这函数称为贝塞尔函数的**母函数**.

(2) 在(2-20) 式中,令 $z=e^{i\varphi}$,得

$$e^{ix\sin\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\varphi}. \tag{2-21}$$

上式右端是复数形的傅里叶级数,因此 $J_n(x)$ 就是上式左端函数的**傅里叶系数**,于是

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\varphi}e^{-in\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(x\sin\varphi-n\varphi)+i\sin(x\sin\varphi-n\varphi)]d\varphi.$$

这里利用了欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$,因为被积函数的虚部是奇函数,它在对称区间$[-\pi,\pi]$上的积分为零,而实部是偶函数,因此得到贝塞尔函数的积分表达式为

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)d\varphi. \tag{2-22}$$

把(2-21)式两端的实部与虚部分开,得

$$\cos(x\sin\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\cos n\varphi,$$

$$\sin(x\sin\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\sin n\varphi.$$

注意到 $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$,则上两式化为

$$\cos(x\sin\varphi)=J_0(x)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(x)\cos 2m\varphi,$$

$$\sin(x\sin\varphi)=2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m-1}(x)\sin(2m-1)\varphi.$$

这就是以 x 为参数的函数 $\cos(x\sin\varphi)$ 与 $\sin(x\sin\varphi)$ 的傅里叶级数展开式,它在调频信号的频谱分析中有着重要的应用.

(3) (2-20) 式是贝塞尔函数理论中的重要公式.利用它还可以推出一系列展开公式,下面再举几个.在(2-20) 式中令 $z=ie^{i\varphi}$,注意 $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$,有

$$\begin{aligned}
e^{ix\cos\varphi} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) i^n e^{in\varphi} \\
&= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(x) i^n e^{in\varphi} + J_{-n}(x) i^{-n} e^{-in\varphi}] \\
&= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) i^n (e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}) \\
&= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(x) \cos n\varphi.
\end{aligned}$$

引进符号 $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = 2 (n = 1,2,\cdots)$,则上式可简写为

$$e^{ix\cos\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(x) \cos n\varphi. \tag{2-23}$$

比较(2-23)式两边的实部与虚部,得

$$\cos(x\cos\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} (-1)^n J_{2n}(x) \cos 2n\varphi, \tag{2-24}$$

$$\sin(x\cos\varphi) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x) \cos(2n+1)\varphi.$$

在(2-24)式中,令 $\varphi = \frac{\pi}{2}$,得

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} J_{2n}(x) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x),$$

又在(2-20)中把 z 换成 $-z$,有

$$\exp\left[\frac{-x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) \cdot (-1)^n z^n,$$

上式与(2-20)式相乘,得

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) z^k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)(-1)^m z^m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m J_m(x) J_{n-m}(x).$$

比较上式两边,得

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^2(x) = J_0^2(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m^2(x) = 1, \tag{2-25}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m J_m(x) J_{2n-m}(x) = 0;$$

或

$$\sum_{m=0}^{2n} (-1)^m J_m(x) J_{2n-m}(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(x) J_{2n+m}(x) = 0.$$

由(2-25)式可作出下列重要结论:

$$|J_0(x)| \leqslant 1, \ |J_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

2.2.4 加法公式

把(2-20)式中的 x 换成 $x+y$,得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x+y)z^n = \exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\cdot\exp\left[\frac{y}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)z^k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(y)z^l$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_{n-k}(y),$$

从而得加法公式

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_{n-k}(y).$$

另一个重要加法公式是

$$J_0(R) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(r_1)J_m(r_2)e^{im\theta}$$

$$= J_0(r_1)J_0(r_2) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(r_1)J_m(r_2)\cos m\theta,$$

其中 $R=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}$ 是平面上任意两点 P_1 和 P_2 之间的距离,r_1 和 r_2 分别表示由原点 O 到 P_1 和 P_2 的距离,θ 是 $\overline{OP_1}$ 和 $\overline{OP_2}$ 之间的夹角.

2.2.5 贝塞尔函数的零点

贝塞尔函数 $J_n(x)$ 的**零点**,就是方程 $J_n(x)=0$ 的根.通常用 $\mu_m^{(n)}$ 表示 n 阶贝塞尔函数 $J_n(x)$ 的第 m 个正零点(从小到大依序编号).由 $J_n(x)$ 的表达式知,当 $n>0$ 时,有零点 $x=0$($J_0(0)=1$),并且如果 $J_n(x_0)=0$,则 $J_n(-x_0)=0$,因此零点是关于原点对称地分布着.下面是有关零点分布的几个重要性质,它对求解定解问题是很重要的.

1° $J_n(x)$ 有无穷多个正零点,且都是单重零点.设 $\mu_1^{(n)},\mu_2^{(n)},\cdots$ 是方程 $J_n(x)=0$ 的正根,则

$$\int_0^l xJ_n^2(\mu_i^{(n)}x)\mathrm{d}x = \frac{l^2}{2}J_{n+1}^2(\mu_i^{(n)}l).$$

当 $\mu_i^{(n)}\neq\mu_j^{(n)}$ 时,

$$\int_0^l xJ_n(\mu_i^{(n)}x)J_n(\mu_j^{(n)}x)\mathrm{d}x = 0,$$

并且函数系 $J_n(\mu_1^{(n)}x),J_n(\mu_2^{(n)}x),\cdots$ 在区间 $(0,l)$ 上是完备系.

零点的渐近公式是

$$\mu_j^{(n)} \approx \frac{3\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}+j\pi \quad (|j| 愈大愈精确).$$

2° $J_n(x)$ 的零点与 $J_{n+1}(x)$ 的零点是彼此相间分布的.即 $J_n(x)$ 的任意两个相

邻零点之间必存在一个且仅存在一个 $J_{n+1}(x)$ 的零点，反之亦然.

3° $J_n(x)$ 的最小正零点小于 $J_{n+1}(x)$ 的最小正零点，即 $\mu_1^{(n)} < \mu_1^{(n+1)}$.

4° 指标 n 较大时，$J_n(x)$ 相邻两零点之距离近似于 π.

表 2-1 列出了 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 前 6 个正零点.

表 2-1

n	m					
	1	2	3	4	5	6
0	2.405	5.520	8.654	11.792	14.931	18.071
1	3.832	7.016	10.173	13.324	16.471	19.616

2.2.6 含贝塞尔函数的无穷积分

用贝塞尔函数的级数表达式，逐项求积分可得下列积分公式

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda x) d\lambda = (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (z > 0);$$

$$\int_0^\infty J_1(\lambda x) e^{-\lambda z} d\lambda = \frac{1}{x}[1 - x(x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}];$$

$$\int_0^\infty J_0(\lambda x) e^{-\lambda t} \lambda^{n+1} d\lambda = \frac{1}{2t}\left(\frac{x}{2t}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right);$$

$$\int_0^\infty J_0(\lambda x) \exp(-\sqrt{\lambda^2 - k^2}\,|z|)(\lambda^2 - k^2)^{-\frac{1}{2}} d\lambda$$

$$= (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \exp(2k\sqrt{x^2 + z^2});$$

$$\int_0^\infty J_m(at) \frac{J_n(b\sqrt{t^2 + x^2})}{(t^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}} t^{m+1} dt$$

$$= \begin{cases} 0 & (a < b), \\ \dfrac{b^m}{a^n}\left(\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{x}\right)^{n-m-1} J_{n-m-1}(x\sqrt{a^2 - b^2}) & (a > b). \end{cases}$$

2.3 傅里叶-贝塞尔级数

2.3.1 本征函数系——贝塞尔函数系

(1) 本征值问题是由一个带参数的微分方程与边界条件所构成的. 其中参数称为**本征值**，非零解称为(对应于本征值的)**本征函数**.

在数学物理问题中，所遇到的本征值问题大都是施图姆-刘维尔(Sturm-Liouville)本征值问题：

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda\rho^2 - n^2) R = 0 \quad (0 < \rho < l), & (2\text{-}26) \\ |R(0)| < +\infty, R(l) = 0; & (2\text{-}27) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda\rho^2 - n^2) R = 0 \quad (0 < \rho < l), & (2\text{-}28) \\ |R(0)| < +\infty, R'(l) = 0. & (2\text{-}29) \end{cases}$$

(2) 标准形式的贝塞尔方程

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0 \tag{2-30}$$

满足有界性条件 $|y(0)| < +\infty$ 的解为 $y = A\mathrm{J}_n(x)$，对方程(2-30)施行自变量变换 $x = \sqrt{\lambda}\rho$，就化为方程(2-26)，它满足条件 $|R(0)| < +\infty$ 的解为

$$R(\rho) = A\mathrm{J}_n(\sqrt{\lambda}\rho).$$

由(2-27)式的第二个条件，可得

$$A\mathrm{J}_n(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

设 $\mathrm{J}_n(x)$ 的一系列正零点为 $\mu_m^{(n)}(m = 1, 2, \cdots)$，则有

$$\sqrt{\lambda}l = \mu_m^{(n)},$$

从而得到本征值问题(2-26)+(2-27)式的本征值

$$\lambda = \lambda_m = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2 \quad (m = 1, 2, \cdots),$$

相应的本征函数为

$$R_m(\rho) = A_m \mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right). \tag{2-31}$$

根据本征值问题的性质，本征函数系——贝塞尔函数系 $\left\{\mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\right\}$ 在 $[0, l]$ 上带权 ρ 正交，即

$$\int_0^l \rho \mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right) \mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l}\rho\right) \mathrm{d}\rho = \begin{cases} 0 & (k \neq m), \\ N_m^2 & (k = m). \end{cases}$$

如同傅里叶级数一样，可把满足一定条件的函数 $f(\rho)$ 按这贝塞尔函数系展开成级数：

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right) \quad (0 < \rho < l), \tag{2-32}$$

其中系数

$$c_m = \frac{\int_0^l \rho f(\rho) \mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right) \mathrm{d}\rho}{\int_0^l \rho \mathrm{J}_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right) \mathrm{d}\rho}. \tag{2-33}$$

级数(2-32)称为函数 $f(\rho)$ 的傅里叶-贝塞尔级数.

(3) 对于第二个本征值问题(2-28)+(2-29)式，由(2-29)的第二式，可得

$$A\sqrt{\lambda}\mathrm{J}'_n(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

设 $\mathrm{J}'_n(x)$ 的一系列正零点为 $\nu_m^{(n)}(m = 1, 2, \cdots)$：

$$0 < \nu_1^{(n)} < \nu_2^{(n)} < \cdots < \nu_m^{(n)} < \cdots$$

那么 $\sqrt{\lambda}l = \nu_m^{(n)}$，从而本征值问题(2-28)+(2-29)式的本征值为

$$\lambda=\lambda_m=\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\right)^2\quad(m=1,2,\cdots),$$

相应的本征函数

$$R_m(\rho)=A_m\mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right).\tag{2-34}$$

当 $n=0$ 时,因为 $\mathrm{J}'_0(0)=0$,且 $\mathrm{J}_0(0)=1$,所以存在本征值 $\lambda_0=0$,相应的本征函数 $R_0(\rho)=A_0$.

本征函数系 $\left\{\mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\right\}$ 在 $[0,l]$ 上带权 ρ 正交:

$$\int_0^l\rho\mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_k^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho=\begin{cases}0 & (k\neq m),\\ \bar{N}_m^2 & (k=m).\end{cases}$$

函数 $f(\rho)$(满足一定条件)按这本征函数系的傅里叶 - 贝塞尔级数展开式为

$$f(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}\bar{c}_m\mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\quad(0<\rho<l),\tag{2-35}$$

其中系数

$$\bar{c}_m=\frac{\int_0^l\rho f(\rho)\mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho}{\int_0^l\rho\mathrm{J}_n^2\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho}.\tag{2-36}$$

2.3.2　贝塞尔函数的模

为了计算本征函数系(2-31)式和(2-34)式的模,对方程(2-26)两边同乘以 $2R'$,可得

$$2\rho^2R'R''+2\rho R'^2+2(\lambda\rho^2-n^2)RR'=0.$$

将上式改写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho^2R'^2+(\lambda\rho^2-n^2)R^2]-2\lambda\rho R^2=0,$$

并积分,整理得

$$\int_0^l\rho R^2(\rho)\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2\lambda}[l^2R'^2(l)+(\lambda l^2-n^2)R^2(l)+n^2R(0)].$$

将 $R(\rho)=\mathrm{J}_n(\sqrt{\lambda}\rho)$, $R'(\rho)=\sqrt{\lambda}\mathrm{J}'_n(\sqrt{\lambda}\rho)$ 代入上式,得

$$\int_0^l\rho\mathrm{J}_n^2(\sqrt{\lambda}\rho)\mathrm{d}\rho=\frac{l^2}{2}\left[\mathrm{J}'^2_n(\sqrt{\lambda}l)+\left(1-\frac{n^2}{\lambda l^2}\right)\mathrm{J}_n^2(\sqrt{\lambda}l)\right].\tag{2-37}$$

这里用到 $\mathrm{J}_0(0)=1$, $\mathrm{J}_n(0)=0\ (n=1,2,\cdots)$.

分两种情形讨论:

1° $\lambda=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2$,这时有 $\mathrm{J}_n(\sqrt{\lambda}l)=\mathrm{J}_n(\mu_m^{(n)})=0$,于是

$$\int_0^l\rho\mathrm{J}_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho=\frac{l^2}{2}\mathrm{J}'^2_n(\mu_m^{(n)}).$$

据递推公式(2-13)

$$x^{-n}J'_n(x)-nx^{-n-1}J_n(x)=-x^{-n}J_{n+1}(x),$$

有

$$J'_n(\mu_m^{(n)})=J_{n+1}(\mu_m^{(n)})\neq 0,$$

因此得到贝塞尔函数(2-31)的模的计算公式

$$N_m^2=\int_0^l \rho J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right)d\rho=\frac{l^2}{2}J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}). \tag{2-38}$$

2° $\lambda=\left(\frac{\upsilon_m^{(n)}}{l}\right)^2$,这时有

$$J'_n(\sqrt{\lambda}l)=J'_n(\upsilon_m^{(n)})=0,$$

于是由(2-37)式得到贝塞尔函数(2-34)的模的计算公式

$$N_m^2=\int_0^l \rho J_n^2\left(\frac{\upsilon_m^{(n)}}{l}\rho\right)d\rho=\frac{l^2}{2}\left[1-\left(\frac{n}{\upsilon_m^{(n)}}\right)^2\right]J_n^2(\upsilon_m^{(n)}). \tag{2-39}$$

2.3.3 例子

例1 将函数 $f(\rho)=\rho^2-1\ (0\leqslant\rho\leqslant 1)$ 按 $\{J_0(\mu_m\rho)\}$ 展开为傅里叶-贝塞尔级数.这里 $J_0(\mu_m)=0(m=1,2,\cdots)$.

解 $f(\rho)$ 在[0,1]上具有二阶连续导数,且当 $\rho=0$ 时有界,当 $\rho=1$ 时其值为零(齐次边界条件).因此

$$\rho^2-1=\sum_{m=1}^{\infty}c_m J_0(\mu_m\rho),$$

其中系数按(2-38),(2-33)式计算:

$$c_m=\frac{2}{J_1^2(\mu_m)}\int_0^1\rho(\rho^2-1)J_0(\mu_m\rho)d\rho.$$

令 $x=\mu_m\rho$,则 $\rho=\frac{x}{\mu_m}$,$d\rho=\frac{1}{\mu_m}dx$,那么

$$c_m=\frac{2}{J_1^2(\mu_m)}\int_0^{\mu_m}\left(\frac{1}{\mu_m}\right)^4 x(x^2-\mu_m^2)J_0(x)dx.$$

根据贝塞尔函数的微分和积分性质可得

$$\int_0^{\mu_m}\mu_m^2 xJ_0(x)dx=\mu_m^2(xJ_1(x))\Big|_0^{\mu_m}=\mu_m^2J_1(\mu_m)$$

及

$$\begin{aligned}\int_0^{\mu_m}x^3J_0(x)dx&=x^2\cdot xJ_1(x)\Big|_0^{\mu_m}-\int_0^{\mu_m}2x\cdot xJ_1(x)dx\\&=\mu_m^3J_1(\mu_m)-2\left[x^2J_2(x)\right]_0^{\mu_m}\\&=\mu_m^3J_1(\mu_m)-2\mu_m^2J_2(\mu_m).\end{aligned}$$

将以上两个积分值代入 c_m 的积分公式,得

$$c_m=\frac{-4J_2(\mu_m)}{J_1^2(\mu_m)\mu_m^2}.$$

因此,所求的展开式为

$$\rho^2 - 1 = -4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_m)}{\mu_m^2 J_1^2(\mu_m)} J_0(\mu_m \rho).$$

例2 将函数 $f(\rho) = \rho^2 (0 \leqslant \rho \leqslant 1)$ 按 $\{J_2(\upsilon_m \rho)\}$ 展开为傅里叶 - 贝塞尔级数. 这里 $J'_2(\upsilon_m) = 0\ (m = 1,2,\cdots)$.

解 依系数公式(2-39)与(2-36),得

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{2\upsilon_m^2}{(\upsilon_m^2 - 4)J_2^2(\upsilon_m)}\int_0^1 \rho^3 J_2(\upsilon_m \rho)d\rho \\
&= \frac{2\upsilon_m^2}{(\upsilon_m^2 - 4)J_2^2(\upsilon_m)} \cdot \frac{1}{\upsilon_m^4}\int_0^1 (\upsilon_m \rho)^3 J_2(\upsilon_m \rho)d(\upsilon_m \rho) \\
&= \frac{2\upsilon_m^2}{(\upsilon_m^2 - 4)J_2^2(\upsilon_m)} \cdot \frac{1}{\upsilon_m^4}[(\upsilon_m \rho)^3 J_3(\upsilon_m \rho)]\Big|_0^1 \\
&= \frac{2\upsilon_m J_3(\upsilon_m)}{(\upsilon_m^2 - 4)J_2^2(\upsilon_m)}.
\end{aligned}$$

代入级数(2-35)式,得所求的展开式

$$\rho^2 = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\upsilon_m J_3(\upsilon_m)}{(\upsilon_m^2 - 4)J_2^2(\upsilon_m)} J_2(\upsilon_m \rho).$$

2.4 贝塞尔函数的应用

2.4.1 边值问题

求解边值问题

$$\begin{cases}
\Delta u = u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho}u_\rho + \dfrac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0 \quad (0 < \rho < l, 0 < z < h), & (2\text{-}40) \\
u(l,\theta,z) = 0, |u(0,\theta,z)| < +\infty, & (2\text{-}41) \\
u(\rho,\theta,0) = g_1(\rho,\theta), u(\rho,\theta,h) = g_2(\rho,\theta) & (2\text{-}42)
\end{cases}$$

的基础解系.

令 $u = R(\rho)\Phi(\theta)H(z)$,代入方程(2-40),得

$$\Phi'' + k\Phi = 0, \tag{2-43}$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda\rho^2 - k)R = 0, \tag{2-44}$$

$$H'' - \lambda H = 0. \tag{2-45}$$

由周期性条件 $\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta)$,得方程(2-43)的本征值 $k_n = n^2$,相应的本征函数 $\Phi_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta\ (n = 0,1,2,\cdots)$. 由齐次边界条件(2-41),得方程(2-44)的本征值问题:

$$\begin{cases}
\rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda\rho^2 - n^2)R = 0, \\
|R(0)| < +\infty, R(l) = 0.
\end{cases}$$

解得本征值 $\lambda_m = \left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2 (m = 1,2,\cdots)$,其中 $\mu_m^{(n)}$ 为 $J_n(x)$ 第 m 个正零点;相应的

本征函数

$$R_{n,m}(\rho)=C_{n,m}\mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right).$$

将 $\lambda_m=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2$ 代入方程(2-45),得方程

$$H''-\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2H=0,$$

其通解

$$H_{n,m}(z)=D_{n,m}\cosh\frac{\mu_m^{(n)}z}{l}+E_{n,m}\sinh\frac{\mu_m^{(n)}z}{l}.$$

于是,所求的基础解系为

$$u_{n,m}(\rho,\theta,z)=\mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cosh\frac{\mu_m^{(n)}z}{l}\\ \sinh\frac{\mu_m^{(n)}z}{l}\end{Bmatrix}.$$

如果要求边值问题级数形式的解,就需把各基础解叠加,这时得到二重级数,其中4组系数由边界条件(2-42)式确定,即按二元函数系 $\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}\mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right)$ 展开为广义傅里叶级数.

例3 解边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0\quad(\rho<l,0<z<h),\\ u_\rho(l,\theta,z)=0,|u(0,\theta,z)|<+\infty,\\ u(\rho,\theta,0)=g_1(\rho),u(\rho,\theta,h)=g_2(\rho).\end{cases}$$

解 由边界条件及区域的对称性,可知 $u=u(\rho,z)$,因此令 $u=R(\rho)H(z)$,代入上述方程得

$$\rho^2R''+\rho R'+\lambda\rho^2R=0,$$
$$H''-\lambda H=0.$$

由齐次边界条件 $u_\rho(l,\theta,z)=0$ 得 $R'(\rho)=0$,从而构成本征值问题

$$\begin{cases}\rho^2R''+\rho R'+\lambda\rho^2R=0,\\ |R(0)|<+\infty,R'(l)=0.\end{cases}$$

这里方程是零阶贝塞尔方程,其有界解为

$$R(\rho)=A\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}\rho).$$

由条件 $R'(l)=0$ 得

$$A\mathrm{J}'_0(\sqrt{\lambda}l)=0,$$

又由递推公式 $\mathrm{J}'_0(x)=-\mathrm{J}_1(x)$ 得

$$\mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda}l)=0.$$

于是得到本征值

$$\lambda_m = \left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\right)^2 \quad (m=0,1,2,\cdots),$$

其中 $\lambda_0 = 0$ ($J_1(0)=0$),相应的本征函数

$$\begin{cases} R_0(\rho) = A_0, \\ R_m(\rho) = A_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right) \quad (m=1,2,\cdots). \end{cases}$$

将 λ_m 的值代人方程 $H'' - \lambda H = 0$,解得

$$H_0(z) = C_0 + D_0 z,$$

$$H_m(z) = C_m \cosh\frac{\mu_m^{(1)} z}{l} + D_m \sinh\frac{\mu_m^{(1)} z}{l}.$$

从而得基础解(因 $J_0(0)=1$):

$$u_0 = a_0 + b_0 z,$$

$$u_m = R_m(\rho) H_m(z).$$

叠加得级数形式的解

$$u(\rho,z) = a_0 + b_0 z + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cosh\frac{\mu_m^{(1)} z}{l} + b_m \sinh\frac{\mu_m^{(1)} z}{l}\right) J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right).$$

由非齐次边界条件,得

$$\begin{cases} g_1(\rho) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right), \\ g_2(\rho) = a_0 + b_0 h + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cosh\frac{\mu_m^{(1)} h}{l} + b_m \sinh\frac{\mu_m^{(1)} h}{l}\right) J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right). \end{cases}$$

由系数公式(2-33),(2-28)得

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{l^2}\int_0^l \rho g_1(\rho)\,d\rho = g_{10}, \\ a_0 + b_0 h = \frac{2}{l^2}\int_0^l \rho g_2(\rho)\,d\rho = g_{20}; \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} a_m = \frac{2}{l^2 J_0^2(\mu_m^{(1)})}\int_0^l \rho g_1(\rho) J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right) d\rho = g_{1m}, \\ a_m \cosh\frac{\mu_m^{(1)} h}{l} + b_m \sinh\frac{\mu_m^{(1)} h}{l} = \frac{2}{l^2 J_0^2(\mu_m^{(1)})}\int_0^l \rho g_2(\rho) J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right) d\rho = g_{2m}, \end{cases}$$

解得系数值

$$a_0 = g_{10},$$

$$b_0 = \frac{1}{h}(g_{20} - a_0),$$

$$a_m = g_{1m},$$

$$b_m = \frac{1}{\sinh\frac{\mu_m^{(1)} h}{l}}\left(g_{2m} - a_m \cosh\frac{\mu_m^{(1)} h}{l}\right) \quad (m = 1,2,\cdots).$$

2.4.2 混合问题

一般说来，由发展型方程的混合问题将导出高阶的贝塞尔方程. 为简单起见，只讨论轴对称情形：解圆形膜的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho}u_\rho\right) \quad (\rho < l, t > 0), & (2\text{-}46) \\ u(l,t) = 0,\ |u(0,t)| < +\infty, & (2\text{-}47) \\ u(\rho,0) = f_1(\rho),\ u_t(\rho,0) = f_2(\rho). & (2\text{-}48) \end{cases}$$

令 $u = R(\rho)T(t)$，代入方程(2-46)，得本征值问题

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' + \lambda\rho^2 R = 0, & (2\text{-}49) \\ |R(0)| < +\infty, R(l) = 0 & (2\text{-}50) \end{cases}$$

与方程

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{2-51}$$

仿前可得本征值

$$\lambda_m = \left(\frac{\mu_m}{l}\right)^2 (m = 1,2,\cdots),$$

其中 μ_m 是 $J_0(x)$ 的第 m 个正零点，相应的本征函数

$$R_m(\rho) = A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right).$$

将 λ_m 的值代入方程(2-51)，得解

$$T_m(t) = C_m \cos\frac{a\mu_m t}{l} + D_m \sin\frac{a\mu_m t}{l}.$$

从而得基础解

$$u_m(\rho,t) = R_m(\rho)T_m(t),$$

叠加得级数形式的解

$$u(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{a\mu_m t}{l} + b_m\sin\frac{a\mu_m t}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right).$$

由初始条件(2-48)式确定 a_m, b_m：

$$\begin{cases} f_1(\rho) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right), \\ f_2(\rho) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left(b_m\frac{a\mu_m}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right). \end{cases}$$

由系数公式(2-38)，(2-33)得

$$\begin{cases} a_m = \dfrac{2}{l^2 J_1^2(\mu_m)}\displaystyle\int_0^l \rho f_1(\rho) J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right)d\rho, \\ b_m = \dfrac{2}{al\,\mu_m J_1^2(\mu_m)}\displaystyle\int_0^l \rho f_2(\rho) J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right)d\rho. \end{cases}$$

例 4 解热传导问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho} u_\rho \quad (0 < \rho < 1, t > 0), \\ u(1,t) = 0, \ | u(0,t) | < +\infty, \\ u(\rho,0) = 1 - \rho^2. \end{cases}$$

解 仿前面混合问题的求解得级数形式的解

$$u(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \exp(-\mu_m^2 t) \mathrm{J}_0(\mu_m \rho),$$

其中 μ_m 为 $\mathrm{J}_0(x)$ 的第 m 个正零点.

由初始条件,得

$$u(\rho,0) = 1 - \rho^2 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \mathrm{J}_0(\mu_m \rho),$$

又由例1的计算得

$$c_m = \frac{4\mathrm{J}_2(\mu_m)}{\mu_m^2 \mathrm{J}_1^2(\mu_m)}.$$

于是得所求的解为

$$u(\rho,t) = 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_2(\mu_m)}{\mu_m^2 \mathrm{J}_1^2(\mu_m)} \exp(-\mu_m^2 t) \mathrm{J}_0(\mu_m \rho).$$

例5 圆盘作径向振动,偏位移 $u(\rho,t)$ 满足

$$u_{tt} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho - \frac{4}{\rho^2} u_t,$$

试确定圆盘的半径 l,使得其中一个基础振动(简谐振动)的角频率为定值 ω(设圆盘的边界固定).

解 令 $u(\rho,t) = R(\rho)T(t)$,代入方程得

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda\rho^2 - 4)R = 0,$$
$$T'' + \lambda T = 0.$$

第一个方程是二阶贝塞尔方程,其有界解为

$$R(\rho) = A\mathrm{J}_2(\sqrt{\lambda}\rho).$$

由齐次边界条件 $R(l) = 0$ 得

$$\lambda_m = \left(\frac{\mu_m^{(2)}}{l}\right)^2 \quad (m = 1,2,\cdots),$$

其中 $\mu_m^{(2)}$ 为 $\mathrm{J}_2(x)$ 的第 m 个正零点.

将 λ_m 的值代入第二个方程,得通解

$$T_m(t) = A_m \cos\left(\frac{\mu_m^{(2)}}{l} t - \theta_m\right).$$

可见振动角频率为$\dfrac{\mu_m^{(2)}}{l}$.令 $\omega = \dfrac{\mu_1^{(2)}}{l}$,得 $l = \dfrac{\mu_1^{(2)}}{\omega}$.其中 $\mu_1^{(2)}$ 为 $\mathrm{J}_2(x)$ 的第一个正零点,$\mu_1^{(2)} = 5.136$,因此半径应取 $l = \dfrac{5.136}{\omega}$.

3 正交多项式

3.1 勒让德多项式

3.1.1 勒让德多项式的定义

勒让德多项式是下列勒让德(Legendre)方程

$$P''(\theta)+\cot\theta P'(\theta)+n(n+1)P(\theta)=0 \tag{3-1}$$

或(令 $x=\cos\theta$ 且记 $y(x)\equiv P(\theta)$, $-1\leqslant x\leqslant 1$)

$$(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+n(n+1)y(x)=0 \tag{3-2}$$

的多项式解.

勒让德方程来源于用分离变量法把球面坐标下的**拉普拉斯方程** $\Delta u=0$ 分解为3个常微分方程,在轴对称情形下,其纬度方程就是勒让德方程(3-1)或(3-2).

可用级数解法求解方程(3-2),由富克斯(Fuchs)定理可知存在幂级数解,即可令解

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,$$

将上式代入(3-2)式,得系数间的递推关系

$$c_{k+2}=-\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k. \tag{3-3}$$

因此方程(3-2)的两个线性无关的升幂解为

$$y_1(x)=c_0\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4+\cdots\right], \tag{3-4}$$

$$y_2(x)=c_2\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-\cdots\right]. \tag{3-5}$$

从而得到方程(3-2)的通解

$$y(x)=Ay_1(x)+By_2(x),$$

其中 A,B 为任意常数.

由系数间的关系式(3-3)中的分子的组成结构可知,当且仅当 n 为正偶数(包括零)或负奇数时,$y_1(x)$ 为 n 次或 $(-n-1)$ 次多项式,但 $y_2(x)$ 仍为无穷级数;当且仅当 n 为正奇数或负偶数时,$y_2(x)$ 为 n 次或 $(-n-1)$ 次多项式,$y_1(x)$ 是无穷级数.

通常把勒让德方程(3-2)的多项式形式的解叫做第一类**勒让德函数**(记作 $P_n(x)$). 它在闭区间$[-1,1]$上有界;而把级数形式的解叫做第二类勒让德函数(记为 $Q_n(x)$),它在闭区间$[-1,1]$上无界.

当 n 为偶数时，$\overline{P_n}(x)$ 是由(3-4)式得到的偶次幂多项式；当 n 为奇数时，是由(3-5)式得到的奇次幂多项式，为了用统一的式子表示，把它们按降幂排列，并把一切系数 c_k 都用 c_n 表示，这样取定 c_n 一个非零的值，就得到一个确定的第一类勒让德函数，在应用上，选取 c_n 为

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2},$$

然后由(3-3)式定出其他系数 $c_{n-2}, c_{n-4}, \cdots$，得到的 n 次多项式称为**勒让德多项式**，用 $\mathrm{P}_n(x)$ 表示：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n(x) &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right] \\ &= \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m},\end{aligned} \tag{3-6}$$

其中 $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}$（$n$ 为偶数）或者 $= \frac{n-1}{2}$（n 为奇数）.

特别地，前几个勒让德多项式是

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_0(x) &= 1,\\ \mathrm{P}_1(x) &= x,\\ \mathrm{P}_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1),\\ \mathrm{P}_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x),\\ \mathrm{P}_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),\\ \mathrm{P}_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),\\ \mathrm{P}_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5).\end{aligned}$$

综上，n 次勒让德多项式是由以下3个条件确定的函数：

1° 是勒让德方程(3-2)的解；

2° 是 n 次多项式形式的解；

3° n 次幂 x^n 的系数 $c_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

符合以上3个条件的函数必定是 $\mathrm{P}_n(x)$.

3.1.2 勒让德多项式的性质

1. $\mathrm{P}_n(x)$ 的微分表达式与积分表达式

勒让德多项式 $\mathrm{P}_n(x)$ 可用函数 $v(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n$ 的 n 阶导数来表示：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{3-7}$$

这公式称为罗德里格(Rodrigue)公式，它可以直接利用二项式定理将$(x^2-1)^n$展开后再逐项微分n次得到.

根据复变函数中高阶导数的积分公式，微分表达式(3-7)可表示为复积分：

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^n}\oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz. \tag{3-8}$$

其中C为z平面上围绕$z=x$点的任意闭曲线，关系式(3-8)叫做薛拉夫利(Schlafli)积分.(3-8)式可进一步表示为定积分：

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x+\sqrt{x^2-1}\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right]^n d\varphi.$$

回到原来变量θ：$x=\cos\theta$，有

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n d\varphi. \tag{3-9}$$

这积分叫做**拉普拉斯积分**. 由此即得

$$|P_n(x)| \leqslant 1, P_n(1) = 1 \text{ 及 } P_n(-1) = (-1)^n.$$

2. 母函数及递推公式

勒让德多项式早先是由勒让德在势论中引进的. 它与两共点矢量$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$间的距离R的倒数$\frac{1}{R}$(牛顿势或库仑势)的展开有关.

$$R = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \quad (\theta = (\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'})).$$

令$t=\frac{r'}{r}$，$x=\cos\theta$，则

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

只要$|t|<\min(x\pm\sqrt{x^2-1})$，就可以作泰勒展开：

$$G(x,t) \equiv (1-2xt+t^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, \tag{3-10}$$

其中$P_n(x)$正好是n次勒让德多项式. 因此(3-10)式左方称为勒让德多项式的**母函数**.

特别，在(3-10)式中分别令$x=1,-1,0$，即得

$$P_n(1) = 1,$$
$$P_n(-1) = (-1)^n;$$
$$P_n(0) = 0 (n \text{ 为奇数}),$$
$$P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{(n-1)!!}{n!!} (n \text{ 为偶数}).$$

将(3-10)式两边对t求导，然后比较两边t^n的系数，即得递推公式$(n\geqslant 1)$：

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \tag{3-11}$$

将(3-10)式两边对x求导，可得微商的递推公式$(n\geqslant 1)$：

$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x). \tag{3-12}$$

并且由(3-11)式与(3-12)式，可得第3个递推公式($n \geq 1$)：

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x).$$

3. 傅里叶-勒让德多项式级数

勒让德多项式的全体$\{P_n(x)\}$在区间$[-1,1]$上构成一个完备的带权1的正交函数系，即

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (k \neq n), \\ N_n^2 & (k = n), \end{cases} \tag{3-13}$$

或

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & (k \neq n), \\ N_n^2 & (k = n). \end{cases} \tag{3-14}$$

并且对满足一定条件的函数$f(x)$，可按这函数系展开为傅里叶-勒让德多项式级数，即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (-1 < x < 1), \tag{3-15}$$

或

$$f(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\theta) \quad (0 < \theta < \pi). \tag{3-16}$$

其中系数

$$c_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x}. \tag{3-17}$$

(3-13)式与(3-14)式中的N_n是$P_n(x)$的模：

$$N_n^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}. \tag{3-18}$$

作为例子，将函数$f(x) = |x|$在$(-1,1)$内展为傅里叶-勒让德多项式级数. 由于$f(x) = |x|$是偶函数，故它的展开式中的系数$c_{2k+1} = 0$ $(k = 0,1,2,\cdots)$.

按(3-17)，(3-18)式计算系数：

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |x|\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{4k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_{2k}(x)\mathrm{d}x = (4k+1)\int_0^1 xP_{2k}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\left\{x\frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}}[(x^2-1)^{2k}] - \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}x^{2k-2}}[(x^2-1)^{2k}]\right\}\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}x^{2k-2}}\left[\sum_{m=0}^{2k}\frac{(2k)!}{m!(2k-m)!}x^{2m}(-1)^{2k-m}\right]_{x=0} \\ &= (-1)^{k+1}\frac{(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}. \end{aligned}$$

因此所求的展开式为

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}\mathrm{P}_k(x)\quad(-1<x<1).$$

3.1.3 连带勒让德函数

把拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 分解为 3 个常微分方程时，在一般情形下，纬度方程为连带勒让德方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P(\theta)=0,\qquad(3\text{-}19)$$

或（令 $x=\cos\theta,y(x)=P(\arccos x)$）

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0.\qquad(3\text{-}20)$$

为求解方程(3-20)，对勒让德方程(3-2)微分 m 次，则导函数 $w(x)\equiv\mathrm{P}_n^{(m)}(x)=\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}$满足方程

$$(1-x^2)w''-2x(m+1)w'+[n(n+1)-m(m+1)]w=0.$$

作变换 $v(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}w$，则上式化为连带勒让德方程(3-20)，其中 $y(x)$换成 $v(x)$. 这说明函数

$$\mathrm{P}_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)\qquad(3\text{-}21)$$

是连带勒让德方程(3-20)的解，通常把这个函数 $\mathrm{P}_n^m(x)$称为**连带勒让德函数**.

前几个连带勒让德函数是（当 $m>n$ 时，$\mathrm{P}_n^m(x)\equiv 0$）：

$$\mathrm{P}_n^0(x)=\mathrm{P}_n(x),$$
$$\mathrm{P}_1^1(x)=\sqrt{1-x^2},$$
$$\mathrm{P}_2^1(x)=3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$\mathrm{P}_2^2(x)=3(1-x^2),$$
$$\mathrm{P}_3^1(x)=\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$\mathrm{P}_3^2(x)=15x(1-x^2),$$
$$\mathrm{P}_3^3(x)=15(1-x^2)^{3/2}.$$

把 $\mathrm{P}_n(x)$的微分表达式代入(3-21)式得罗德里格公式：

$$\mathrm{P}_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}[(x^2-1)^n].\qquad(3\text{-}22)$$

如果把方程(3-20)中的 m 换成 $-m$，方程并不改变，因此函数

$$\mathrm{P}_n^{-m}(x)=(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}[(x^2-1)^n]\qquad(3\text{-}23)$$

也是方程(3-20)的解，这函数也称为连带勒让德函数.

比较 $P_n^m(x)$ 和 $P_n^{-m}(x)$ 两函数最高次幂的系数,可得

$$P_n^m(x) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} P_n^{-m}(x). \tag{3-24}$$

对满足一定条件的函数 $f(x)$,可展为傅里叶-连带勒让德函数项级数,即(取固定 m)

$$f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n P_n^m(x), \tag{3-25}$$

或

$$f(\cos\theta) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n P_n^m(\cos\theta), \tag{3-26}$$

其中系数

$$c_n = \frac{(2n+1)}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} f(x) P_n^m(x) \mathrm{d}x, \tag{3-27}$$

或

$$c_n = \frac{(2n+1)}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta. \tag{3-28}$$

3.1.4 勒让德多项式的应用

(1) 求解球域内轴对称的第一边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, & (3\text{-}29) \\ u(r_0,\theta,\varphi) = g(\theta) \quad (r<r_0, 0\leqslant\theta\leqslant\pi). & (3\text{-}30) \end{cases}$$

因为区域是对称的球体,边界条件中的函数 $g(\theta)$ 只与 θ 有关,所以是轴对称:$u=u(r,\theta)$.

令 $u(r,\theta)=R(r)P(\theta)$,代入方程(3-29),得(这时 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$)径向方程

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 \tag{3-31}$$

与纬度方程

$$P'' + \cot\theta P' + n(n+1)P = 0. \tag{3-32}$$

方程(3-32)满足自然边界条件

$$|P(0)| < +\infty, \ |P(\pi)| < +\infty, \tag{3-33}$$

它们构成的本征值问题的解是:本征值为

$$\lambda_n = n(n+1) \quad (n=0,1,2,\cdots), \tag{3-34}$$

对应的本征函数为

$$P_n = B_n P_n(\cos\theta), \tag{3-35}$$

其中 $P_n(x)$ 为 n 次勒让德多项式.

方程(3-31)是欧拉方程,其通解为

$$R = Ar^n + Br^{-(n+1)}. \tag{3-36}$$

因为是球内问题,在有界性条件 $|u(0,\theta)|<+\infty$ 下,要求 $R(0)$ 有界,所以 $B=0$,从

而

$$R_n = A_n r^n. \tag{3-37}$$

因此基础解为

$$u_n(r,\theta) = a_n r^n \mathrm{P}_n(\cos\theta). \tag{3-38}$$

将上式叠加得级数形式的解

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{P}_n(\cos\theta). \tag{3-39}$$

把边界条件(3-30)式代入上式,得

$$u(r_0,\theta) = g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n r_0^n)\mathrm{P}_n(\cos\theta).$$

这说明 $a_n r_0^n$ 是 $g(\theta)$ 按 $\{\mathrm{P}_n(\cos\theta)\}$ 展开的系数,根据公式(3-17),(3-18)得

$$a_n = \frac{2n+1}{2r_0^n}\int_0^{\pi} g(\theta)\mathrm{P}_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{3-40}$$

这样,由(3-39)式与(3-40)式就组成了边值问题(3-29)式与(3-30)式的级数形式的解:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} g(\theta)\mathrm{P}_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \mathrm{P}_n(\cos\theta) \quad (r < r_0). \tag{3-41}$$

如果是讨论球体外部的边值问题,那么由有界性条件 $u\to 0(r\to +\infty)$,可得方程(3-31)的解为

$$R_n = c_n r^{-(n+1)},$$

这时基础解为

$$u_n(r,\theta) = b_n r^{-(n+1)}\mathrm{P}_n(\cos\theta), \tag{3-42}$$

同样可得级数形式的解为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} g(\theta)\mathrm{P}_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}\mathrm{P}_n(\cos\theta) \quad (r > r_0). \tag{3-43}$$

如果区域是由两个同心球面所围成的球套区域,那么方程(3-31)的通解为(3-36)式,这时有两个不同形式的基础解(3-38)式与(3-42)式,叠加后得级数形式的解

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{-(n+1)})\mathrm{P}_n(\cos\theta). \tag{3-44}$$

再由内外边界条件

$$u(r,\theta) = g_1(\theta),\ u(r_2,\theta) = g_2(\theta)$$

可确定出系数 a_n, b_n.

例1　在均匀静电场 E 中,放入均匀介质球(设半径为1,介电常数为 ε),试求介质球内外的电场强度.

解　采用球面坐标,取球心在原点,$\bar{E}$ 方向为 Oz 轴正向,于是给定问题是轴对

称问题.

在球内,电势 u_i 满足拉普拉斯方程

$$\Delta u_i = 0 \quad (r<1),$$

并且在球面上满足连续性条件

$$u_i|_{r=1} = u_0|_{r=1}, \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial u_i}{\partial r}\bigg|_{r=1} = \varepsilon_0 \frac{\partial u_0}{\partial r}\bigg|_{r=1},$$

其中 ε_0 为介电系数比.按前面的分析,可得

$$u_i(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{P}_n(\cos\theta).$$

在球外,电势 u_0 满足拉普拉斯方程

$$\Delta u_0 = 0 \quad (r > 1),$$

且在无穷远处,电势的大小应保持均匀值,即由 $\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}u_0 = \left(0,0,-\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)$ 或 $\frac{\partial u_0}{\partial z} = -E$ 得在无穷远处的条件

$$u_0|_{r\to+\infty} \sim -Ez = -Er\cos\theta.$$

按前面的说明,可得

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n r^n + c_n r^{-(n+1)})\mathrm{P}_n(\cos\theta).$$

由无穷远处条件,得渐近式

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n \mathrm{P}_n(\cos\theta) \sim -Er\cos\theta,$$

从而得 $b_1 = -E, b_2 = b_3 = \cdots = 0$.因此外电势 u_0 可表示为

$$u_0 = b_0 - Er\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{-(n+1)}\mathrm{P}_n(\cos\theta).$$

再由连续性条件,得

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{P}_n(\cos\theta) = b_0 - E\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{P}_n(\cos\theta), \\ \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \mathrm{P}_n(\cos\theta) = -E\mathrm{P}_1(\cos\theta) - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n \mathrm{P}_n(\cos\theta). \end{cases}$$

比较恒等式两边 $\mathrm{P}_n(\cos\theta)$ 的系数,得

$$\begin{cases} a_0 = b_0 + c_0, \\ c_0 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -E + c_1, \\ \varepsilon a_1 = -E - 2c_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = c_n, \\ \varepsilon n a_n = -(n+1)c_n \quad (n \geqslant 2). \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} a_0 = b_0, \\ c_0 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{3}{\varepsilon+2}E, \\ c_2 = \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}E. \end{cases}$$

因此内外电势分别为

$$\begin{cases} u_i = b_0 - \dfrac{3}{\varepsilon+2}Er\cos\theta = b_0 - \dfrac{3}{\varepsilon+2}Ez, \\ u_0 = b_0 - Er\cos\theta + \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}E\dfrac{1}{r^2}\cos\theta. \end{cases}$$

从而介质球内场强(方向为 Oz 轴正向)的大小为

$$E_i = -\frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{3}{\varepsilon+2}E_0,$$

它仍是一个均匀电场,且按比率$\dfrac{3}{\varepsilon+2}$削弱了.介质球外部的强度大小为

$$E_0 = -\frac{\partial u_0}{\partial z} = E - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{E}{r^3}.$$

(2) 求解球域内边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad (r < r_0, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi < 2\pi), & (3\text{-}45) \\ u(r_0, \theta, \varphi) = g(\theta, \varphi) & (3\text{-}46) \end{cases}$$

的基础解.

令 $u(r,\theta,\varphi) = R(r)P(\theta)\Phi(\varphi)$,代入方程(3-45),并注意到自然边界条件.则经度本征值问题为

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases}$$

解得本征值 $\mu_m = m^2 (m = 0,1,2,\cdots)$,对应的本征函数为

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}.$$

纬度本征值问题为

$$\begin{cases} P'' + \cot\theta P' + \left[n(n+1) - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta} \right] P = 0, \\ |P(0)| < +\infty, |P(\pi)| < +\infty. \end{cases}$$

解得本征值 $\lambda_n = n(n+1)\ (n = 0,1,2,\cdots)$,对应的本征函数为

$$\mathrm{P}_{n,m}(\theta) = \mathrm{P}_n^m(\cos\theta),$$

其中 $\mathrm{P}_n^m(x)$为连带勒让德函数.

径向方程

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

的有界解($|R(0)| < +\infty$)为 $R_n(r) = r^n$,因此所求基础解为

$$u_{n,m}(r,\theta,\varphi)=r^n\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}.$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,n$；$n=0,1,2,\cdots$.

上式中的函数是球体内的调和函数，因此把它称为 n 阶球谐函数.

同样，可求得球体外的边值问题的基础解为 n 阶球谐函数，即

$$u_{n,m}(r,\theta,\varphi)=r^{-(n+1)}\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix},$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,n$；$n=0,1,2,\cdots$.

3.2　埃尔米特多项式

3.2.1　埃尔米特多项式的定义

埃尔米特多项式是下列埃尔米特(Hermite)方程的多项式形式的解，即

$$y''-2xy'+2ny=0, \tag{3-47}$$

其中 n 为给定实数.

用幂级数解法解这个方程.设

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,$$

并代入方程(3-47)，得系数间的递推关系式

$$c_{k+2}=\frac{2(k-n)}{(k+2)(k+1)}c_k. \tag{3-48}$$

当 $k=2l-2$ 时，c_{2l}均可用c_0 表示：

$$c_{2l}=\frac{2^l(2l-2-n)(2l-4-n)\cdots(2-n)(-n)}{(2l)!}c_0, \tag{3-49}$$

当 $k=2l-1$ 时，c_{2l+1}均可用 c_1 表示：

$$c_{2l+1}=\frac{2^l(2l-1-n)(2l-3-n)\cdots(3-n)(1-n)}{(2l+1)!}c_1. \tag{3-50}$$

于是得方程(3-47)级数形式的解

$$y=c_0\left[1-nx^2+\frac{n(n-2)}{6}x^4-\cdots\right]+c_1\left[x-\frac{n-1}{3}x^3+\frac{(n-1)(n-3)}{30}x^5-\cdots\right].$$

上式中两级数的收敛半径均为 $+\infty$，其和函数分别记为 $y_1(x)$和 $y_2(x)$：

$$y_1(x)=1-nx^2+\frac{n(n-2)}{6}x^4-\cdots+(-2)^l\frac{n(n-2)\cdots(n-2l-2)}{(2l)!}x^{2l}+\cdots, \tag{3-51}$$

$$y_2(x)=x-\frac{n-1}{3}x^3+\cdots+(-2)^l\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2l-1)}{(2l+1)!}x^{2l+1}+\cdots \tag{3-52}$$

于是方程(3-47)的通解为

$$y=Ay_1(x)+By_2(x),$$

其中 A,B 为任意常数.

由(3-51)式与(3-52)式可知,当且仅当 n 为偶数时(包括零),$y_1(x)$为 n 次多项式(这时 $y_2(x)$仍为级数);当且仅当 n 为奇数时,$y_2(x)$为 n 次多项式(这时 $y_1(x)$仍为级数),因此要求方程(3-49)具有多项式的解(实际问题提出这个条件),那么方程(3-47)中的参数 n 应取非负整数,这时方程的解为

$$y = c\mathrm{H}_n(x),$$

其中 c 为任意常数,$\mathrm{H}_n(x)$为如下的 n 次多项式:

当 $n=0,2,4,\cdots,2m$ 时,

$$\mathrm{H}_n(x) = c_0\left[1 - nx^2 + \frac{n(n-2)}{6}x^4 - \cdots + \frac{c_{2m}x^{2m}}{c_0}\right], \tag{3-53}$$

当 $n=1,3,5,\cdots,2m+1$ 时,

$$\mathrm{H}_n(x) = c_1\left[x - \frac{n-1}{3}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)}{30}x^5 - \cdots + \frac{c_{2m+1}}{c_1}x^{2m+1}\right], \tag{3-54}$$

其中系数 c_{2m},c_{2m+1}分别由(3-49)式,(3-50)式确定.

为把(3-53)式与(3-54)式用统一式子表示,把系数递推公式改写为

$$c_k = -\frac{(k+2)(k+1)}{2(n-k)}c_{k+2},$$

这时所有的系数 $c_k(k<n)$都可用 c_n 表示为

$$c_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2\cdot 2}c_n,$$

$$c_{n-4} = (-1)^2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2\cdot 4}c_n,$$

$$c_{n-6} = (-1)^3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6}.$$

因此,如果 n 为非负整数,则取定 c_n 的一个值,就得到一个 n 次多项式 $\widetilde{H}_n(x)$. 当 $n=0,2,4,\cdots,2l$ 时,

$$\widetilde{H}_n = c_n\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot 2}x^{n-2} + \cdots + \frac{c_0}{c_n}\right],$$

当 $n=1,3,\cdots,2l+1$ 时,

$$\widetilde{H}_n = c_n\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot 2}x^{n-2} + \cdots + \frac{c_1}{c_n}\right].$$

在应用上,取 $c_n=2^n$,这时系数的一般表达式为

$$c_{n-2m} = (-1)^m\frac{n!}{m!\,(n-2m)!}2^{n-2m},$$

从而得到相应的多项式的表达式(记为 $\mathrm{H}_n(x)$):

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{n!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}. \tag{3-55}$$

由(3-55)式定义的多项式 $\mathrm{H}_n(x)$称为 n 次**埃尔米特多项式**. 它是满足下列3个条件的函数:

1° 是方程(3-47)当 n 为非负整数时的解；
2° 是 n 次多项式形式的解；
3° n 次幂 x^n 的系数 $c_n = 2^n$.
前几个 $\mathrm{H}_n(x)$ 的具体表达式是

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}_0(x) = 1,\\
&\mathrm{H}_1(x) = 2x,\\
&\mathrm{H}_2(x) = 4x^2 - 2,\\
&\mathrm{H}_3(x) = 8x^3 - 12x,\\
&\mathrm{H}_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,\\
&\mathrm{H}_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.
\end{aligned}$$

3.2.2 埃尔米特多项式的性质

1. 微分表达式

埃尔米特多项式的微分表达式为

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2}). \tag{3-56}$$

事实上，函数 $v(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ 是方程

$$v' + 2xv = 0$$

的解，将上式再求 $(n+1)$ 阶导数，并记 $y(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n v}{\mathrm{d}x^n}$，则 $y(x)$ 满足埃尔米特方程(3-47)，又(3-56)式的右边显然是一个 n 次多项式，且 x^n 的系数 $c_n = (-1)^n(-2)^n = 2^n$，因此它是 n 次埃尔米特多项式 $\mathrm{H}_n(x)$.

2. 正交性与模

埃尔米特多项式 $\{\mathrm{H}_n(x)\}$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 上带权 $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ 正交的函数系，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{H}_n(x) \mathrm{H}_m(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ N_n^2 & (m = n). \end{cases} \tag{3-57}$$

事实上，当 $m \neq n$（不妨设 $m < n$）时，由微分表达式(3-56)有

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{H}_n(x) \mathrm{H}_m(x) \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2}) \mathrm{H}_m(x) \mathrm{d}x \\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{H}_m(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2}) \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

上式右边进行 m 次分部积分，得积分值为0.

当 $m = n$ 时，可得 $\mathrm{H}_n(x)$ 的模为

$$\begin{aligned}
N_n &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{H}_n^2(x) \mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{(-1)^{2n} \cdot 2^n \cdot n! \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x} = \sqrt{2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}}.
\end{aligned} \tag{3-58}$$

3.2.3 埃尔米特多项式的应用

1. 薛定谔方程

在20世纪30年代,物理学家们根据实验得到微观粒子(光子、电子等)的波粒二象性,建立了非相对论量子力学的基本方程——薛定谔(Schrödinger)方程:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + \bar{U}\Psi, \tag{3-59}$$

这里 $i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位,$\hbar=\frac{h}{2\pi}=1.0545\times10^{-24}\mathrm{J\cdot S}$ 是修正的普朗克(Planck)常数,μ 是粒子的质量. 已知函数 $\bar{U}$ 为粒子在力场中的势能函数,未知函数 $\Psi=\Psi(x,y,z,t)$ 叫做波函数,其物理意义:$|\Psi|^2$ 是在时间 t 在(x,y,z)处粒子的概率密度函数.

如果势函数 $\bar{U}$ 与时间 t 无关,则可令

$$\Psi=\phi(x,y,z)\cdot f(t),$$

使得方程(3-59)简化为分离变量的等价方程

$$\frac{i\hbar}{f}f'=\frac{1}{\Psi}\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi+\bar{U}\Psi\right),$$

记上式等于常数 E(粒子的质量),从而得到时间方程与空间方程:

$$i\hbar f'-Ef=0 \tag{3-60}$$

与

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi+\bar{U}(x,y,z)\Psi-E\Psi=0. \tag{3-61}$$

方程(3-60)的解为

$$f(t)=c\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right),$$

于是方程(3-59)的解呈以下形式

$$\Psi=\Psi(x,y,z)\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right), \tag{3-62}$$

其中 $\Psi(x,y,z)$ 叫做定态波函数. 方程(3-61)叫做定态的薛定谔方程,引入哈密顿(Hamilton)算符 $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta+\bar{U}$,则方程(3-61)化为 $\hat{E}\Psi=E\Psi$. 根据密度函数的性质,$|\Psi|^2$ 在全空间的积分值为1:

$$\iiint|\Psi|^2\mathrm{d}V=1, \tag{3-63}$$

因为 $|\Psi|^2=\left|\Psi\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right)\right|^2=\Psi^2$,所以(3-63)式化为

$$\iiint\Psi^2\mathrm{d}V=1. \tag{3-64}$$

等式(3-63)与(3-64)在量子力学中叫做归一化条件.

由于在无穷远处粒子出现的概率为零,因此波函数还有如下性质:

$$\Psi(P)\to 0 \quad (\text{点 } P\to\infty). \tag{3-65}$$

2. 线性谐振子

线性谐振子是指如下的运动体系:势能为$\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$($\omega$ 是常数)的粒子运动.这时体系的薛定谔方程为

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\Psi}{dx^2}+(E-\frac{\mu\omega^2}{2}x^2)\Psi=0. \tag{3-66}$$

引入新变量与记号:$\xi=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x=\alpha x,\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$及$\lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}$.则方程(3-66)化为

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}+(\lambda-\xi^2)\Psi=0, \tag{3-67}$$

再引入新函数:$y(\xi)=\exp\left(\frac{\xi^2}{2}\right)\Psi(\xi)$,则方程(3-67)化为如下的埃尔米特方程

$$y''-2\xi y'+(\lambda-1)y=0. \tag{3-68}$$

这时 $2n=\lambda-1$.由目前的交换得波函数

$$\Psi(\xi)=\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)y(\xi).$$

根据(3-65)式知 $y(\xi)$应满足条件

$$\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)y(\xi)\to 0 \quad (\xi\to\pm\infty). \tag{3-69}$$

把 $\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$展为幂级数

$$\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)=1-\frac{\xi^2}{2}+\cdots+(-1)^k\frac{\epsilon^{2k}}{2^k\cdot k!}+\cdots.$$

要满足条件(3-69),$y(\xi)$不能为无穷级数,而应取为多项式,即应求解本征值问题:

$$\begin{cases} y''-2xy'+(\lambda-1)y=0,\\ y(x)\ \text{为多项式}(-\infty<x<+\infty). \end{cases} \tag{3-70}$$

问题(3-70)的解为:本征值 $\lambda-1=2n$,即 $\lambda_n=2n+1(n=0,1,\cdots)$,相应的本值函数为 $y_n(\xi)=\mathrm{H}_n(\xi)$,回到原变量与记号,得波函数

$$\Psi(x)=A_n\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}x\right)\mathrm{H}_n(\alpha x),$$

其中待定系数 A_n 由归一化条件(3-64)确定:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x)|^2dx=A_n^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2x^2}\mathrm{H}_n^2(\alpha x)dx$$
$$=\frac{A_n^2}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}\mathrm{H}_n^2(\xi)d\xi=1.$$

据 $\mathrm{H}_n(\xi)$模的公式(3-58),有$\frac{A_n^2}{\alpha}\cdot 2^n\cdot n!\ \sqrt{\pi}=1$,即 $A_n=\sqrt{\frac{\alpha}{2^n\cdot n!\ \sqrt{\pi}}},\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$,从

而所求波函数为

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n \cdot n!\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}x^2\right)\mathrm{H}_n(\alpha x), \tag{3-71}$$

其中 H_n 为 n 次埃尔米特多项式.

另一方面,由(3-70)式的本征值得

$$2n+1=\frac{2E}{\hbar\omega}$$

从而得到线性谐振子的能级为

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\quad(n=0,1,\cdots),$$

这说明该体系的能级是离散分布的,两相邻能级之差都是 $E_{n+1}-E_n=\hbar\omega$,这些结论与普朗克假设完全一致.

4 超几何函数与合流超几何函数

4.1 超几何级数与超几何函数

4.1.1 超几何级数与超几何函数的定义

超几何级数是下面超几何微分方程的级数解,即

$$z(1-z)w''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]w'-\alpha\beta w=0, \tag{4-1}$$

其中 z 是复变数,α、β、γ 是复常数.

方程(4-1)具有 3 个正则奇点 $0,1,\infty$.用级数解法.设

$$w(z)=\sum c_k z^{k+p}\quad(c_0\neq 0),$$

得在奇点 $z=0$ 处的两个指标,即 0 和 $1-\gamma$;此外系数之间的递推关系

$$c_k=\frac{(p+k-1+\alpha)(p+k-1+\beta)}{(p+k)(p+k-1+\gamma)}c_{k-1}. \tag{4-2}$$

设 $\gamma\neq$零或负整数,由此得指标为 0 的解

$$\begin{aligned}w_1=1&+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2+\cdots+\\&\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\ \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n+\cdots\end{aligned} \tag{4-3}$$

这级数的收敛半径是 1,而在 $|z|<1$ 的圆内代表一个解析函数.级数(4-3)称为超几何级数,常用下面的符号表达:

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n\quad(|z|<1), \tag{4-4}$$

其中引用简写记号

$$(\lambda)_0=1,$$

$$(\lambda)_n=\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}\quad(n\geqslant 1).$$

当 $\gamma\neq$ 整数时，在 $z=0$ 处(指标是 $1-\gamma$)的第二个线性无关解也可以用超几何级数表达：

$$w_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z).\tag{4-5}$$

根据微分方程的理论，只有方程的奇点才可能是解的奇点，因此级数(4-3)在单位圆 $|z|<1$ 内所表示的函数可以解析开拓到全 z 平面(除去奇点 $z=1$ 和 $z=\infty$ 两点). 这样开拓的函数称为**超几何函数**，仍用 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 表达. 除非 α 或者 β 是负整数，$z=1$ 和 $z=\infty$ 这两点一般是超几何函数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 的分支点；而在 α(或 β)是负整数时，级数(4-3)是一个多项式，因此 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 是沿实轴从 1 到 ∞ 割开的 z 平面上的一个单值解析函数；而级数(4-3)是这函数的一个单值支(当 $z=0$ 时函数值为 1 的那个分支)在 $|z|<1$ 时的幂级数表示.

许多初等函数可以用超几何函数表达，例如：

$$(1+z)^{\alpha}=F(-\alpha,\beta,\beta,-z),$$

$$\arcsin z=zF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},z^2\right),$$

$$\arctan z=zF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-z^2\right),$$

$$\ln(1+z)=zF(1,1,2,-z).$$

4.1.2 超几何函数的性质

1. 基本关系式

由定义有下列基本关系式

$$F(\alpha,\beta,\gamma,0)=1,$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=F(\beta,\alpha,\gamma,z).$$

2. 积分表达式

超几何函数的积分表达式有两种，一种是从超几何方程的积分解得到的；另一种积分表示则是从级数解导出的.

如果 $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\beta)>0$，则超几何方程的一个积分解是

$$w(z)=A\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\mathrm{d}t,\tag{4-6}$$

其中 A 是任意常数. 把 $(1-zt)^{-\alpha}$ 展开为一致收敛级数

$$(1-zt)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}(-zt)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}z^nt^n,$$

并代入(4-6)式，得

$$w(z)=A\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,z).$$

由此得到超几何函数的积分表达式

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\mathrm{d}t,\tag{4-7}$$

其中 $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\beta)>0$，$|\arg(1-z)|<\pi$. 由此知，$z=1$ 和 ∞ 一般是 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 的分支点.

由超几何方程的级数解可导出超几何函数的巴恩斯(Bernes)积分表达式：

$$\Gamma(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s\mathrm{d}s,\tag{4-8}$$

其中 $|\arg(-z)|<\pi$，$\beta\neq0,-1,-2,\cdots$，积分路线须使 $\Gamma(-s)$ 的极点在其右，$\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)$ 的极点在其左(巴恩斯围道)

3. $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ 之值

超几何函数在 $z=1$ 时的值可以从它的积分表达式(4-7)得到，即

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta,\gamma,1)&=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\\&(\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0,\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\beta)>0).\end{aligned}\tag{4-9}$$

4. 邻次函数之间的关系

设 l,m,n 是任意整数，则称函数

$$F(\alpha+l,\beta+m,\gamma+n,z)$$

为 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 的邻次函数. 在任意 3 个邻次函数 F_1,F_2,F_3 之间存在如下的关系：

$$A_1F_1+A_2F_2+A_3F_3=0,\tag{4-10}$$

其中 A_1,A_2,A_3 是 z 的有理函数. 这一定理可以利用超几何级数的积分表示来证明.

5. 递推关系

用几何函数的积分表示可以导出下列两个递推关系：

$$(\gamma-1)F(\gamma-1)-\alpha F(\alpha+1)-(\gamma-\alpha-1)F=0,\tag{4-11}$$

$$\gamma F-\beta zF(\beta+1,\gamma+1)-\gamma F(\alpha-1)=0,\tag{4-12}$$

其中 F 代表 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$；$F(\alpha\pm1),\cdots$ 代表 $F(\alpha,\beta,z)$ 的紧邻：

$$\begin{aligned}&F(\alpha\pm1)=F(\alpha\pm1,\beta,\gamma,z),\\&F(\beta\pm1)=F(\alpha,\beta\pm1,\gamma,z),\\&F(\gamma\pm1)=F(\alpha,\beta,\gamma\pm1,z),\\&F(\beta+1,\gamma+1)=F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,z),\\&\quad\vdots\end{aligned}$$

利用基本递推关系式(4-11)，(4-12)可导出所有的其他递推关系. 例如，把(4-11)式中的 α 和 β 对调后再与(4-11)式相减得

$$\alpha F(\alpha+1)-\beta F(\beta+1)-(\alpha-\beta)F=0.\tag{4-13}$$

另外一种重要的递推关系是

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+n,z),\tag{4-14}$$

这可由 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 的级数逐项求微商得到.

4.2 雅可比多项式

4.2.1 雅可比多项式的定义

超几何函数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 当 α 或 β 等于负整数 $-n$ 时是一个 n 次多项式,称为 n 次雅可比(Jacobi)多项式:

$$F(-n,\beta,\gamma,z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k} z^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k} z^k. \tag{4-15}$$

许多重要的正交多项式,如勒让德多项式、切比雪夫多项式等都是雅可比多项式的特殊情况.

4.2.2 雅可比多项式的性质

1. 求和公式

在(4-15)式中令 $z=1$,并用(4-9)式,即得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k} = F(-n,\beta,\gamma,1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n}. \tag{4-16}$$

2. 积分表达式

由于超几何方程对 α 和 β 是对称的,在(4-6)式中把 α 和 β 对调一下,仍得一个积分解式

$$w(z) = \int_C t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}\mathrm{d}t. \tag{4-17}$$

令 $\alpha=-n$,取 C 为正向绕 $t=0$ 点一周的围道,$t=1$ 和 $t=\frac{1}{z}$ 在 C 外,则只要 $|z|$ 足够小,使在 C 上 $|zt|<1$,有

$$(1-zt)^{-\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} (-zt)^k,$$

并代入(4-17)式的右边,可得

$$\int^{(0+)} t^{-n-1}(1-t)^{\gamma+n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} (-zt)^k \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n\Gamma(\gamma+n)2\pi\mathrm{i}}{n!\Gamma(\gamma)} F(-n,\beta,\gamma,z),$$

从而得积分表达式

$$F(-n,\beta,\gamma,z) = \frac{(-1)^n\Gamma(\gamma)n!}{\Gamma(\gamma+n)2\pi\mathrm{i}} \int^{(0+)} t^{-n-1}(1-t)^{\gamma+n-1}(1-zt)^{-\beta}\mathrm{d}t, \tag{4-18}$$

$t=1$ 和 $t=\frac{1}{z}$ 在围道之外，$|\arg(1-t)|<\pi$；当 $z=0$ 时，$(1-zt)^{-\beta}=1$；$\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots,-n+1$.

3. 母函数

在(4-18)式中令 $t=\frac{v}{(v-1)}$，得

$$(\gamma)_n F(-n,\beta,\gamma,z)=\frac{n!}{2\pi i}\int^{(0+)}\frac{(1-v)^{\beta-1}[1-(1-z)v]^{-\beta}}{v^{n+1}}dv, \quad (4\text{-}19)$$

因此有

$$(1-v)^{\beta-1}[1-(1-z)v]^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{n!}(\gamma)_n F(-n,\beta,\gamma,z). \quad (4\text{-}20)$$

上式左边的函数是雅可比多项式的母函数.

4. 微商表达式

在(4-19)式中把 v 换成 $\frac{v-z}{v(1-z)}$，得

$$(\gamma)_n F(-n,\beta,\gamma,z)=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma+n-\beta}\frac{n!}{2\pi i}\int^{(0+)}\frac{(1-v)^{\beta-\gamma}v^{\gamma+n-1}}{(v-z)^{n+1}}dv,$$

由此得雅可比多项式的微商表达式：

$$F(-n,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma+n-\beta}\frac{d^n}{dz^n}[z^{\gamma+n-1}(1-z)^{\beta-\gamma}]. \quad (4\text{-}21)$$

5. 正交性

把 β 写作 $p+n$ 或 $p+m$，记雅可比多项式 $w_n=F(-n,p+n,\gamma,z)$，$w_m=F(-m,p+m,\gamma,z)$，利用(4-21)式直接计算可证明雅可比多项式具有正交性

$$\int_0^1 w_n w_m z^{\gamma-1}(1-z)^{p-\gamma}dz=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \frac{(p+n)_n}{(\gamma)_n}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(p+n-\gamma+1)n!}{\Gamma(p+2n+1)} & (m=n).\end{cases} \quad (4\text{-}22)$$

根据正交多项式的理论，雅可比多项式 $F(-n,p+n,\gamma,z)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 在区间[0,1]上构成一完备正交函数系，权为 $z^{\gamma-1}(1-z)^{p-\gamma}$ $(\mathrm{Re}(\gamma)>0,\mathrm{Re}(p-\gamma+1)>0)$；任何一个在[0,1]中平方可积的函数 $f(x)$ 可以在平均近似的意义下用 $F(-n,p+n,\gamma,z)$ 展成级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n F(-n,p+n,\gamma,z), \quad (4\text{-}23)$$

其中

$$c_n=\frac{1}{N_n}\int_0^1 f(z)F(-n,p+n,\gamma,z)\cdot z^{\gamma-1}(1-z)^{p-\gamma}dz, \quad (4\text{-}24)$$

而模

$$N_n=\int_0^1 w_n^2 z^{\gamma-1}(1-z)^{p-\gamma}dz.$$

雅可比多项式另外常用的一种定义是

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\binom{n+\gamma-1}{n}F(-n,p+n,\gamma,z),$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$是一个完备的正交函数系，区间为$[-1,1]$，权为$(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$.

4.3　切比雪夫多项式

4.3.1　切比雪夫多项式的定义

切比雪夫(Chebyshev)多项式 $T_n(x)$(第一类)的定义是

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x).\tag{4-25}$$

显然 $T_0(x)=1$，当 $n=1,2,\cdots$时，可以证明 $T_n(x)$有更明显的表达式

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^l(n-l-1)!}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l}.\tag{4-26}$$

注意其中 x^n 的系数是 2^{n-1}. 前几个 $T_n(x)$的表达式是

$$T_1(x)=x,$$
$$T_2(x)=2x^2-1,$$
$$T_3(x)=4x^3-3x,$$
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x.$$

令 $x=\cos\theta$，则 $y=T_n(x)=\cos n\theta$ 满足微分方程

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+n^2y=0.$$

回到变量 x，得 $T_n(x)$满足切比雪夫微分方程

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0.\tag{4-27}$$

令 $z=\frac{(1-x)}{2}$，则(4-27)式化为超几何方程

$$z(1-z)y''+\left(\frac{1}{2}-z\right)y'+n^2y=0.\tag{4-28}$$

令参数 $\alpha=-n,\beta=n,\gamma=\frac{1}{2}$，由(4-4)，(4-5)式得方程(4-28)的两个线性无关解：$F(-n,n,\frac{1}{2},z)$和 $z^{1/2}F(-n+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},\frac{3}{2},z)$，后者不是多项式，故必有

$$T_n(x)=AF\left(-n,n,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right).$$

令 $x=1$，得 $T_n(1)=\cos n\theta|_{\theta=0}=1=A$，故

$$T_n(x)=F\left(-n,n,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right).\tag{4-29}$$

由此可见，切比雪夫多项式是雅可比多项式当 $\beta=n$、$\gamma=\frac{1}{2}$，$z=\frac{(1-x)}{2}$时的特例.

4.3.2　切比雪夫多项式的性质

1. 微商表达式

由(4-29)式及(4-21)式得

$$T_n(x)=(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.\tag{4-30}$$

2. 正交性和归一因子

由(4-22)式得

$$\int_{-1}^{1}T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\begin{cases}0 & (n\neq m),\\ \frac{\pi}{2} & (n=m>0),\\ \pi & (n=m=0).\end{cases}\tag{4-31}$$

3. 母函数

利用当 $x=\cos\theta$ 时 $T_n(x)=\cos n\theta$，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\theta\cdot t^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[(te^{i\theta})^n+(te^{-i\theta})^n]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-te^{i\theta}}+\frac{1}{1-te^{-i\theta}}\right]\\&=\frac{1-t\cos\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}=\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}\quad(|t|<1).\end{aligned}\tag{4-32}$$

称函数$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}$为 $T_n(x)$的母函数.

4. 递推关系

当 $x\leqslant 1$ 时，由 $T_n(x)=\cos n\theta$ 很容易推出下列递推关系

$$T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0,\tag{4-33}$$

$$(1-x^2)T'_n(x)=\frac{n}{2}[T_{n-1}(x)-T_{n+1}(x)]=n[T_{n-1}(x)-xT_n(x)].\tag{4-34}$$

因 $\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta$，而以上两式是代数恒等式，故对任意 x 值都成立.

4.4　合流超几何函数

4.4.1　合流超几何函数的定义

在超几何方程

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

中，把 z 换成$\frac{z}{b}$，然后除以 b，得

$$z\left(1-\frac{z}{b}\right)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)\frac{z}{b}\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-\alpha\frac{\beta}{b}y=0,$$

这方程的奇点是 $0,b,\infty$,且都是**正则奇点**.现令 $b=\beta\to\infty$,得

$$z\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+(\gamma-z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-\alpha y=0, \tag{4-35}$$

这新方程只有两个奇点,即0和∞;前者仍是正则奇点,后者是原来两正则奇点 b $(=\beta)$和∞的合流,从而成为**非正则奇点**.方程(4-35)称为合流超几何方程,或库默尔(Kummer)方程.

方程(4-35)在正则奇点 $z=0$ 处的**指标方程**是

$$\rho(\rho-1)+\gamma\rho=0,$$

其根为 $\rho=0$ 和 $1-\gamma$,当 $1-\gamma\neq$ 整数时,用级数解法得方程(4-35)的两个线性无关解

$$y_1=\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z),\quad y_2=z^{1-\gamma}\mathrm{F}(\alpha-\gamma+1,2-\gamma,z),$$

其中

$$\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}z^n\quad(\gamma\neq0,-1,-2,\cdots) \tag{4-36}$$

称为**合流超几何函数**,又称为库默尔函数.$\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$常写为 ${}_1\mathrm{F}_1(\alpha;\gamma;z)$.

显然合流超几何函数 $\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$,在形式上可以通过把超几何函数 $\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,z)$中的 z 换成$\frac{z}{\beta}$,然后令 $\beta\to\infty$ 而得到.利用这一形式的极限过程,可以从有关超几何函数的许多公式导出相应的合流超几何函数公式.

4.4.2 合流超几何函数的性质

1. 合流超几何函数是单值解析函数

无论是从微分方程的理论还是从级数表达式(4-36)本身都容易得知 $\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$是全 z 平面上的单值解析函数.对于固定的 z 和 $\gamma(\gamma\neq0,-1,\cdots)$,$\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$也是 α 的整函数.除去 γ 为零或负整数,$\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$也是 γ 的解析函数.至于 $\gamma=-m$ $(m=0,1,\cdots)$则是一阶极点,因为(4-36)式可写为

$$\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)=1+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\gamma+n)}z^n, \tag{4-37}$$

$\gamma=-m$ 是 $\Gamma(\gamma)$的一阶极点,除去因子$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}$,级数在 $\gamma=-m$ 时等于 $\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(n-m)}z^n$,而这级数是收敛的.综上,$\frac{\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)}{\Gamma(\gamma)}$是 α,γ,z 的单值解析函数.

2. 库默尔变换

由于

$$\mathrm{e}^{-z}\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_l}{l!(\gamma)_l}z^l$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(\alpha)_l}{l!(n-l)!(\gamma)_l}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}(-z)^n = \mathrm{F}(\gamma-\alpha,\gamma,-z),$$

因此得到库默尔变换公式

$$\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)=\mathrm{e}^z\mathrm{F}(\gamma-\alpha,\gamma,-z). \tag{4-38}$$

3. 积分表达式

库默尔方程(4-35)的积分解是

$$y(z) = A\int_C \mathrm{e}^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\mathrm{d}t, \tag{4-39}$$

其中 A 是任意常数,积分路线 C 的选取应满足 $\{\mathrm{e}^{zt}t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha}\}_C=0$. 只要选择常数 $A=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}$,选取 C 为从0到1的直线段,(4-39)式的右边就等于 $\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$. 因此 $\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$的积分表达式是

$$\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 \mathrm{e}^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\mathrm{d}t, \tag{4-40}$$

其中 $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)>0, \arg t=\arg(1-t)=0$.

把(4-40)式中的 t 换成 $1-t$,得另一积分表达式

$$\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)\mathrm{e}^z}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 \mathrm{e}^{-zt}t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t \tag{4-41}$$

$$(\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)>0, \arg t=\arg(1-t)=0).$$

此外,与(4-8)式相对应,合流超几何函数也可以用巴恩斯积分表示:

$$\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s\mathrm{d}s$$

$$\left(\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots;\ |\arg(-z)|<\frac{\pi}{2}\right) \tag{4-42}$$

积分路线的选取应使 $\Gamma(\alpha+s)$的极点在积分路线的左边,$\Gamma(-s)$的极点在其右边.

4. 邻次函数间的关系

设 l,m 是任意整数,则 $\mathrm{F}(\alpha+l,\gamma+m,z)$称为 $\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$的邻次函数,与超几何函数一样,在任意3个邻次函数 $\mathrm{F}_1,\mathrm{F}_2,\mathrm{F}_3$ 之间存在关系式

$$A_1\mathrm{F}_1+A_2\mathrm{F}_2+A_3\mathrm{F}_3=0, \tag{4-43}$$

其中 A_1,A_2,A_3 是 z 的有理函数.

5. 递推关系

用合流超几何函数的积分表示可以导出下列两个递推关系:

$$(\gamma-1)\mathrm{F}(\gamma-1)-\alpha\mathrm{F}(\alpha+1)-(\gamma-\alpha-1)\mathrm{F}=0, \tag{4-44}$$

$$\gamma\mathrm{F}-z\mathrm{F}(\gamma+1)-\gamma\mathrm{F}(\alpha-1)=0, \tag{4-45}$$

其中 F 代表 $\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$;$\mathrm{F}(\alpha\pm1)$,$\mathrm{F}(\gamma\pm1)$是 $\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$的4个紧邻的简写符号,即

$$\mathrm{F}(\alpha\pm1)=\mathrm{F}(\alpha\pm1,\gamma,z),$$

$$\mathrm{F}(\gamma\pm1)=\mathrm{F}(\alpha,\gamma\pm1,z).$$

F 和它的 4 个紧邻之间的$\binom{4}{2}=6$个关系式都可从以上两个基本递推关系式导出.

此外,还有一个与超几何函数相仿的递推公式

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)=\frac{(\alpha)_m}{(\gamma)_m}\mathrm{F}(\alpha+m,\gamma+m,z).\tag{4-46}$$

6. 渐近展开

由于 $\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$的幂级数展开是在全平面上收敛的,故对于 α 和 z 的任何有限值,这级数也是当$|\gamma|\to\infty$时的渐近展开,即

$$\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)=\sum_{n=1}^{N}\frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}z^n+O(|\gamma|^{-N-1})$$
$$(|\arg(\gamma)|\leqslant\pi-\delta,\delta>0).\tag{4-47}$$

若$|\alpha|$与$|\gamma|$同时趋于∞,但$|\gamma-\alpha|$有界,则利用库默尔变换公式(4-38)可以从(4-47)式中把 α 换成$\gamma-\alpha$,z 换成$-z$,再乘上 e^z,可得到这时的渐近展开式.

4.5　拉盖尔多项式

4.5.1　拉盖尔多项式的定义

二阶线性微分方程

$$zy''+(\mu+1-z)y'+ny=0\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{4-48}$$

称为拉盖尔(Laguerre)方程,它是库默尔方程当参数 $\alpha=-n$ 时的特殊情况,故它有一个多项式解:$\mathrm{F}(-n,\mu+1,z)$. 称 n 次多项式

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\frac{\Gamma(\mu+n+1)}{n!\Gamma(\mu+1)}\mathrm{F}(-n,\mu+1,z)\tag{4-49}$$

为**广义拉盖尔多项式**.其中 μ 是不等于负整数的任意实数或复数. $\mathrm{L}_n^{\mu}(z)$的特殊情形:$\mathrm{L}_n^0(z)=\mathrm{L}(z)$称为**拉盖尔多项式**.

4.5.2　拉盖尔多项式的性质

1. 积分表示

根据定义式(4-49)及合流超几何函数的积分表示,可得拉盖尔多项式 $\mathrm{L}_n^{\mu}(z)$ 的积分表达式

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\frac{(-1)^n}{2\pi\mathrm{i}}\int^{(0+)}\mathrm{e}^{zt}(1-t)^{\mu+n}t^{-n-1}\mathrm{d}t$$
$$(t=1\ 在围道外,|\arg(1-t)|<\pi).\tag{4-50}$$

2. 微商表示

在(4-50)式中令 $t=1-\dfrac{v}{z}$,得

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\mathrm{e}^z z^{-\mu}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int^{(0+)}\frac{\mathrm{e}^{-v}v^{\mu+n}}{(v-z)^{n+1}}\mathrm{d}v,\tag{4-51}$$

$$L_n^\mu(z) = \frac{e^z z^{-\mu}}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^{\mu+n}e^{-z}). \tag{4-52}$$

当 $\mu = m$(正整数)时,(4-50)式可写为

$$L_n^m(z) = \frac{(-1)^m}{2\pi i}\frac{d^m}{dz^m}\int^{(0+)} e^{zt}(1-t)^{m+n}t^{-m-n-1}dt$$

$$\xlongequal{令\ t = 1 - \frac{v}{z}} (-1)^m \frac{d^m}{dz^m}\frac{e^z}{2\pi i}\int^{(0+)}\frac{e^{-v}v^{m+n}}{(v-z)^{m+n+1}}dv,$$

利用(4-51)式,令其中的 $\mu=0$,并把 n 换成 $m+n$,即得 $L_n^m(z)$ 的微商表示

$$L_n^m(z) = (-1)^m \frac{d^m}{dz^m}L_{m+n}(z). \tag{4-53}$$

3. 母函数

将(4-50)式改写成

$$L_n^\mu(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int^{(0+)} e^{zt}(1-t)^{\mu-1}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{-n-1}dt,$$

令 $\frac{t}{t-1} = v$,使积分中只有 v 的幂次上含 n,得

$$L_n^\mu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)}\exp\left(-\frac{zt}{1-t}\right)(1-t)^{-\mu-1}t^{-n-1}dt,$$

于是有

$$\frac{\exp\left(-\dfrac{zt}{1-t}\right)}{(1-t)^{\mu+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}L_n^\mu(z)t^n \quad (|t|<1), \tag{4-54}$$

上式左边的函数称为 $L_n^\mu(z)$ 的母函数.

4. 递推公式

把(4-54)式两边对 t 求微商,乘上 $(1-t)^2$,再用(4-54)式展开左边,并比较两边 t^n 的系数,得

$$(n+1)L_{n+1}^\mu + (z-\mu-2n-1)L_n^\mu + (\mu+n)L_{n-1}^\mu = 0 \quad (n \geq 1). \tag{4-55}$$

类似地,有

$$\frac{d}{dz}L_n^\mu - \frac{d}{dz}L_{n-1}^\mu + L_{n-1}^\mu = 0 \quad (n \geq 1), \tag{4-56}$$

一般地有

$$\frac{d^r}{dz^r}L_n^\mu(z) = (-1)^r L_{n-r}^{\mu+r}(z) \quad (r \leq n). \tag{4-57}$$

利用基本递推关系(4-55),(4-56)式还可导出下列递推公式

$$(n+1)(L_{n+1}^\mu)' + (z-n-1)(L_n^\mu)' - (n+1)L_{n+1}^\mu + (\mu+2n+2-z)L_n^\mu = 0 \quad (n \geq 0), \tag{4-58}$$

$$z(L_n^\mu)' = nL_n^\mu - (\mu+n)L_{n-1}^\mu \quad (n \geq 1). \tag{4-59}$$

在(4-54)式中把 μ 换成 $\mu+1$,乘以 $1-t$,然后把左边再用(4-54)式展开,并比较两边的系数得

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\mathrm{L}_n^{\mu+1}(z)-\mathrm{L}_{n-1}^{\mu+1}(z). \tag{4-60}$$

5. 正交归一性

两个广义拉盖尔多项式乘积的积分公式是

$$\int_0^{\infty} z^{\lambda}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{L}_n^{\mu}(z)\mathrm{L}_m^{\upsilon}(z)\mathrm{d}z=(-1)^{n+m}\Gamma(\lambda+1)\sum_k\binom{\lambda-\mu}{n-k}\binom{\lambda-\upsilon}{m-k}\binom{\lambda+k}{k}, \tag{4-61}$$

其中 $\mathrm{Re}(\lambda)>-1$,以保证积分在下限收敛.

当 $\lambda=\mu=\upsilon$ 时,即得广义拉盖尔多项式的正交归一关系

$$\int_0^{\infty} z^{\mu}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{L}_n^{\mu}(z)\mathrm{L}_m^{\mu}(z)\mathrm{d}z=\Gamma(\mu+1)\binom{\mu+n}{n}\delta_{nm}$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+n+1)}{n!}\delta_{nm}, \tag{4-62}$$

其中 $$\delta_{mn}=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ 1 & (m=n).\end{cases}$$

利用(4-61),(4-62)式可得到下列展开式

$$z^{s}\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\sum_{r=0}^{n+s}a_r^s\mathrm{L}_{n+s-r}^{\mu+p}(z), \tag{4-63}$$

其中系数

$$a_r^s=(-1)^{s+r}\frac{(n+s-r)!\,\Gamma(s+\mu+p+1)}{\Gamma(n+s+\mu+p-r+1)}\times$$

$$\sum_k\binom{s+p}{n-k}\binom{s}{k+r-n}\binom{s+\mu+p+k}{k}. \tag{4-64}$$

其中 s 是任意非负整数,p 是任意的实数或复数.

参 考 文 献

1 王竹溪,郭敦仁.特殊函数概论.北京:科学出版社,1979.

2 《数学手册》编写组.数学手册.北京:教育出版社,1979.

3 (日)近藤次郎等著.微分方程傅里叶分析.付文章译.沈阳:辽宁人民出版社,1981.

4 谢省宗、邴凤山.特殊函数.见:《现代工程数学手册》编委会.现代工程数学手册:第Ⅰ卷.武汉:华中工学院出版社,1985.

·经典数学卷·

第9篇

积分变换与级数变换

编　者　樊孝述
审校者　于　寅

目　录

引　言

变换,形象地说是一种对应.它把一事物按照某种规律与另一事物对应起来.数学中有许多变换.例如,函数就是一种变换,它把自变量 x 变换为因变量 y;线性代数中的线性变换也是一种变换,它把列向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 变换为列向量 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$.积分变换与级数变换是通过积分运算与级数运算,把一个函数 $f(t)$ 或序列 $\{f(n)\}$ 与另一个函数 $F(s)$ 或序列 $\{F(k)\}$ 构成一一对应.积分变换与级数变换的意义,一般而言,是把时域 t 中关于 $f(t)$ 的求解问题,通过积分变换或级数变换,转化为频域 s 中关于 $F(s)$ 的求解问题,而后者往往简便得多.在频域 s 中求出 $F(s)$ 后,再通过反变换来得到原来所要求的解.

积分变换与级数变换,在现代科技与工程技术中有着广泛的应用.它涉足于线性系统、控制理论、振动、天线、光学、热学、流体力学、量子物理、原子与原子核物理、随机过程和概率论等领域.

1　基本概念

1.1　积分变换

积分变换就是将原函数 $f(x)$ 乘以某种二元函数 $K(s,x)$ 后,再对 x 积分,变换为另一个函数 $F(s)$.一般程序,可用符号表示如下:

$$T[f(x)]=\int_a^b f(x)K(s,x)\mathrm{d}x = F(s),$$

其中 a,b 是有限数或 ∞;$K(s,x)$ 是 s 和 x 的已知函数,称它为积分变换的核;$f(x)$ 是原函数;$F(s)$ 是像函数.如果积分限 a,b 都是有限数,则称 $F(s)$ 是 $f(x)$ 的有限积分变换.显然,不同的核 $K(s,x)$ 或不同的积分域是不同的变换.常见的积分变换有:

1° 傅里叶(Fourier)变换(简称傅氏变换)

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\mathrm{d}x,$$

其中 $K(s,x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}$,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

2° 拉普拉斯(Laplace)变换(简称拉氏变换)

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x,$$

其中 $K(s,x)=\mathrm{e}^{-sx}$.

3° 傅里叶正弦变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(x)\sin(sx)\mathrm{d}x,$$

其中 $K(s,x)=\sin(sx)$.

4° 傅里叶余弦变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(x)\cos(sx)\mathrm{d}x,$$

其中 $K(s,x)=\cos(sx)$.

5° 梅林(Mellin)变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x,$$

其中 $K(s,x)=x^{s-1}$.

6° 汉克尔(Hankel)变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(x)x\mathrm{J}_n(sx)\mathrm{d}x,$$

其中 $K(s,x)=x\mathrm{J}_n(sx)$,而 $\mathrm{J}_n(sx)$是第一类 n 阶贝塞尔函数.

7° 勒让德(Legendre)变换

$$F(n)=\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $K(n,x)=\mathrm{P}_n(x)$,$\mathrm{P}_n(x)$是 n 次勒让德多项式,n 为正整数.

1.2 级数变换

级数变换是将原函数序列$\{f(n)\}$中的$f(n)$乘以某个二元函数 $K(k,n)$,再对 n 求和变换为另一个函数序列$\{F(k)\}$.一般程序可表示如下:

$$T[f(n)]=\sum_{n=0}^{N}f(n)K(k,n)=F(k),$$

其中 N 是某个正整数或 $+\infty$.常见的级数变换有离散傅里叶变换和 Z 变换.

1° 离散傅里叶变换

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk},$$

其中 $K(k,n)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$.

2° Z 变换

$$F(Z)=\sum_{n=0}^{+\infty}f(n)Z^{-n},$$

其中 $K(Z,n)=Z^{-n}$.

本篇将逐一介绍以上各种变换及其性质和主要应用.

2 傅里叶变换

2.1 傅里叶级数变换

2.1.1 傅里叶级数

一个以 T 为周期的**周期信号**$f_p(t)$(下标 p 表示 $f(t)$ 是周期函数),若在区间 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上满足狄利克雷(Dirichlet)条件,则 $f_p(t)$可以展开成傅里叶级数,并在 $f_p(t)$的连续点 t 处,有

$$f_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)], \tag{2-1}$$

在间断点 t 处,有

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)] = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2},$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_p(t)\mathrm{d}t,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_p(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_p(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t,$$

这里,T 为周期,$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$,$\omega$ 称为基波角频率,f 称为基波频率.两者都简称为**基频**.

2.1.2 傅里叶级数的其他表示形式

(1)余弦表示式

$$f_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(n\omega t - \varphi_n).$$

(2) 正弦表示式

$$f_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(n\omega t + \phi_n).$$

(3) 复系数的指数表示式

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}D_n e^{in\omega t},$$

其中系数

$$D_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_P(t)e^{-in\omega t}dt. \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2-2}$$

傅里叶级数诸表示式中各系数间的关系如下：

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n},$$

$$a_n = C_n\cos\varphi_n = D_n + D_{-n} = C_n\sin\psi_n,$$

$$b_n = C_n\sin\varphi_n = i(D_n - D_{-n}) = C_n\cos\psi_n,$$

$$\tan\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}, \quad \tan\psi_n = \frac{a_n}{b_n} \qquad (n \geq 1),$$

$$D_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad (n \geq 1),$$

$$D_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \qquad (n \geq 1),$$

$$C_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = 4D_nD_{-n} \qquad (n \geq 1).$$

2.1.3 傅里叶级数变换

在傅里叶级数的指数形式中，若记系数 D_n 为 $F(n\omega)$，则有

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega)e^{in\omega t}, \tag{2-3}$$

而

$$F(n\omega) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_P(t)e^{-in\omega t}. \tag{2-4}$$

(2-3)式与(2-4)式是相互对应的．它们是函数 $f(t)$ 与 $F(n\omega)$ 之间的一种变换．称由(2-4)式所定义的 $F(n\omega)$ 为 $f(t)$ 的**傅里叶级数变换**，而称(2-3)式为傅里叶级数变换的反演公式，$f_p(t)$ 称为 $F(n\omega)$ 的傅里叶反变换．

2.2 傅里叶积分变换

2.2.1 傅里叶积分

在生产实践和科学实验中，所遇到的信号，有时是非周期性的．对于非周期性信号，可以把它当做周期 T 趋于无穷大的周期性信号的极限来处理．这样，从傅里叶级数表示式中可导出傅里叶积分．

1. 傅里叶积分的复数形式

设 $f(t)$ 为定义在全 t 轴上的非周期函数，在任意有限区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件，由(2-3)式知，$f(t)$ 可以表示如下：

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_p(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega)e^{in\omega t},$$

其中 $$F(n\omega)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_{\mathrm{p}}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t.$$

若记 $n\omega=\omega_n,\Delta\omega=\omega_n-\omega_{n-1}=\omega$,而 $\omega=\frac{2\pi}{T}$,当 $T\to\infty$ 时,有 $\Delta\omega\to0$,于是有

$$f(t)=\lim_{\substack{T\to\infty\\(\Delta\omega\to0)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\Delta\omega}}^{\frac{\pi}{\Delta\omega}}f_{\mathrm{p}}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}.$$

由定积分的定义知,上式为

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{2-5}$$

(2-5)式右边就是非周期函数 $f(t)$ 的傅里叶积分公式(复数形式).至于 $f(t)$ 在什么条件下可用傅里叶积分公式表达,则有下面的存在定理.

2. 傅里叶积分存在定理

若函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足狄利克雷条件,且积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$$

收敛(此时称 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对收敛),则有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\begin{cases}f(t) & (\text{在连续点 } t \text{ 处}),\\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & (\text{在间断点 } t \text{ 处}).\end{cases}$$

3. 傅里叶积分的三角形式

利用欧拉公式,把(2-5)式中的 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tau)}$ 的实部与虚部分开,根据复数相等必有实部与虚部分别相等的原理,可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau=0.\tag{2-6}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau.\tag{2-7}$$

因为(2-7)式中的被积函数关于 ω 是偶函数,故它可以写成

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{2-8}$$

上式右边的积分称为 $f(t)$ 的傅里叶积分的三角形式.因为

$$\cos\omega(t-\tau)=\cos(\omega t)\cos(\omega\tau)+\sin(\omega t)\sin(\omega\tau),$$

故(2-8)式又可写为

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}[a(\omega)\cos(\omega t)+b(\omega)\sin(\omega t)]\mathrm{d}\omega,\tag{2-9}$$

其中

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos(\omega\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin(\omega\tau)\mathrm{d}\tau,$$

它们与傅里叶级数极为相似.

(1) 傅里叶余弦积分　若 $f(t)$ 为偶函数,则

$$b(\omega) = 0,\quad a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\cos(\omega\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega\int_{0}^{\infty} f(\tau)\cos(\omega\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2-10}$$

上式右边的积分称为 $f(t)$ 的傅里叶余弦积分.

(2) 傅里叶正弦积分　若 $f(t)$ 为奇函数,则

$$a(\omega) = 0,\quad b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\sin(\omega\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega\int_{0}^{\infty} f(\tau)\sin(\omega\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{2-11}$$

上式右边的积分称为 $f(t)$的傅里叶正弦积分.

4. 单边函数的傅里叶余弦积分与傅里叶正弦积分

若 $f(t)$定义在$(0,+\infty)$上(这种函数简称为单边函数),如同傅里叶级数展开一样,可以把它延拓到区间$(-\infty,0)$上,成为$(-\infty,+\infty)$上的偶函数或奇函数.这样,对于只定义在$(0,+\infty)$上的函数 $f(t)$,既可以用傅里叶余弦积分表示,也可以用傅里叶正弦积分表示.它们依次是

(1)　$b(\omega)=0,\ a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\cos(\omega\tau)\mathrm{d}\tau,$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\cos(\omega\tau)\mathrm{d}\tau\quad (t>0).$$

(2)　$a(\omega)=0,\ b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\sin(\omega\tau)\mathrm{d}\tau,$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\sin(\omega\tau)\mathrm{d}\tau\quad (t>0).$$

例1　求 $h(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\beta t} & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0)\end{cases}$ 的傅里叶积分表示式.

解　$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\frac{\beta}{\omega^2+\beta^2},$

$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\sin(\omega t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\frac{\omega}{\omega^2+\beta^2},$

故

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\omega^2+\beta^2}[\beta\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)]\mathrm{d}\omega,$$

当 $t=0$ 时,上式右边应为

$$\frac{h(0+0)+h(0-0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

2.2.2 傅里叶积分变换

傅里叶积分变换简称傅里叶变换.

1. 傅里叶变换的定义

在傅里叶积分的复数形式(2-5)式的方括号中,把积分变量 τ 改记为 t,且记

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t, \tag{2-12}$$

则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{2-13}$$

由(2-12)式所确定的函数 $F(\omega)$,称为 $f(t)$的**傅里叶(积分)变换**(或像函数),一般记为 $\mathscr{F}[f(t)]$,即

$$\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

并称(2-13)式为**傅里叶变换的反演公式**,且 $f(t)$称为 $F(\omega)$的傅里叶反变换(或像原函数),记为 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$,即

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

以上是傅里叶变换的典型形式.

例 2 求 $f(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leqslant 1), \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$ 的傅里叶变换.

解 由定义知

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}) = \frac{2\sin\omega}{\omega}. \end{aligned}$$

2. 傅里叶变换的其他形式

因使用者的要求不同,在不同场合,傅里叶变换有不同的表示形式,如:

类型 Ⅰ:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

类型 Ⅱ:

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,$$

$$e(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

类型 Ⅲ:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}t,$$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}f.$$

(2-12)与(2-13)式及类型Ⅰ、类型Ⅱ可以写成如下统一形式：

$$R(\omega)=a_1\int_{-\infty}^{+\infty}r(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,$$

$$r(t)=a_2\int_{-\infty}^{+\infty}R(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

显然，这里要求 $a_1a_2=\frac{1}{2\pi}$，但使用者在不同场合，将 a_1a_2 进行了不同的分离. 但对于类型Ⅲ，由于其积分对 f 进行，故此时比例系数$\frac{1}{2\pi}$就不再出现. 本篇的傅里叶变换采用典型形式.

3. 傅里叶余弦变换

在(2-10)式中，记

$$F(\omega)=\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t, \tag{2-14}$$

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}F(\omega)\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega. \tag{2-15}$$

由(2-14)式所定义的函数 $F(\omega)$，称为函数 $f(t)$的**傅里叶余弦变换**，而(2-15)式称为余弦变换的反演公式.

4. 傅里叶正弦变换

在(2-11)式中，记

$$F(\omega)=\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t, \tag{2-16}$$

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}F(\omega)\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega. \tag{2-17}$$

由(2-16)式所确定的函数 $F(\omega)$，称为函数 $f(t)$的**傅里叶正弦变换**，而(2-17)式称为傅里叶正弦变换的反演公式.

例 3　设 $f(t)=\mathrm{e}^{-bt}(b>0,t\geqslant0)$，试求 $f(t)$的傅里叶余弦变换与傅里叶正弦变换.

解　余弦变换

$$F_c(\omega)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-bt}\cos(\omega t)\mathrm{d}t=\frac{b}{\omega^2+b^2}.$$

正弦变换

$$F_s(\omega)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-bt}\sin(\omega t)\mathrm{d}t=\frac{\omega}{\omega^2+b^2}.$$

注：若 $f(t)$为定义在$(0,+\infty)$上的函数，可经偶性延拓或奇性延拓，使之成为$(-\infty,+\infty)$上的偶函数或奇函数，类似可得 $f(t)$的余弦变换或正弦变换. 但变域在$(0,+\infty)$内.

2.3 δ函数及其傅里叶变换

2.3.1 δ函数的定义及导数δ′(x)

δ函数常见的定义有3种形式.

(1) 由矩形脉冲函数序列的极限定义δ函数.

设矩形脉冲函数序列为(见图2-1)

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & \left(|t|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\right),\\ 0 & \left(|t|>\dfrac{\varepsilon}{2}\right),\end{cases}$$

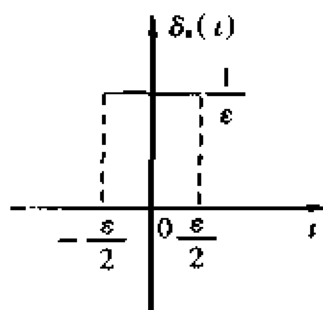


图2-1

而 $\delta(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)\mathrm{d}t=1.$

其实,$\delta(t)$作为一个函数序列的极限,其函数序列并不是唯一的.例如,下列函数序列的每一个都可以作为$\delta_\varepsilon(t)$:

$$\delta_\varepsilon(t)=f(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{-\varepsilon|t|}\quad(-\infty<t<+\infty,\varepsilon>0);$$

$$\delta_\varepsilon(t)=g(t,\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{\varepsilon}}}\mathrm{e}^{-\varepsilon t^2}\quad(-\infty<t<+\infty,\varepsilon>0);$$

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\varepsilon^2}|t|+\dfrac{1}{\varepsilon} & (|t|\leqslant\varepsilon,\varepsilon>0),\\ 0 & (|t|>\varepsilon,\varepsilon>0).\end{cases}$$

等等,图形分别见图2-2~图2-4.

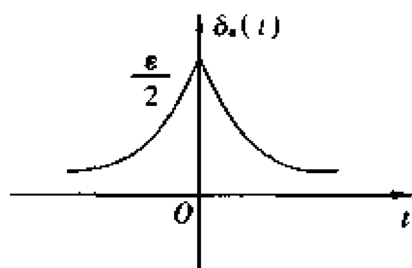


图2-2

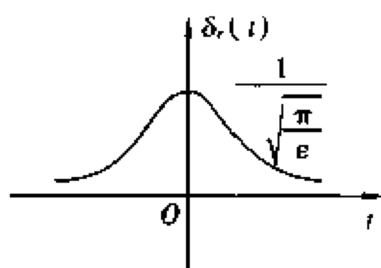


图2-3

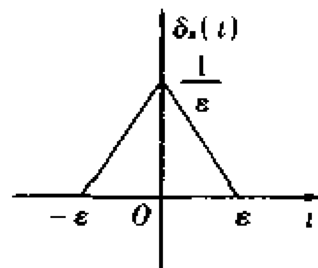


图2-4

(2) 由下列方程式定义δ函数.

当$t\neq 0$时,$\delta(t)=0$,且$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$, $t=0$称为跃点.

工程技术上,常直观地引用符号∞,因而δ函数表示为

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & (t\neq 0),\\ +\infty & (t=0)\end{cases}\quad 且\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1.$$

如果跃点在 $t=\tau$，则 δ 函数表示为

$$\delta(t-\tau)=\begin{cases}0 & (t\neq\tau),\\ +\infty & (t=\tau),\end{cases}\quad 且\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)\mathrm{d}t=1.$$

(3) 由下列性质定义 δ 函数.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0),$$

其中 $f(t)$ 是任一个在 $t=0$ 的某邻域内连续的函数. 注意上式不能解释为"$\delta(t)$ 与 $f(t)$ 的乘积在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 内积分得出函数值 $f(0)$". 而是表示"任意在 $t=0$ 处连续的函数 $f(t)$，在 $t=0$ 处的函数值 $f(0)$ 可由广义函数 $\delta(t)$ 用积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0)$ 来规定". 即 $\delta(t)$ 是作为确定函数 $f(t)$ 的一个函数值 $f(0)$ 的一种数学过程. 一般可表示为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)f(t)\mathrm{d}t=f(\tau).$$

应当指出，只有把 δ 函数用定义(3)看作广义函数时，从数学意义上说，才是严格的.

2.3.2 δ 函数的导数

广义函数 $g(t)$ 的导数 $g'(t)$ 由下式定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g'(t)f(t)\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $f(t)$ 是在 $t=0$ 处的连续函数.

由此知 $\delta(t)$ 的导数 $\delta'(t)$ 由下式给出

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)\mathrm{d}t=-f'(0),$$

$\delta(t)$ 的 n 阶导数 $\delta^{(n)}(t)$ 由下式给出

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(0).$$

2.3.3 δ 函数的性质

δ 函数有如下性质：

(1) 偶性性质

$$\delta(-x)=\delta(x).$$

(2) $\delta'(x)$ 具奇性性质

$$\delta'(-x)=-\delta'(x).$$

(3) 时间尺度变换性质

$$\delta(bt-a)=\frac{1}{|b|}\delta\left(t-\frac{a}{b}\right),$$

其中 a,b 为任意实数，且 $b\neq0$. 当 $a=0$ 时，有

$$\delta(bt)=\frac{1}{|b|}\delta(t).$$

(4) δ 函数是单位阶跃函数的导数.即

$$u'(t-t_0)=\delta(t-t_0).$$

特别有

$$u'(t)=\delta(t)$$

(5) 线性性质　对任意实数 a,b 及复数α,β 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\alpha\varphi(t)\delta(t-a)+\beta\psi(t)\delta(t-b)]\mathrm{d}t$$

$$=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t+\beta\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\delta(t-b)\mathrm{d}t.$$

(6) 分段性质　设 $t_1<t_2<t_3<\cdots<t_n,t_k\neq a\quad(k=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t_1}\varphi(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t+\cdots+\int_{t_n}^{+\infty}\varphi(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t.$$

由此又可推出

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t=\begin{cases}\varphi(a) & (t_1<a<t_2),\\ 0 & (t_1<t_2<a\text{ 或 }a<t_1<t_2).\end{cases}$$

(7) 卷积性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-b-\tau)\delta(\tau-a)\mathrm{d}\tau=\delta(t-b-a).$$

(8) 乘以时间函数的性质.即

$$\varphi(t)\delta(t-a)=\varphi(a)\delta(t-a),$$

此处 a 为常实数,$\varphi(t)$是在 a 处连续的任意函数.

(9) 设 $f(x),f'(x)$在区间$[a,b]$上除有有限个第一类间断点外,都是连续的,则有如下等式成立:

1° $\int_a^b f(x)\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=\int_a^b f(\xi)\delta(x-\varepsilon)\mathrm{d}x.$

2° $\int_a^b f(x)\delta(\xi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\xi|}\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x.$

3° $\int_a^b f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}-f(0) & (a\leqslant 0\leqslant b),\\ 0 & (0\,\overline{\in}\,[a,b]).\end{cases}$

2.3.4 有关 δ 函数的傅里叶变换

(1) $f(t)=\delta(t)$的傅里叶变换对.

$$F(\omega)=\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega 0}=1,$$

$$\delta(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

并由此可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t). \tag{2-18}$$

故 $\delta(t)$ 和 1 构成傅里叶变换对，即 $\delta(t) \longleftrightarrow 1$.

(2) $f(t) = \delta(t - t_0)$ 的傅里叶变换对

$$F(\omega) = \mathscr{F}[\delta(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t_0},$$

$$\delta(t - t_0) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t_0} e^{i\omega t} d\omega.$$

故 $\delta(t - t_0)$ 和 $e^{-i\omega t_0}$ 构成傅里叶变换对，即

$$\delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}. \tag{2-19}$$

(3) $f(t) = e^{i\omega_0 t}$ 的傅里叶变换对.

$$F(\omega) = \mathscr{F}[e^{i\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt.$$

由(2-18)式知

$$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega_0 - \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

故 $e^{i\omega_0 t}$ 和 $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 构成傅里叶变换对，即

$$e^{i\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \tag{2-20}$$

2.3.5　函数 $\delta[\varphi(t)]$

(1) $\delta[\varphi(t)]$ 的定义为

$$\delta[\varphi(t)] = \begin{cases} 0 & (\varphi(t) \neq 0), \\ +\infty & (\varphi(t) = 0). \end{cases}$$

(2) $\delta[\varphi(t)]$ 的表示式

如果 $\varphi(t) = 0$ 只有单根 $t_k (k = 1, 2, \cdots)$，则

$$\delta[\varphi(t)] = \begin{cases} 0 & (t \neq t_k, k = 1, 2, \cdots), \\ +\infty & (t = t_k, k = 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

若 $\varphi'(t)$ 存在且 $\varphi'(t_k) \neq 0$，则

$$\delta[\varphi(t)] = \sum_k \frac{\delta(t - t_k)}{|\varphi'(t_k)|}.$$

例如

$$\delta[at] = \frac{\delta(t)}{|a|},$$

这与 δ 函数的性质(3)一致，此外有

$$\delta[t^2 - a^2] = \frac{\delta(t + a) + \delta(t - a)}{2|t|}; \quad \delta[t^2] = \frac{\delta(t)}{|t|}.$$

某些函数的傅里叶变换举例如下.

例4　$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$，这是一个以 T 为周期的周期性 δ 脉冲序列(见图2-5)，它可以表示成傅里叶级数：

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}D_k e^{ik\omega t},$$

$$\begin{aligned}D_k&=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-ik\omega t}dt\\&=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-ik\omega t}dt=\frac{1}{T}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),\end{aligned}$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}$,故

$$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0),$$

如图 2-6 所示.

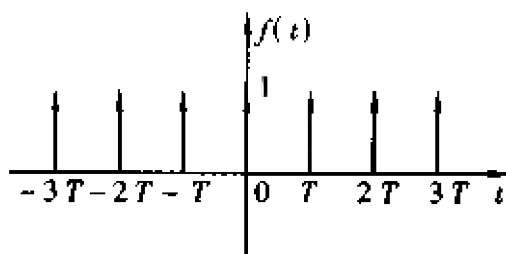


图 2-5

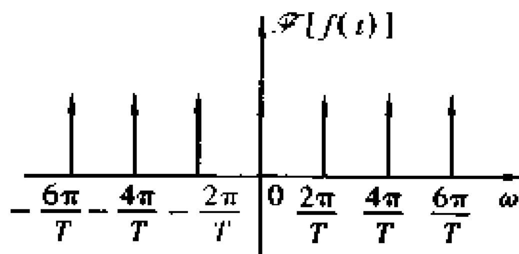


图 2-6

2.4 周期信号和非周期信号的频谱

2.4.1 周期信号的频谱

周期信号 $f(t)$ 可用傅里叶级数表示为

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(n\omega t+\psi_n),\ \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f,$$

其中各次谐波的振幅 C_n 和相角 ψ_n 分别表示为

$$C_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=2\mid F(n\omega)\mid=2\mid D_n\mid,$$

$$\psi_n=\arctan\frac{a_n}{b_n}=\frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega t)dt}{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\omega t)dt}\quad(n\geqslant1).$$

称 $F(n\omega)$ 为周期信号 $f(t)$ 的**频谱函数**.称 $|F(n\omega)|$ 为 $f(t)$ 的**振幅频谱**或简称**频谱**.由于 $n\omega$ 只能取离散值,因而频谱 $|F(n\omega)|$ 的图形不是连续曲线.故称**离散频谱**. $\psi(n\omega)$ 即 ψ_n 称为**相角频谱**.

2.4.2 离散频谱的性质

(1) 因 $F(n\omega) = F(-n\omega)$,故频谱图关于直线 $\omega = 0$ 对称.

(2) 因 $|F(n\omega)| \leqslant \frac{1}{Tn\omega}\left[\left|f\left(-\frac{T}{2}\right)-f\left(\frac{T}{2}\right)\right|+\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\right]$,故当 $|f'(t)|$ 可积时,$|F(n\omega)|$(因而 C_n)随 n 增大而减少.

(3) 相角频谱 $\psi(n\omega)$ 是 ω 的奇函数.即

$$\psi(n\omega) = -\psi(-n\omega).$$

2.4.3 非周期信号的频谱

设 $f(t)$ 是非周期性信号,在 $f(t)$ 满足傅里叶积分定理的条件下,有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

其中

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

称为 $f(t)$ 的频谱函数. $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱或简称为频谱,因 ω 是连续变量,此时的频谱图形,一般是连续曲线,故称为**连续频谱**. $f(t)$ 是 $-\infty$ 到 ∞ 整个频带内无限多个具有无限小幅度 $F(\omega)\mathrm{d}\omega$ 的谐波的总和.因为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t,$$

故

$$|F(\omega)| = \sqrt{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t\right]^2+\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t\right]^2}. \quad (2\text{-}21)$$

相角频谱

$$\psi(\omega) = \arctan\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t}. \quad (2\text{-}22)$$

由(2-21)式,(2-22)式知,非周期信号的频谱有如下性质:

1° $|F(\omega)|$ 是 ω 的偶函数,即 $|F(\omega)| = |F(-\omega)|$.

2° $\psi(\omega)$ 是 ω 的奇函数,即 $\psi(-\omega) = -\psi(\omega)$.

3° $|F(\omega)|$ 随 ω 增大而递减,$|F(\omega)| < \frac{k}{|\omega|}$,$k$ 为常数.

例5 求周期信号(见图2-7)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \left(-\frac{T}{2} \leqslant t < -\frac{\tau}{2}\right), \\ E & \left(-\frac{\tau}{2} \leqslant t < \frac{\tau}{2}\right), \\ 0 & \left(\frac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}\right) \end{cases}$$

的频谱.

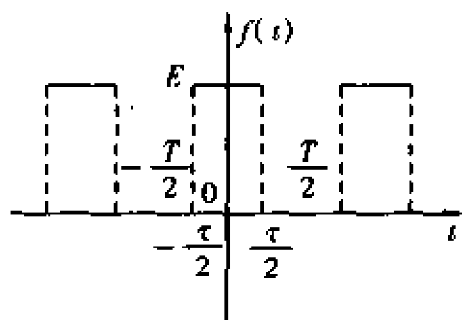


图 2-7

解
$$F(n\omega)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}E\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2E}{n\omega T}\sin\frac{n\omega\tau}{2}=\frac{E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\quad(n\neq 0),$$
$$F(0)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\mathrm{d}t=E\,\frac{\tau}{T}.$$

若取 $\tau=\dfrac{T}{3}$,则频谱函数
$$F(n\omega)=\frac{E}{\pi}\,\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\quad(n\neq 0),$$
$$F(0)=\frac{E}{3}.$$

$F(n\omega)$ 的部分离散值如表 2-1 所示, $|F(n\omega)|$ 的图形如图 2-8 所示.

表 2-1

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$F(n\omega)$	$\frac{E}{3}$	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}$	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}\cdot\frac{1}{5}$	0	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}\cdot\frac{1}{7}$

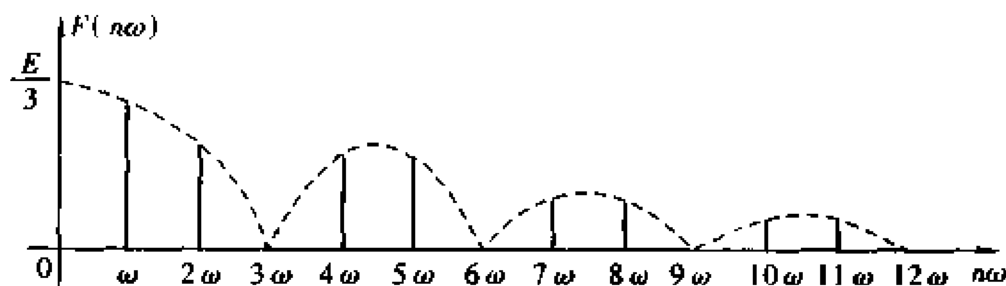
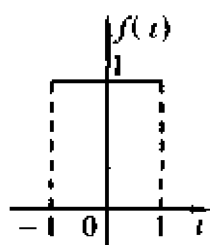


图 2-8

在图 2-8 中用直线条构成的图形就是信号 $f(t)$ 的频谱图,它描绘出信号的各次谐波振幅随频率变化的分布情况.由图可以看出,在 $3\omega=3\cdot\dfrac{2\pi}{T}=2\pi\Big/\dfrac{T}{3}=\dfrac{2\pi}{\tau}$ 处,谱线为 0.在通讯和自动化技术中,常把谱线第一个零点以内的频率范围叫做谱带宽度.因此波宽为 τ 的方波脉冲的频带为$\dfrac{2\pi}{\tau}$.

例 6 求非周期信号(见图 2-9)
$$f(t)=\begin{cases}1 & (|t|\leqslant 1),\\ 0 & (|t|>1)\end{cases}$$的频谱



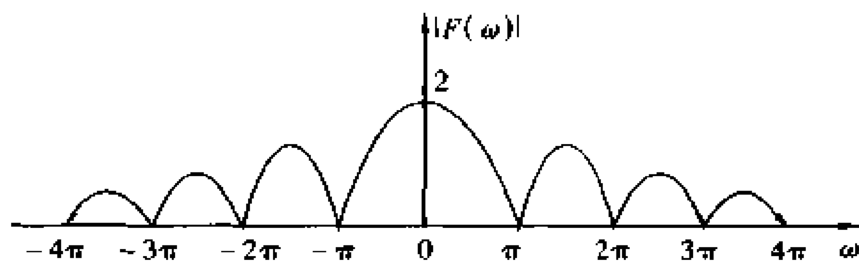


图 2-9　　　　　　　　　　图 2-10

解　$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=2\frac{\sin\omega}{\omega}$,其频谱图如图2-10所示.

2.5 傅里叶变换的性质

假设被变换的函数$f(t)$或其导数在相应场合下满足傅里叶积分存在的条件,则$f(t)$的傅里叶变换具有以下性质.

2.5.1 线性性质

设a,b为两实常数,且$\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$,$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$,则

$$\mathscr{F}[af_1(t)+bf_2(t)]=a\mathscr{F}[f_1(t)]+b\mathscr{F}[f_2(t)]=aF_1(\omega)+bF_2(\omega).$$

$$\mathscr{F}^{-1}[aF_1(\omega)+bF_2(\omega)]=af_1(t)+bf_2(t).$$

2.5.2 对称性质

若$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$　则有

$$\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega).$$

例7　设$f(t)=\begin{cases}1 & (|t|\leqslant 1),\\ 0 & (|t|>1).\end{cases}$已知$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$(此处,若$\omega=0$,取$F(0)=\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{2\sin\omega}{\omega}$),现求$\mathscr{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$.

解　由对称性质,有

$$\mathscr{F}\left[\frac{2\sin t}{t}\right]=2\pi f(-\omega)=2\pi f(\omega)\quad(本例\ f(t)为偶函数),$$

再由线性性质,有

$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\pi f(\omega)=\begin{cases}\pi & (|\omega|\leqslant 1),\\ 0 & (|\omega|>1).\end{cases}$$

2.5.3 相似性质

设$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,且$b\neq 0$,则有

$$\mathscr{F}[f(bt)]=\frac{1}{|b|}F\left(\frac{\omega}{b}\right),$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(b\omega)]=\frac{1}{|b|}f\left(\frac{t}{b}\right).$$

2.5.4 位移性质

设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,则有

$$\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=e^{\pm i\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)]=e^{\pm i\omega t_0}F(\omega).$$

它表明:$f(t)$沿 t 轴正方向平移 t_0,相当于对 $f(t)$的傅里叶变换 $F(\omega)$乘以因子 $e^{-i\omega t_0}$;$f(t)$沿 t 轴负方向平移 t_0,相当于对 $F(\omega)$乘以因子 $e^{i\omega t_0}$.

2.5.5 像函数的位移

若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,则

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega\pm\omega_0)]=e^{\mp i\omega_0 t}f(t).$$

它表明:频谱函数沿 ω 轴正向位移 ω_0,相当于对原来的像原函数 $f(t)$乘以因子 $e^{i\omega_0 t}$;频谱函数沿 ω 轴反向位移 ω_0,相当于对 $f(t)$乘以因子 $e^{-i\omega_0 t}$.

例 8 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}E & (0\leqslant t\leqslant\tau)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$,的傅里叶变换.

解 已知 $f_1(t)=\begin{cases}E & \left(-\frac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2}\right)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$,的傅里叶变换为

$$F_1(\omega)=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2},$$

而 $f(t)$是将 $f_1(t)$沿 t 轴右移$\frac{\tau}{2}$而得.由平移性质,可得

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}\left[f_1\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]=e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}F_1(\omega)$$

$$=e^{-i\frac{\omega\tau}{2}}\cdot\frac{2\tau}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}.$$

2.5.6 微分性质

1° 若当$|t|\to+\infty$时,$f(t)\to 0$,则有下式成立:

$$\mathscr{F}[f'(t)]=i\omega\mathscr{F}[f(t)].$$

2° 如果$\int_{-\infty}^{+\infty}|tf(t)|dt<+\infty$,则 $F'(\omega)$ 存在,且

$$\mathscr{F}^{-1}[F'(\omega)]=-itf(t).$$

注:在计算中经常应用上式的等价形式

$$\mathscr{F}[tf(t)]=iF'(\omega).$$

推论

1° 若当 $|t|\to+\infty$ 时,$f^{(k)}(t)\to 0\ (k=0,1,\cdots,(n-1))$,则下式成立:

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n\mathscr{F}[f(t)].$$

2° 如果$\int_{-\infty}^{+\infty}|t^nf(t)|dt<+\infty$,则 $F^{(n)}(\omega)$ 存在,且

$$\mathscr{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-it)^nf(t).$$

同样,在应用中经常使用上式的等价形式

$$\mathscr{F}[t^n f(t)] = \mathrm{i}^n F^{(n)}(\omega). \tag{2-23}$$

2.5.7 积分性质

若当 $t \to +\infty$ 时,有$\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t \to 0$,则有下式成立:

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathscr{F}[f(t)].$$

此性质表明,求积分运算产生的信号 $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t$ 的频谱是原信号$f(t)$ 的频谱与 $\mathrm{i}\omega$ 之商.

例9 求积分-微分方程

$$af'(t) + bf(t) + c\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t = r(t)$$

满足条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$ 的解,其中 a,b,c 是常数.

解 令 $F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)]$, $R(\omega) = \mathscr{F}[r(t)]$,对原方程两边取傅里叶变换并利用给定的条件,得

$$\mathrm{i}\omega a F(\omega) + bF(\omega) + \frac{c}{\mathrm{i}\omega}F(\omega) = R(\omega),$$

解上述代数方程得

$$F(\omega) = \frac{-\mathrm{i}}{a\omega^2 - \mathrm{i}b\omega - c}R(\omega).$$

对 $F(\omega)$取逆傅里叶变换,得

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{-\mathrm{i}R(\omega)}{a\omega^2 - \mathrm{i}b\omega - c}\right] = -\mathrm{i}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{R(\omega)}{a\omega^2 - \mathrm{i}b\omega - c}\right].$$

2.5.8 乘积定理与帕塞瓦尔等式

(1) 乘积定理

设 $F_1(\omega) = \mathscr{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega) = \mathscr{F}[f_2(t)]$, 且$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)|^2\mathrm{d}t < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t)|^2\mathrm{d}t < +\infty$, 则有下式成立:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\mathrm{d}\omega,$$

此处 $\overline{F_1(\omega)}$, $\overline{F_2(\omega)}$分别是 $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$的共轭函数.

(2) 帕塞瓦尔(Parseval)等式

设$\mathscr{F}[f(t)] = F(t)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t < +\infty$, 则有下式成立:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\mathrm{d}\omega$$

(其中($S(\omega)=|F(\omega)|^2$)

此等式称为帕塞瓦尔等式,又称为**能量积分**. $S(\omega)$称为**能量密度函数**(或称为**能量谱密度**),它决定函数$f(t)$的能量分布规律. $S(\omega)$是ω的偶函数.

例 10 求信号$f(t)=e^{-a|t|}(a>0)$的能量谱密度.

解 因 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|t|}e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-at}e^{-i\omega t}dt$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{(a-i\omega)t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-(a+i\omega)t}dt=\frac{2a}{a^2+\omega^2},$$

故$f(t)$的能量谱密度

$$S(\omega)=|F(\omega)|^2=\frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}.$$

2.6 卷积与相关函数

两个函数的卷积和相关函数是分析系统的有力工具.

2.6.1 卷积的概念

(1)卷积的定义 设$f_1(t),f_2(t)$是定义在实数域上的实值或复值函数,如果$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$存在,则称它为$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积,记为$f_1(t)*f_2(t)$.即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$$

(2)卷积的运算规则

1° 交换律 $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$.

2° 结合律 $f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$.

3° 分配律 $[f_1(t)+f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*f_3(t)+f_2(t)*f_3(t)$.

4° 数乘 设a为常数,则

$$a[f_1(t)*f_2(t)]=[af_1(t)]*f_2(t)=f_1(t)*[af_2(t)].$$

5° 求导规则 $\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=f'_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*f'_2(t)$.

2.6.2 卷积定理

傅里叶变换的一个重要意义是,把原空间两函数的卷积运算转化为像空间中函数间的乘法运算.

卷积定理 设$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega),\mathscr{F}[g(t)]=G(\omega)$,则

1° $\mathscr{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)G(\omega)$,

2° $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)]=f(t)*g(t)$,

3° $\mathscr{F}[f(t)g(t)]=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$.

推论 设$\mathscr{F}[f_k(t)]=F_k(\omega)$ $(k=1,2,\cdots,n)$,则

1° $\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)]=F_1(\omega)F_2(\omega)\cdots F_n(\omega)$,

2° $\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)F_2(\omega)\cdots F_n(\omega)]=f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)$,

3° $\mathscr{F}[f_1(t)f_2(t)\cdots f_n(t)]=\dfrac{1}{(2\pi)^{n-1}}F_1(\omega)*F_2(\omega)*\cdots*F_n(\omega)$.

例 11 求下列函数的卷积：

$$f(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} & (t\geqslant 0,\alpha>0),\\ 0 & (t<0);\end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases}e^{-\beta t} & (t\geqslant 0,\beta>0,\text{且 }\beta\neq\alpha),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

解 当 $t\geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned}f(t)*g(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_0^t+\int_t^{+\infty}\right)f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{0}0\cdot e^{-\beta(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+\int_0^t e^{-\alpha\tau}e^{-\beta(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+\int_t^{+\infty}e^{-\alpha\tau}\cdot 0\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t e^{-\beta t}e^{-(\alpha-\beta)\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\alpha-\beta}[e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}].\end{aligned}$$

当 $t<0$ 时,

$$\begin{aligned}f(t)*g(t)&=\left(\int_{-\infty}^{t}+\int_t^0+\int_0^{+\infty}\right)f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{t}0\cdot e^{-\beta(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+\int_t^0 0\cdot 0\mathrm{d}\tau+\int_0^{+\infty}e^{\alpha\tau}\cdot 0\mathrm{d}\tau=0.\end{aligned}$$

综合以上两种情况,得

$$f(t)*g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-\beta}[e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}] & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

例 12 设 $f(t)=u(t)\sin(\omega_0 t)$,试求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 由卷积定理有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[u(t)\sin(\omega_0 t)]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[u(t)]*\mathscr{F}[\sin(\omega_0 t)]$$

而

$$\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$\mathscr{F}[\sin(\omega_0 t)]=\mathrm{i}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

应用 δ 函数的卷积性质,得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t)]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\tau}+\pi\delta(\tau)\right]\cdot[\mathrm{i}\pi\delta(\omega+\omega_0-\tau)-\mathrm{i}\pi\delta(\omega-\omega_0-\tau)]\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau[\delta(\omega+\omega_0-\tau)-\delta(\omega-\omega_0-\tau)]\mathrm{d}\tau+\\&\quad\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)[\delta(\omega+\omega_0-\tau)-\delta(\omega-\omega_0-\tau)]\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega+\omega_0}-\frac{1}{\omega-\omega_0}\right]+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\end{aligned}$$

$$= \frac{-\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{i\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)].$$

2.6.3 相关函数的概念

设 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 是两个不同的实值函数,则称积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) \mathrm{d}t$$

为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的**互相关函数**,记为 $R_{12}(\tau)$. 且称 τ 为时间的迟延. 即

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) \mathrm{d}t,$$

显然

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t+\tau) f_2(t) \mathrm{d}t.$$

当 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ 时,称积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau) \mathrm{d}t$$

为函数 $f(t)$ 的**自相关函数**(简称**相关函数**),记为 $R(\tau)$,即

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau) \mathrm{d}t.$$

由互相关函数和自相关函数的定义知,它们有如下性质:

1° $R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau)$,

2° $R(-\tau) = R(\tau)$.

2.6.4 相关函数与能量谱密度之间的关系

(1) 互能量谱密度的定义　设 $\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$, $\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, 称 $\overline{F_1(\omega)} F_2(\omega)$ 为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的**互能量谱密度**. 且记为 $S_{12}(\omega)$, 即

$$S_{12}(\omega) = \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega).$$

显然, $S_{12}(\omega)$ 有如下性质:

$$S_{21}(\omega) = \overline{S_{12}(\omega)} \tag{2-24}$$

(2) $f(t)$ 的自相关函数 $R(\tau)$ 和能量谱密度 $S(\omega)$ 构成一个傅里叶变换对:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \mathrm{e}^{-i\omega\tau} \mathrm{d}\tau.$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \mathrm{e}^{i\omega\tau} \mathrm{d}\omega.$$

只要在乘积定理中,令 $f_1(t) = f(t)$, $f_2(t) = f(t+\tau)$, 且记 $F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)]$, 再利用位移性质,上述结论便可得到证实.

(3) $f_1(t)$, $f_2(t)$ 的互相关函数 $R_{12}(\tau)$ 与它们的互能量谱密度 $S_{12}(\omega)$ 构成一个傅里叶变换对:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{12}(\omega) \mathrm{e}^{i\omega\tau} \mathrm{d}\omega,$$

$$S_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

上述结果的正确性，同样可由互相关函数定义、乘积定理和位移性质加以证实.

例 13　求能量信号

$$f(t)=\begin{cases}e^{-\beta t} & (t\geqslant 0,\beta>0),\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

的相关函数和能量谱密度，并验证它们是一个傅里叶变换对.

解　由相关函数的定义，有

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)dt.$$

为计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)dt$，要注意到

$$f[t+\tau]=\begin{cases}e^{-\beta(t+\tau)} & (t\geqslant\tau),\\ 0 & (t<\tau)\end{cases}$$

有分段点 $t=-\tau$，而 $f(t)$ 有分段点 $t=0$，故积分要分 $\tau\geqslant 0$ 和 $\tau<0$ 计算：

当 $\tau\geqslant 0$ 时，

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot f(t+\tau)dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-\beta(t+\tau)}dt$$

$$= e^{-\beta\tau}\int_{0}^{+\infty} e^{-2\beta t}dt = \frac{1}{2\beta}e^{-\beta\tau}.$$

当 $\tau<0$ 时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{-\tau} f(t)\cdot 0dt + \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-\beta t}\, e^{-\beta(t+\tau)}dt$$

$$= e^{-\beta\tau}\int_{-\tau}^{+\infty} e^{-2\beta t}dt = \frac{1}{2\beta}e^{\beta\tau}.$$

综合以上两种情形，得 $f(t)$ 的相关函数为

$$R(\tau) = \frac{1}{2\beta}e^{-\beta|\tau|}.$$

因
$$\mathscr{F}[f(t)] = \frac{1}{\beta+i\omega} = F(\omega),$$

故 $f(t)$ 的能量谱密度

$$S(\omega) = |F(\omega)|^2 = \left|\frac{1}{\beta+i\omega}\right|^2 = \frac{1}{\beta^2+\omega^2}.$$

由例 16 知，$\mathscr{F}[e^{-\beta|\tau|}] = \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$，再由线性性质知，$\mathscr{F}\left[\frac{1}{2\beta}e^{-\beta|\tau|}\right] = \frac{1}{2\beta}\cdot\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$ $= \frac{1}{\beta^2+\omega^2} = S(\omega)$. 因而 $R(\tau)$ 与 $S(\omega)$ 构成一个傅里叶变换对.

2.7　傅里叶变换在求解微分方程中的应用

用傅里叶变换求解常微分方程，其优点在于它能将求解常微分方程转化为求

解代数方程，其步骤如下：

1° 对原常微分方程两边取傅里叶变换，并代入初始条件（若已给定），使之变为像函数的代数方程.

2° 求解代数方程，求出未知函数 $f(t)$ 的像函数 $F(\omega)$.

3° 对像函数 $F(\omega)$ 取反傅里叶变换，即得所求的像原函数 $f(t)$.

例 14 图 2-11 所示的系统，其输入为 $e(t)(t\geq 0)$. 假设系统的初始值为零 $(x(0)=0)$. 试求系统的输出 $x(t)$（设当 $t<0$ 时，$h(t)=e(t)=0$）.

解 联系系统输入输出的微分方程是

$$RCx'(t)+x(t)=e(t),$$

初始条件是 $x(0)=0$.

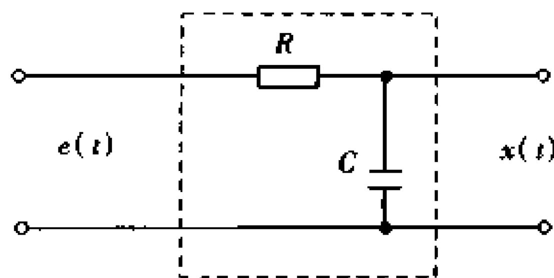


图 2-11

1° 对方程两边取傅里叶变换，且记 $\mathscr{F}[x(t)]=X(\omega)$，$\mathscr{F}[e(t)]=E(\omega)$，得

$$RC[\mathrm{i}\omega X(\omega)]+X(\omega)=E(\omega).$$

2° 对上述代数方程求解，得

$$X(\omega)=\frac{1}{1+RC\omega\mathrm{i}}E(\omega).$$

3° 对 $X(\omega)$ 取反傅里叶变换，得

$$\begin{aligned}x(t)&=\mathscr{F}^{-1}[X(\omega)]=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+RC\omega\mathrm{i}}E(\omega)\right]\\&=\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+RC\omega\mathrm{i}}\right)*\mathscr{F}^{-1}[E(\omega)]\\&=\frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)*e(t).\end{aligned}$$

用傅里叶变换求解偏微分方程的优点是减少方程中自变量的个数，把求像原函数的偏微分方程转化为求像函数的常微分方程. 求出像函数后，取逆变换即得原方程的解.

例 15 求解下列振动问题的柯西(Cauchy)问题：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}\quad(t>0,\ -\infty<x<+\infty),\\u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=0,\text{且假定}\\\lim\limits_{|x|\to\infty}u(x,t)=\lim\limits_{|x|\to 0}u_x(x,t)=0.\end{cases}$$

解 对方程中的各式关于 x 分别取傅里叶变换（设变换均存在），且记

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=U(\omega,t),\quad \mathscr{F}[u(x,0)]=\mathscr{F}[\varphi(x)]=\Phi(\omega).$$

由傅里叶变换性质得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}U(\omega,t)=-a^2\omega^2U(\omega,t),\\U(\omega,0)=\Phi(\omega),\\\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\omega,0)=0.\end{cases}$$

这是一个带参数 ω 的常微分方程的柯西问题，其解是

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)\cos(a\omega t).$$

对上式取傅里叶逆变换，便得原偏微分方程的定解问题的解为

$$u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,t)]=\mathscr{F}^{-1}[\Phi(\omega)\cos(a\omega t)].$$

因为

$$\mathscr{F}^{-1}[\Phi(\omega)]=\varphi(x),$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\cos(a\omega t)]=\frac{1}{2}[\delta(x+at)+\delta(x-at)],$$

而

$$\mathscr{F}^{-1}[\Phi(\omega)\cos(a\omega t)]=\varphi(x)*\frac{1}{2}[\delta(x+at)+\delta(x-at)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\varphi(\tau)[\delta(x+at-\tau)+\delta(x-at-\tau)]\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)],$$

故

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)].$$

2.8　离散傅里叶变换

计算机使科技计算变得异常快速方便.为便于上机计算,常常要对连续信号进行采样,得到一系列离散信号.一般工程或科技实践中,采样是等间隔的,即 $t=nT$,T 是各相邻采样时间之间的时间间隔.这样,离散时间信号,一般可用一个序列 $\{f(n)\}$ 来表示.其中每个值 $f(n)$,称为样本值.

2.8.1　序列

下面是一些常见序列及其运算:

(1) 双边序列　自变量取全体整数的序列称为**双边序列**.一般表示为

$$\{f(n)\}\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

(2) 单边序列　自变量只取非负整数的序列称为**单边序列**,也称为**有始序列**.一般表示为

$$\{f(n)\}\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

(3) 有限长序列　若序列的长度有限,称为**有限长序列**.一般表示为

$$\{f(n)\}\quad (N_1\leqslant n\leqslant N_2, N_1, N_2\text{ 为两整数}).$$

(4) 长度为 N 的有限序列　一个长度为 N 的有限序列,常表示为

$$\{f(n)\}\quad (0\leqslant n\leqslant N-1, N\text{ 为正整数}).$$

(5) 周期性序列　一个采样时间间隔为 T,周期为 NT 的**周期性序列** $f_{\mathrm{p}}(n)$(下标 p 表示周期)是具有如下周期特征的序列

$$f_{\mathrm{p}}(n)=f_{\mathrm{p}}(n+rN)\quad (0\leqslant n\leqslant N-1, r=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots).$$

它的取值是长度为 N 的有限序列

$$\{f(n)\}\quad (0\leqslant n\leqslant N-1)$$

的取值的无限重复出现.

(6) 长度为 N 的有限序列与周期性序列的关系　若一个长度为 N 的有限序

列$f(n)$(以后简记$\{f(n)\}$为$f(n)$),其对应的周期性序列为

$$f_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} f(n + rN).$$

由于$f(n)$的长度为N,因此不同的r值,对应的$f(n+rN)$的各项值,相互之间并不重叠.若令

$$n = n_2 N + n_1 \quad (0 \leqslant n_1 \leqslant N-1),$$

则周期性序列还可以用下式表达,即

$$f_p(n) = f((n)_N) = f(n_1) \quad (0 \leqslant n_1 \leqslant N-1),$$

其中$(n)_N$表示从n中去掉N的整数倍后,留下的小于N的余数n_1.

反之,给定一个周期性序列$f_p(n)$,若在其中抽出一周来,就得到一个相应的有限长序列$f(n)$,即

$$f(n) = \begin{cases} f_p(n) & (0 \leqslant n \leqslant N-1), \\ 0 & (\text{其他 } n \text{ 值}). \end{cases}$$

(7) 序列的相加　两个序列相加定义为两个序列中对应的各样本值的相加.即

$$x + y = \{x(n) + y(n)\}.$$

(8) 序列的相乘　两个序列相乘定义为两个序列中对应的各样本值的相乘.即

$$x \cdot y = \{x(n) \cdot y(n)\}.$$

(9) 常数乘序列　一常数a乘序列定义为用a乘序列中的每一个样本值.即

$$a \cdot x = \{ax(n)\}.$$

(10) 序列的时移　若序列y是序列x的时延序列,其时延为n_0,则序列y可由下式表达:

$$y(n) = x(n - n_0) \quad (n_0 \text{ 为整数}).$$

2.8.2 离散傅里叶级数

一个周期性连续信号的傅里叶级数表示式是

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{-ik\omega t},$$

其中

$$D_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt, \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

一个周期性离散时间序列$f_p(nT) = f_p(n)$,它的采样时间间隔为T,周期为NT.即具有如下的周期性特征:$f_p(n) = f_p(n + rN)$,式中$0 \leqslant n \leqslant N-1, r = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$,则它也是由无限多个谐波组成,其基波的角频率为$\Omega = \frac{2\pi}{NT}$,其傅里叶级数表示式为

$$f_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_p(k) e^{i\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}.$$

为简写上式,令 $W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$,得

$$f_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_p(k) W^{-kn},$$

且周期性的离散时间序列对应周期性的离散频谱序列,即

$$f_p(n) = f_p(n + rN) \longleftrightarrow F_p(k) = F_p(k + mN).$$

这里时间序列的周期是 N 个采样间隔,即 NT.频谱序列的周期是 N 根谱线间隔,即 $N\Omega = \frac{2\pi}{T}$. r, m 都是有理整数.而 $0 \leqslant n \leqslant N-1, 0 \leqslant k \leqslant N-1$.从 $f_p(n)$的傅里叶级数展开式来看,它包含了无穷多根谱线.但由于频谱序列也是周期性的,实际上能反映频谱分布.有代表性的谱线只需 N 根:即

$$F_p(k) \quad (0 \leqslant k \leqslant N-1)$$

其余的都是这 N 根谱线的反复出现.因此,$f_p(n)$的傅里叶级数展开式,可用只有 N 根谱线的组合来表达:即

$$f_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_p(k) e^{i\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}.$$

为处理上的方便,把上式右边乘以常系数$\frac{1}{N}$,并不会引起任何实质性的变化.于是将 $f_p(n)$ 表示为

$$f_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_p(k) e^{i\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_p(k) W^{-kn}. \tag{2-25}$$

这样可以推出用 $f_p(n)$ 表示上式中 $F_p(k)$ 的关系:

$$F_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_p(n) e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = \sum_{n=0}^{N-1} f_p(n) W^{kn} \quad (0 \leqslant k \leqslant N-1), \tag{2-26}$$

称(2-25)式和(2-26)式为离散傅里叶级数.再集中表示如下:

$$F_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_p(n) e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = \sum_{n=0}^{N-1} f_p(n) W^{kn}$$
$$(k = 0,1,2,\cdots,N-1),$$
$$f_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_p(k) e^{i\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_p(k) W^{-kn}$$
$$(n = 0,1,2,\cdots,N-1).$$

利用上两式求得频谱序列中的 N 根谱线或时间序列中的 N 个样本值,就可以根据周期性分别求得任意 k 值的谱线的傅里叶系数或任意 n 值时的样本值来.

例如,若一个周期性离散时间序列为

$$f_p(n) = a^n \quad (0 \leqslant n \leqslant N-1),$$

而

$$f_p(n + rN) = f_p(n) \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

则其离散频谱序列 $F_p(k)$ 为

$$F_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = \sum_{n=0}^{N-1} [a e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}]^n$$

$$= \frac{1-[ae^{-i(\frac{2\pi}{N})k}]^N}{1-ae^{-i(\frac{2\pi}{N})k}} = \frac{1-a^N}{1-ae^{-i(\frac{2\pi}{N})k}}$$
$$(0 \leqslant k \leqslant N-1).$$

2.8.3 离散傅里叶变换的概念

由于有限长度为 N 的序列,可以视为一个周期为 N 的周期性序列在一周内的样本序列.它可以唯一地确定以 N 为周期的周期性序列的傅里叶级数表达形式,也可以用它来确定有限长度为 N 的时间序列所对应的傅里叶频谱序列的表达形式.由此可以导出离散傅里叶变换的概念.

对长度为 N 的有限序列 $f(n)(n=0,1,2,\cdots,N-1)$ 的傅里叶表达方式叫做傅里叶变换.具体定义如下:

$$F(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-i(\frac{2\pi}{N})kn} & (0 \leqslant k \leqslant N-1), \\ 0 & (\text{其他 } k \text{ 值}). \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{i(\frac{2\pi}{N})kn} & (0 \leqslant n \leqslant N-1), \\ 0 & (\text{其他 } n \text{ 值}). \end{cases}$$

这一对变换称为**离散傅里叶变换对**.其中 $F(k)$ 的变换式称为正变换(DFT),$f(n)$ 的变换式称为逆变换(LDFT).为书写方便,不妨仍用 $\mathscr{F}$ 表正离散傅里叶变换,$\mathscr{F}^{-1}$ 表示反离散傅里叶变换.即 $\mathscr{F}[f(n)] = F(k)$,$\mathscr{F}^{-1}[F(k)] = f(n)$.

要注意的是,在运用离散傅里叶变换公式时,所处理的有限长度序列是周期性序列的一个周期.

例 16 设给定序列 $\{f(n)\} = \{f(0),f(1),f(2),f(3)\} = \{1,0,0,1\}$,试求其频谱序列 $\{F(k)\}$.

解 由傅里叶变换公式

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-i(\frac{2\pi}{N})nk} \quad (k = 0,1,2,\cdots,N-1)$$

这里 $N=4, k=0,1,2,3$,可得

$$F(0) = \sum_{n=0}^{3} f(n)e^{-i(\frac{2\pi}{4})n\cdot 0} = \sum_{n=0}^{3} f(n) = 1+0+0+1 = 2,$$

$$F(1) = \sum_{n=0}^{3} f(n)e^{-i(\frac{2\pi}{4})n\cdot 1} = \sum_{n=0}^{3} f(n)e^{-i(\frac{\pi}{2})n}$$
$$= e^{-i\frac{\pi}{2}\cdot 0} + 0 + 0 + e^{-i\frac{3\pi}{2}} = 1+i,$$

$$F(2) = \sum_{n=0}^{3} f(n)e^{-i(\frac{2\pi}{4})n\cdot 2} = \sum_{n=0}^{3} f(n)e^{-i\pi n}$$
$$= 1+0+0+(-1) = 0,$$

$$F(3) = \sum_{n=0}^{3} f(n)e^{-i(\frac{2\pi}{4})n\cdot 3} = \sum_{n=0}^{3} f(n)e^{-i\frac{3\pi}{2}n}$$

$$= 1 + 0 + 0 + e^{-i\frac{9\pi}{2}} = 1 - i.$$

故离散傅里叶变换为

$$\{f(n)\} \longleftrightarrow \{F(k)\},$$

即

$$\{1,0,0,1\} \longleftrightarrow \{2,1+i,0,1-i\}.$$

2.8.4　离散傅里叶变换的性质

(1) 线性性质　设序列 $f_1(n), f_2(n)$ 的长度同为 N，且 $\mathscr{F}[f_1(n)] = F_1(k)$，$\mathscr{F}[f_2(n)] = F_2(k)$，则有

$$\mathscr{F}[f_1(n) + f_2(n)] = F_1(k) + F_2(k).$$

(2) 时移性质　设 $\mathscr{F}[f(n)] = F(k)$，且序列 $f(n)$ 在时间上移一个整数 l 位，则对应的离散傅里叶变换具有如下形式：

$$\mathscr{F}[f(n-l)] = e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)kl}F(k).$$

例如，若 $\{f(n)\} = \{1,0,0,0\} \longleftrightarrow \{1,1,1,1\}$，则

$\{f(n-1)\} = \{0,1,0,0\} \longleftrightarrow \{1,(-i),(-i)^2,(-i)^3\} = \{1,-i,-1,i\}$，

$\{f(n-2)\} = \{0,0,1,0\} \longleftrightarrow \{1,(-i)^2,(-i)^4,(-i)^6\} = \{1,-1,1,-1\}$，

$\{f(n-3)\} = \{0,0,0,1\} \longleftrightarrow \{1,(-i)^3,(-i)^6,(-i)^9\} = \{1,i,-1,-i\}$.

还可以用定义直接计算，检验上述结果的正确性.

(3) 圆周位移　用以下观点考察(2)的时移情况：将 $f(n)$ 看成周期性序列 $f_p(n)$ 中其长度为一个周期的一段. 将 $f_p(n)$ 时移 l 后得 $f_p(n-l)$. 再从 $f_p(n-l)$ 中取出一周构成序列 $f_1(n)$. 而

$$f_1(n) = \begin{cases} f((n-l))_N & (0 \leqslant n \leqslant N-1), \\ 0 & (\text{其他 } n \text{ 值}), \end{cases}$$

其过程如图 2-12 所示. 由图看出，简单地把有限长度序列 $f(n)$ 作线性时移 $l=2$，并不能得到 $f_1(n)$. 而要把 $f(n)$ 中的 N 个样本等间隔地刻在一个圆柱面上，使 $f(0)$

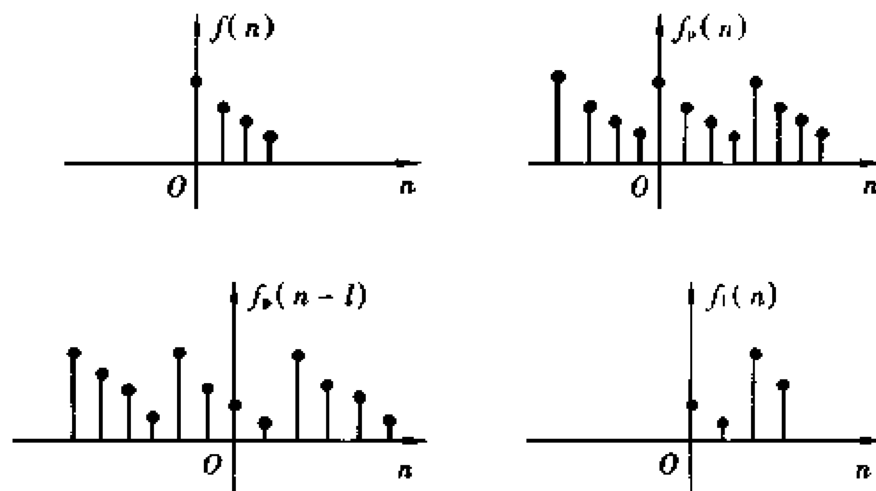


图 2-12

与 $f(N-1)$ 首尾相接. 然后随 n 的增长,在圆柱面上得出周期性的 $f_p(n)$,再把 $f_p(n)$ 作时移(相当于旋转圆柱体),才能得到对应于 $f_1(n)$ 的周期性序列,即 $f_{1p}(n)$. 因此,这种位移称为**圆周位移**.

(4) **频移定理** 若 $\mathscr{F}[f(n)]=F(k)$,则有

$$\mathscr{F}[f(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{2\pi}{N})ln}]=F(k-l).$$

(5) 对称性质 若 $\mathscr{F}[f(n)]=F(k)$,则有

$$\mathscr{F}[\frac{1}{N}F(n)]=f(-k).$$

(6) **反转定理** 若 $\mathscr{F}[f(n)]=F(k)$,则

$$\mathscr{F}[f(-n)]=F(-k).$$

(7) 序列的总和 长度为 N 的时间序列 $f(n)$ 的各样本值的总和等于 $f(n)$ 的离散傅里叶变换式 $F(k)$ 在 $k=0$ 处的值. 即

$$\sum_{n=0}^{N-1}f(n)=F(k)\Big|_{k=0}.$$

(8) 序列的始值 若 $\mathscr{F}[f(n)]=F(k)$,则

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(k)=f(0).$$

2.9 快速傅里叶变换

快速傅里叶变换(简称 FFT) 是在离散傅里叶变换的运算过程中,使在计算机上的运算次数减少,从而提高数字处理速度的一种方法.

设给定时间序列 $f(0),f(1),\cdots,f(N-1)$,计算

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1}f(n)W_N^{nk},$$

其中

$$W_N=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}}$$

上式显示,计算每一个 $F(k)$,需要进行 N 次乘法,$N-1$ 次加法. 要把全部 $F(k)$ 算出来,需要进行 N^2 次乘法,$N(N-1)$ 次加法. 如果使用 FFT 方法,可以大大减少计算量. 特别当 $N=2^m$ 时,效果更为显著.

2.9.1 FFT 计算过程

以 $N=2,4$ 来说明 FFT 的具体计算过程.

(1) 当 $N=2$ 时,$W_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{2}}=-1$,此时

$$F(0)=f(0)+f(1),\ F(1)=f(0)-f(1).$$

写成矩阵形式,有

$$\begin{bmatrix}F(0)\\F(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\end{bmatrix}.$$

(2) 当 $N=4$ 时, $W_4=e^{\frac{i2\pi}{4}}=i$, 把 $F(0),F(1),F(2),F(3)$ 重新排成 $F(0)$, $F(2),F(1),F(3)$, 并注意到 $W_4^0=(i)^0=1$, $W_4^4=(i)^4=1$, $W_4^5=W_4^1$, $W_4^6=W_4^2$, $W_4^7=W_4^3$, $W_4^9=W_4^1$. 故有

$$
\begin{aligned}
F(0)&=f(0)+f(1)+f(2)+f(3),\\
F(2)&=f(0)+f(1)W_4^2+f(2)+f(3)W_4^2,\\
F(1)&=f(0)+f(1)W_4^1+f(2)W_4^2+f(3)W_4^3,\\
F(3)&=f(0)+f(1)W_4^3+f(2)W_4^2+f(3)W_4^1.
\end{aligned}
$$

按上述式子计算 $F(k)$, 要进行 8 次乘法, 12 次加法, 若写成矩阵形式, 有

$$
\begin{bmatrix}F(0)\\F(2)\\F(1)\\F(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&W_4^2&1&W_4^2\\1&W_4^1&W_4^2&W_4^3\\1&W_4^3&W_4^2&W_4^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(0)\\f(2)\\f(1)\\f(3)\end{bmatrix}.
$$

把上式中 4×4 阶矩阵用虚线分成 4 个 2×2 阶子矩阵, 且上面两个子矩阵完全相同, 左下角子矩阵可写为

$$
\begin{bmatrix}1&W_4^1\\1&W_4^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&W_4^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&W_4^1\end{bmatrix}.
$$

再注意到 $W_4^1=i$, $W_4^2=-1$, 右下角子矩阵可写为

$$
\begin{bmatrix}W_4^2&W_4^3\\W_4^2&W_4^1\end{bmatrix}=W_4^2\begin{bmatrix}1&W_4^1\\1&W_4^3\end{bmatrix}=-W_4^2\begin{bmatrix}1&1\\1&W_4^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-W_4^1\end{bmatrix}.
$$

于是

$$
\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&W_4^2&1&W_4^2\\1&W_4^1&W_4^2&W_4^3\\1&W_4^3&W_4^2&W_4^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{matrix}1&1\\1&W_4^2\end{matrix}&[0]\\[0]&\begin{matrix}1&1\\1&W_4^2\end{matrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&W_4^1&0&-W_4^1\end{bmatrix}.
$$

记

$$
\begin{bmatrix}A_1(0)\\A_1(1)\\A_1(2)\\A_1(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&W_4^1&0&-W_4^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(0)+f(2)\\f(1)+f(3)\\f(0)-f(2)\\ [f(1)-f(3)]W_4^1\end{bmatrix}\tag{2-27}
$$

故

$$
\begin{bmatrix}F(0)\\F(2)\\F(1)\\F(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{matrix}1&1\\1&W_4^2\end{matrix}&[0]\\[0]&\begin{matrix}1&1\\1&W_4^2\end{matrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1(0)\\A_1(1)\\A_1(2)\\A_1(3)\end{bmatrix}.
$$

又注意到 $W_4^2=W_2^1=-1$, 得

$$
\begin{bmatrix} F(0) \\ F(2) \\ F(1) \\ F(3) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & \multicolumn{2}{c}{[0]} \\ 1 & -1 & & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{[0]} & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} A_1(0) \\ A_1(1) \\ A_1(2) \\ A_1(3) \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1(0) \\ A_1(1) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1(2) \\ A_1(3) \end{bmatrix} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} A_1(0) + A_1(1) \\ A_1(0) - A_1(1) \\ A_1(2) + A_1(3) \\ A_1(2) - A_1(3) \end{bmatrix}. \tag{2-28}
$$

从(2-27),(2-28)式知,为计算 $F(k)$,这样只需 2 次乘法,8 次加法即可.

2.9.2 $F(k)$与 $A_m(k)$的对应关系

(1) 当 $N=2$ 时,$k=0,1$,

$$F(j_0) = A_1(j_0),$$

其中 j_0 取 0 或 1,

$$\begin{bmatrix} A_1(0) \\ A_1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0)+f(1) \\ f(0)-f(1) \end{bmatrix}.$$

(2) 当 $N=4$ 时,$k=0,1,2,3$,用二进制形式表示 k,则 $k=j_1 2+j_0=j_1j_0$,其中 j_1、j_0 取 0 或 1. $F(k)$与 $A_1(k)$的对应关系为

$$F(j_1j_0) = A_1(j_0j_1).$$

(3) 一般情况,当 $N=2^m$ 时,先令

$$
\left[\begin{array}{c} A_1(0) \\ \vdots \\ A_1\left(\frac{N}{2}-1\right) \\ \hdashline A_1\left(\frac{N}{2}\right) \\ A_1\left(\frac{N}{2}+1\right) \\ \vdots \\ A_1(N-1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} f(0)+f\left(\frac{N}{2}\right) \\ \vdots \\ f\left(\frac{N}{2}-1\right)+f(N-1) \\ \hdashline f(0)-f\left(\frac{N}{2}\right) \\ \left[f(1)-f\left(\frac{N}{2}+1\right)\right] W_N^1 \\ \vdots \\ \left[f\left(\frac{N}{2}-1\right)-f(N-1)\right] W_N^{\frac{N}{2}-1} \end{array}\right],
$$

把 $A_1(k)$分成两段,每段都按照 $N=2^{m-1}$的情况进行,即令

$$
\left[\begin{array}{c}
A_2(0) \\
\vdots \\
A_2\left(\frac{N}{4}-1\right) \\
\hline
A_2\left(\frac{N}{4}\right) \\
A_2\left(\frac{N}{4}+1\right) \\
\vdots \\
A_2\left(\frac{N}{2}-1\right) \\
\hline
A_2\left(\frac{N}{2}\right) \\
\vdots \\
A_2\left(\frac{N}{2}+\frac{N}{4}-1\right) \\
\hline
A_2\left(\frac{N}{2}+\frac{N}{4}\right) \\
A_2\left(\frac{N}{2}+\frac{N}{4}+1\right) \\
\vdots \\
A_2(N-1)
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
A_1(0)+A_1\left(\frac{N}{2}\right) \\
\vdots \\
A_1\left(\frac{N}{4}-1\right)+A_1\left(\frac{N}{2}-1\right) \\
\hline
A_1(0)-A_1\left(\frac{N}{4}\right) \\
\left[A_1(1)-A_1\left(\frac{N}{4}-1\right)\right]W_N^2 \\
\vdots \\
\left[A_1\left(\frac{N}{4}-1\right)-A_1\left(\frac{N}{2}-1\right)\right]W_N^{\frac{N}{2}-2} \\
\hline
A_1\left(\frac{N}{2}\right)+A_1\left(\frac{N}{2}+\frac{N}{4}\right) \\
\vdots \\
A_1\left(\frac{N}{2}+\frac{N}{4}-1\right)+A_1(N-1) \\
\hline
A_1\left(\frac{N}{2}\right)-A_1\left(\frac{N}{2}+\frac{N}{4}\right) \\
\left[A_1\left(\frac{N}{2}+1\right)-A_1\left(\frac{N}{2}+\frac{N}{4}+1\right)\right]W_N^2 \\
\vdots \\
\left[A_1\left(\frac{N}{2}+\frac{N}{4}-1\right)-A_1(N-1)\right]W_N^{\frac{N}{2}-2}
\end{array}\right]
$$

再把 $A_2(k)$分成4段,每段按照 $N=2^{m-2}$的情况进行,如此继续 m 次后,得

$$
\begin{bmatrix}
A_m(0) \\
A_m(1) \\
A_m(2) \\
A_m(3) \\
\vdots \\
A_m(N-2) \\
A_m(N-1)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
A_{m-1}(0)+A_{m-1}(1) \\
A_{m-1}(0)-A_{m-1}(1) \\
A_{m-1}(2)+A_{m-1}(3) \\
A_{m-1}(2)-A_{m-1}(3) \\
\vdots \\
A_{m-1}(N-2)+A_{m-1}(N-1) \\
A_{m-1}(N-2)-A_{m-1}(N-1)
\end{bmatrix}.
$$

$F(k)$和 $A_m(k)$的关系是:令 $k=j_{m-1}j_{m-2}\cdots j_0$,则

$$F(j_{m-1}j_{m-2}\cdots j_0)=A_m(j_0j_1\cdots j_{m-1}).$$

这样计算只需要$\frac{N}{2}(m-2)+1$次乘法,mN 次加法,比原来的 N^2 次乘法,$N(N-1)$次加法,减少了很多计算量.而且 m 越大,快速算法越省.

例如，$N=2^3=8$ 的 FFT 计算过程如下：

$$\begin{bmatrix} F(0)\\ F(4)\\ F(2)\\ F(6)\\ F(1)\\ F(5)\\ F(3)\\ F(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3(0)\\ A_3(1)\\ A_3(2)\\ A_3(3)\\ A_3(4)\\ A_3(5)\\ A_3(6)\\ A_3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(0)+A_2(1)\\ A_2(0)-A_2(1)\\ A_2(2)+A_2(3)\\ A_2(2)-A_2(3)\\ A_2(4)+A_2(5)\\ A_2(4)-A_2(5)\\ A_2(6)+A_2(7)\\ A_2(6)-A_2(7) \end{bmatrix}.$$

其中

$$\begin{bmatrix} A_2(0)\\ A_2(1)\\ A_2(2)\\ A_2(3)\\ A_2(4)\\ A_2(5)\\ A_2(6)\\ A_2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(0)+A_1(2)\\ A_1(1)+A_1(3)\\ A_1(0)-A_1(2)\\ [A_1(1)-A_1(3)]W_4^1\\ A_1(4)+A_1(6)\\ A_1(5)+A_1(7)\\ A_1(4)-A_1(6)\\ [A_1(5)-A_1(7)]W_4^1 \end{bmatrix}.$$

这种计算方法，只要 5 次乘法，24 次加法. 计算过程是由 $f(n)$ 计算 $A_1(k)$，再求 $A_2(k)$，$A_3(k)$，把 $A_3(k)$ 适当重排，就可以计算出 $F(k)$.

3　拉普拉斯变换

3.1　拉普拉斯变换的来由与定义

3.1.1　拉普拉斯变换的来由

傅里叶变换要求 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且满足：

1° 狄利克雷条件；

2° 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积.

但在工程上遇到的不少函数难以满足这些条件. 例如，正弦函数、余弦函数、单边函数等都不满足上述条件. 因此，有必要对傅里叶变换进行某些改进，改进的方法是：对任意函数 $\varphi(t)$ 乘以单位函数 $u(t)$（见例 1）和指数衰减函数 e^{-ct} $(c>0)$. 乘前者是使积分区间由 $(-\infty,+\infty)$ 换成 $[0,+\infty)$，再乘后者，只要 c 选择合适，可使 $u(t)\cdot\varphi(t)e^{-ct}$ 绝对可积. 因而使得傅里叶变换存在. 对函数 $\varphi(t)$ 乘以 $u(t)$

$e^{-ct}(c>0)$再取傅里叶变换,就引出了拉普拉斯变换的概念.

对函数 $\varphi(t)u(t)e^{-ct}(c>0)$取傅里叶变换,且记

$$f(t)=\varphi(t)u(t)\quad (\text{当 } t<0 \text{ 时}, f(t)=0),$$

于是有

$$f(t)e^{-ct} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-c\tau}\cdot e^{i\omega(t-\tau)}d\tau,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-(c+i\omega)\tau}d\tau\right]e^{(c+i\omega)t}d\omega.$$

令 $s=c+i\omega$,则 $id\omega=ds$,故有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]e^{st}ds.$$

记

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}dt.$$

3.1.2　拉普拉斯变换的定义

设函数 $f(t)$在 $t\geqslant 0$ 时有定义,如果对于复参量 $s=c+i\omega$,积分 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 在 s 的某一区域内存在,则由此积分所确定的函数

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{3-1}$$

称为函数 $f(t)$的**拉普拉斯变换**(或**像函数**).(3-1)式称为 $f(t)$的拉普拉斯变换式,常简记为

$$F(s)=L[f(t)].$$

即

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

称

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds \tag{3-2}$$

为 $F(s)$的**反演公式**,称 $f(t)$为 $F(s)$的**拉普拉斯逆变换**.记为 $L^{-1}[F(s)]$,即

$$f(t)=L^{-1}[F(s)].$$

由(3-1)式可以看出 $f(t)(t\geqslant 0)$的拉普拉斯变换,就是 $f(t)u(t)e^{-ct}$的傅里叶变换.

例1　求单位函数 $u(t)=\begin{cases}1 & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0)\end{cases}$的拉普拉斯变换.

解　$F(s)=L[u(t)]=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}\quad(\text{Re}s>0).$

类似地,

$$u(t-a)=\begin{cases}1 & (t\geqslant a),\\ 0 & (t<a)\end{cases}$$

的拉普拉斯变换为

$$F(s)=L[u(t-a)]=\int_a^{+\infty}1\cdot e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^{+\infty}=\frac{e^{-sa}}{s}\quad (\mathrm{Re}s>0).$$

例 2 求指数函数 $f(t)=e^{kt}(k>0)$的拉普拉斯变换.

解 $$F(s)=L[e^{kt}]=\int_0^{+\infty}e^{kt}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{(k-s)t}dt$$

$$=\frac{1}{k-s}e^{(k-s)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{k-s}\qquad (\mathrm{Re}s>k).$$

例 3 求 δ 函数的拉普拉斯变换.

解 $$F(s)=L[\delta(t)]=\int_0^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt=e^{st}\Big|_{t=0}=1.$$

例 4 求周期函数的拉普拉斯变换.

解 设 $f(t)=f(t+nT)$ （T 为周期，$n=0,1,2,\cdots$），

则 $$L[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T}f(t)e^{-st}dt.$$

在上式右边，令 $t=u+nT$，则

$$\begin{aligned}L[f(t)]&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^T e^{-nsT}f(u+nT)e^{-us}du\\&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nsT}\int_0^T f(u)e^{-us}du\\&=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt.\end{aligned}$$

3.1.3 拉普拉斯变换存在定理

若 $f(t)$满足下列条件：

1° $f(t)$在$[0,+\infty)$上任一有限区间上分段连续；

2° 存在常数 $M>0,c>0$ 及 $T>0$，对于 $t>T$ 的一切 t，恒有$|f(t)|<Me^{ct}$，则 $f(t)$的拉普拉斯变换

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt\quad (\mathrm{Re}s>c)$$

存在，并且 $F(s)$是半平面 $\mathrm{Re}s>c$ 内的解析函数.

满足本定理条件 2° 的函数$f(t)$，称它的增大是指数级的，c 称为$f(t)$的增长指数.

3.2 拉普拉斯变换的性质

以下性质，凡涉及函数或导数的拉普拉斯变换，都假定它们存在.

3.2.1　线性性质

设 α,β 为常数,且

$$L[f_1(t)] = F_1(s),$$
$$L[f_2(t)] = F_2(s),$$

则
$$L[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha L[f_1(t)] + \beta L[f_2(t)].$$

3.2.2　微分性质

(1) 像原函数的微分　设 $L[f(t)] = F(s)$,则

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0).$$

若 $f(t)$在 $t=0$ 处不连续,上式中 $f(0)$应理解为 $f(0+0)$.

推论　若 $L[f(t)] = F(s)$,则

$$L[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

同样,若 $f(t)$在 $t=0$ 处不连续,上式中的 $f(0),f'(0),\cdots,f^{(n-1)}(0)$都应理解为相应的右极限值.

特别,当 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ 时,有

$$L[f^{(n)}(t)] = s^nF(s).$$

利用微分性质,可将 $f(t)$的微分方程经拉普拉斯变换转化为 $F(s)$的代数方程.

例 5　求 $f(t)=\cos(kt)$的拉普拉斯变换.

解　由于 $f(0)=1,f'(0)=0,f''(t)=-k^2\cos(kt)$,利用线性性质和微分性质,有

$$L[-k^2\cos(kt)] = L[f''(t)] = S^2L[f(t)] - sf(0) - f'(0),$$

即
$$-k^2L[\cos(kt)] = s^2L[\cos(kt)] - s,$$

故
$$L[\cos(kt)] = \frac{s}{s^2+k^2}.$$

(2) 像函数的微分　设 $L[f(t)] = F(s)$,　则

$$L^{-1}[F'(s)] = -t\,f(t).$$

一般有

$$L^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-t)^nf(t).$$

与之等价的形式是

$$L[t^nf(t)] = (-1)^nF^{(n)}(s).$$

利用此性质,可得下列函数的像函数:

1° 由 $L(1)=\frac{1}{s}$,得 $L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$.

2° 由 $L[e^{at}]=\frac{1}{s-a}$,得 $L[t^ne^{at}]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$.

3° 由 $L[\cos\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$,得 $L[t\cos\omega t]=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$.

(3) 参数的微分　设 $L[f(t,x)]=F(s,x)$,其中 x 为参数,则

$$L\left[\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right]=\frac{\partial}{\partial x}F(s,x).$$

例6　求 $L^{-1}\left[\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)^2}\right]$.

解　因
$$L[\sin(\omega t)]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$
故
$$L\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]=\frac{1}{s^2+\omega^2}.$$
而
$$L^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)=\frac{t\cos(\omega t)}{\omega}-\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2},$$
又
$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{-2\omega}{(s^2+\omega^2)^2},$$
所以
$$L^{-1}\left(\frac{-2\omega}{(s^2+\omega^2)^2}\right)=\frac{t\cos(\omega t)}{\omega}-\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2}.$$
即
$$L^{-1}\left[\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{\sin(\omega t)}{2\omega^2}-\frac{t\cos(\omega t)}{2\omega}.$$

3.2.3　积分性质

(1) 像原函数的积分　设 $L[f(t)]=F(s)$,则

$$L\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]=\frac{F(s)}{s}.$$

一般有
$$L\underbrace{\left[\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}t\cdots\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]}_{n\text{次}}=\frac{F(s)}{s^n}.$$

(2) 像函数的积分　设 $L[f(t)]=F(s)$,且 $\int_s^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s$ 收敛,则

$$L^{-1}\left[\int_s^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s\right]=\frac{f(t)}{t},$$

其等价表示式为

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s.$$

注:若 $\frac{f(t)}{t}$ 在 $t=0$ 处有无穷型间断点,此时 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 不可积,则此积分性质失效.若定义 $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=0$,则此积分性质仍成立.

例7　求 $f(t)=\frac{\mathrm{e}^{bt}-\mathrm{e}^{at}}{t}$ 的像函数.

解　因　$L[\mathrm{e}^{bt}-\mathrm{e}^{at}]=L[\mathrm{e}^{bt}]-L[\mathrm{e}^{at}]=\frac{1}{s-b}-\frac{1}{s-a}$,

由像函数积分性质的等价形式知

$$L\left[\frac{\mathrm{e}^{bt}-\mathrm{e}^{at}}{t}\right]=\int_s^{+\infty}\left[\frac{1}{s-b}-\frac{1}{s-a}\right]\mathrm{d}s$$

$$= \ln\frac{s-b}{s-a}\Big|_s^{\infty} = \lim_{N\to\infty}\left[\ln\frac{N-b}{N-a} - \ln\frac{s-b}{s-a}\right]$$

$$= \ln\frac{s-a}{s-b}.$$

(3) 参数的积分　设 $L[f(t,x)] = F(s,x)$,其中 x 为参数,则

$$L\left[\int_{x_0}^{x} f(t,x)\mathrm{d}x\right] = \int_{x_0}^{x} F(s,x)\mathrm{d}x.$$

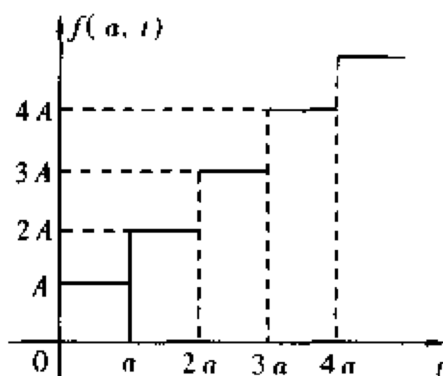


图 3-1

3.2.4 位移性质

(1) 向右平移(又称延迟定理)　设 $L[f(t)] = F(s)$,对任意实数 $t_0 > 0$,有

$$L[f(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-st_0}F(s).$$

注:应用中常使用等价形式

$$L[\mathrm{e}^{at}f(t)] = F(s-a).$$

例 8　求如图 3-1 所示的阶梯函数的拉普拉斯变换.

解　因 $f(a,t) = A[u(t) + u(t-a) + u(t-2a) + \cdots + u(t-na)]$,由线性性质和延迟定理,有

$$L[f(a,t)] = AL[u(t) + u(t-a) + u(t-2a) + \cdots + u(t-na)]$$

$$= A\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-as} + \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2as} + \cdots + \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-nas}\right]$$

$$= \frac{A}{s}[1 + \mathrm{e}^{-as} + \mathrm{e}^{-2as} + \cdots + \mathrm{e}^{-nas}]$$

$$= \frac{A}{s}\left[\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-as}}\right] \quad (\mathrm{Re}s > 0).$$

(2) 向左平移　设 $L[f(t)] = F(s)$,对任意 $t_0 > 0$,有

$$L[f(t+t_0)] = \mathrm{e}^{st_0}\left[F(s) - \int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t\right].$$

例 9　求 $f(t) = \cos(t+\pi)$的拉普拉斯变换.

解法一　因已知　$L(\cos t) = \dfrac{s}{s^2+1}$,

由向左平移性质得

$$L[\cos(t+\pi)] = \mathrm{e}^{s\pi}\left[\frac{s}{s^2+1} - \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-st}\cos t\mathrm{d}t\right]$$

$$= \mathrm{e}^{s\pi}\left[\frac{s}{s^2+1} - \left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\cos t\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{s}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-st}\sin t\mathrm{d}t\right)\right]$$

$$= \mathrm{e}^{s\pi}\left[\frac{s}{s^2+1} - \frac{s(1+\mathrm{e}^{-s\pi})}{1+s^2}\right]$$

$$= -\frac{s}{1+s^2}.$$

解法二 因 $\cos(t+\pi)=-\cos(t)$,故

$$L[\cos(t+\pi)]=-L(\cos t)=-\frac{s}{1+s^2}.$$

两种解法的结果一致.

3.2.5 相似定理

设 $L[f(t)]=F(s)$,则对任意 $k>0$,有

$$L[f(kt)]=\frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right).$$

或

$$L^{-1}[F(ks)]=\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right).$$

例如,由 $L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$,有

$$L[(kt)^n]=\frac{1}{k}\frac{k^{n+1}n!}{s^{n+1}}=\frac{n!k^n}{s^{n+1}}\quad(k>0),$$

$$L\left[\frac{1}{k}\left(\frac{t}{k}\right)^n\right]=\frac{n!}{(ks)^{n+1}}.$$

3.2.6 初值定理与终值定理

(1) **初值定理** 若 $L[f(t)]=F(s)$,且 $\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$存在,则

$$\lim_{t\to0+0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s),$$

或写为

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}sF(s).$$

(2) **终值定理** 设 $L[f(t)]=F(s)$,且 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$存在,则

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s),$$

或

$$f(+\infty)=\lim_{s\to0}sF(s).$$

初值定理与终值定理建立了函数 $f(t)$在原点或无穷远点的函数值与 $sF(s)$在无穷远点或原点的极限值之间的联系,从而有助于直接从像函数得到像原函数的初值或终值.

例 10 设已知 $L[f(t)]=F(s)=\frac{1}{s+a}$,求 $f(0)$,$f(+\infty)$.

解 因 $\lim\limits_{s\to+\infty}sF(s)=\lim\limits_{s\to+\infty}\frac{s}{s+a}=1$,

故

$$f(0)=1.$$

又因

$$\lim_{s\to0}sF(s)=\lim_{s\to0}\frac{s}{s+a}=0,$$

故

$$f(+\infty)=0.$$

(3) **导函数的初值定理** 设 $t>0$ 时,$f'(t)$连续且 $f'(0+0)$存在,则有

$$f'(0+0)=\lim_{s\to\infty}s[sF(s)-f(0+0)].$$

只要各阶导数连续，且在 $t=0$ 处的右极限存在，以上公式可以重复使用直到高阶导数.

例如　$$f''(0+0)=\lim_{s\to\infty}s[s^2F(s)-sf(0+0)-f'(0+0)].$$

3.2.7　乘法定理

设 $L[f(t)]=F(s)$，$L[g(t)]=G(s)$，则

1° $L[f(t)*g(t)]=F(s)G(s)$

或
$$L^{-1}[F(s)G(s)]=f(t)*g(t).$$

2° $L[f(t)g(t)]=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s_1)G(s-s_1)ds_1.$

若以 c_1,c_2 分别记 $f(t),g(t)$ 的增长指数，则上式中 $c>c_1$ 且 $\mathrm{Re}s>c_2+c$

例 11　求 $L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right]$.

解　因 $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}=\dfrac{s}{s^2+1}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}$，又已知

$$L[\cos t]=\frac{s}{s^2+1},L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1},$$

故
$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]=\cos t*\sin t=\int_0^t\cos u\sin(t-u)du$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^t\sin t du+\frac{1}{2}\int_0^t\sin(t-2u)du$$
$$=\frac{1}{2}t\sin t.$$

3.3　拉普拉斯逆变换

3.3.1　反演公式

已知像函数 $F(s)$，求像原函数 $f(t)$ 可用如下反演公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}ds\quad(t>0,c>c_0),$$

式中右边的积分，其积分路线是平行于虚轴的整条直线 $\mathrm{Re}s=c$，c_0 为像函数 $F(s)$ 的收敛横坐标.

反演公式是一个复变函数的曲线积分，在一定的条件下，可用留数来计算：

设 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 为 $F(s)$ 的极点，作包含 $F(s)e^{st}$（实为 $F(s)$）的所有极点的闭路 $\Gamma=l+RR'$（见图 3-2），其中 l 是以 c 为中心，适当大的 R 为半径的半圆周. 由约当引理，有

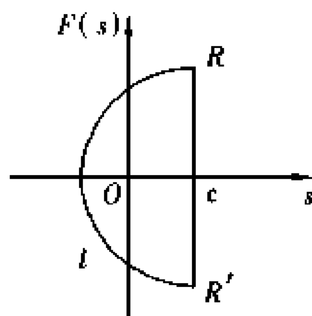


图 3-2

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}\text{Res}[F(s_k)e^{s_kt}].$$

它把由反演公式求 $f(t)$,转化为计算 $F(s)e^{st}$ 在 $F(s)$ 的极点处的留数.

3.3.2 留数计算法

设 $F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$ 是有理函数,其中 $A(s),B(s)$ 是没有公共因式的多项式.且 $A(s)$ 的次数低于 $B(s)$ 的次数.

(1) 若 $B(s)=0$ 只有单根 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 时,则

$$\sum_{k=1}^{n}\text{Res}[F(s_k)e^{s_kt}]=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_kt}.$$

即
$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_kt}.$$

这个公式称为**赫维赛德**(Heaviside)**展开式**.

注:若 s_k 中有一个为零,例如设 $s_n=0$,则

$$L^{-1}[F(s)]=\frac{A(0)}{B_1(0)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A(s_k)}{s_kB'_1(s_k)}e^{s_kt},$$

其中
$$B_1(s)=\frac{B(s)}{s}.$$

例 12 求 $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ 的像原函数.

解 因 $B(s)=s(s+a)(s+b)=0$ 的根为 $s_1=-a,s_2=-b,s_3=0$.

$$B_1(s)=(s+a)(s+b),\quad B'_1(s)=2s+a+b,$$

$$A(0)=1,\quad B_1(0)=ab.$$

故
$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+a)(s+b)}\right]=\frac{1}{ab}+\frac{ae^{-bt}-be^{-at}}{ab(b-a)}.$$

(2) 若 $B(s)=0$ 有重根,设 s_k 为 N_k 重根($k=1,2,\cdots,n$),则

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(N_k-1)!}\lim_{s\to s_k}\frac{d^{N_k-1}}{ds^{N_k-1}}\left[(s-s_k)^{N_k}\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right].$$

例 13 求 $\frac{s+2}{s^3(s-1)^2}$ 的像原函数.

解 因 $A(s)=s+2,B(s)=s^3(s-1)^2$,其中,$B(s)=0$ 的根有:$s=0$ 为三重根,$s=1$ 为二重根.而

$$\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\left[\frac{(s+2)}{s^3}e^{st}\right]=(3t-8)e^t.$$

$$\lim_{s\to0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{(s+2)e^{st}}{(s-1)^2}\right]=t^2+5t+8,$$

故
$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=(3t-8)e^t+t^2+5t+8.$$

(3) 若 $B(s)=0$ 有复数根,而 $A(s),B(s)$ 都是实系数多项式,则

$$L^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right]=\sum_k \frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t}+2\mathrm{Re}\sum_k \frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t},$$

其中,前一个和是对 $B(s)=0$ 的所有实根取的;后一个和是对 $B(s)=0$ 的一切具有正虚数部分的复根取的.如有重根则按重根方法处理.

例 14　求 $F(s)=\dfrac{ab}{(s^2+a^2)^2}(a>0)$ 的像原函数.

解　因 $B(s)=(s^2+a^2)^2=0$,它有两个二阶零点 $s=\pm ai$,其中具有正虚数部分的复根是 $s=ai$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}F(ai)e^{ait}&=\lim_{s\to ai}\frac{d}{ds}\left[(s-ai)^2\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}e^{st}\right]\\&=\lim_{s\to ai}\left[ab+\frac{te^{st}(s+ai)-2e^{st}}{(s+ai)^3}\right]=\frac{be^{ati}}{4a^2}(-i-at),\end{aligned}$$

$$2\mathrm{Re}\left[\frac{be^{ati}}{4a^2}(-i-at)\right]=\frac{b}{2a^2}[\sin(at)-at\cos(at)],$$

故

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{b}{2a^2}[\sin(at)-at\cos(at)].$$

除用留数求拉普拉斯逆变换外,还有其他一些方法.如下述的洛朗(Laurent)级数法、分项分式法等.

3.3.3　洛朗级数法

若 $F(s)$ 在无穷远点处解析且在它的邻域内有洛朗展式,

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{1}{s^n},$$

则有

$$L^{-1}[F(s)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)!}t^{n-1}.$$

例 15　求 $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}\right]$.

解　因

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}&=\frac{1}{s}\left[1-\frac{1}{s}+\frac{1}{2!s^2}-\frac{1}{3!s^3}+\cdots\right]\\&=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2!s^3}-\frac{1}{3!s^4}+\cdots,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}L^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}\right]&=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2!s^3}-\frac{1}{3!s^4}+\cdots\right]\\&=1-t+\frac{t^2}{(2!)^2}-\frac{t^3}{(3!)^2}+\cdots=1-t+\frac{t^2}{1^2\cdot2^2}-\frac{t^3}{1^2\cdot2^2\cdot3^2}+\cdots\\&=1-\frac{(2\sqrt{t})^2}{2^2}+\frac{(2\sqrt{t})^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{(2\sqrt{t})^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots=J_0(2\sqrt{t}).\end{aligned}$$

3.3.4　分项分式法

设 $F(s)=\dfrac{A(s)}{B(s)}$ 为有理分式函数,分子分母无公因式且分子次数低于分母的

次数.若

$$B(s)=B_1(s)B_2(s)\cdots B_k(s),$$

则可把 $F(s)$分解为

$$\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A_1(s)}{B_1(s)}+\frac{A_2(s)}{B_2(s)}+\cdots+\frac{A_k(s)}{B_k(s)}.$$

等式右边各项为真分式.各 $A_l(s)(l=1,2,\cdots,k)$的系数用待定系数法确定.

下面分 4 种情况,介绍确定 $A_l(s)$的系数的方法.

(1) 设 $B(s)$为 n 次多项式且有 n 个不同的实根 $r_1,r_2,\cdots,r_n$,则 $F(s)$可分解为

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A_1}{s-r_1}+\frac{A_2}{s-r_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-r_k},$$

记
$$P_k(s)=\frac{B(s)}{s-r_k}\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

则系数 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$由下式确定:

$$A_k=\frac{A(r_k)}{P_k(r_k)}\quad 或\quad A_k=\frac{A(r_k)}{B'(r_k)}$$

此时有
$$L^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(r_k)}{P_k(r_k)}e^{r_kt},$$

或
$$L^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(r_k)}{B'(r_k)}e^{r_kt}.$$

例 16　求 $L^{-1}\left[\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right]$.

解　因 $B(s)=(s+1)(s-2)(s-3)$有 3 个不同的实根 $r_1=-1,r_2=2,r_3=3$,且 $A(s)=2s^2-4$.故设

$$\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s-2}+\frac{A_3}{s-3},$$

其中

$$A_1=\frac{2s^2-4}{(s-2)(s-3)}\bigg|_{s=-1}=-\frac{1}{6},$$

$$A_2=\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-3)}\bigg|_{s=2}=-\frac{4}{3},$$

$$A_3=\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)}\bigg|_{s=3}=\frac{7}{2}.$$

故
$$L^{-1}\left[\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right]=L^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{6}}{s+1}+\frac{-\frac{4}{3}}{s-2}+\frac{\frac{7}{2}}{s-3}\right]$$
$$=-\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{7}{2}e^{3t}.$$

注:本题也可用微积分学中的有理真分式化为部分分式的待定系数法求得 A_1,A_2,A_3.

(2)分母有重实根.设 $B(s)=0$ 有 k 重实根 r,即 $B(s)=(s-r)^kB_2(s)$,此时 $F(s)$ 可分解为

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A_1(s)}{(s-r)^k}+\frac{A_2(s)}{B_2(s)},$$

其中多项式 $A_1(s)$ 的次数不大于 $(k-1)$.记

$$A_1(s)=D_0+D_1(s-r)+D_2(s-r)^2+\cdots+D_{k-1}(s-r)^{k-1},$$

于是
$$\frac{A_1(s)}{(s-r)^k}=\frac{D_0}{(s-r)^k}+\frac{D_1}{(s-r)^{k-1}}+\cdots+\frac{D_{k-1}}{s-r},$$

式中的系数 $D_0,D_1,D_2,\cdots,D_k$ 由以下方法确定:

$$D_0=\frac{A(r)}{B_2(r)},\ D_l=\frac{1}{l!}\left[\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}s^l}\frac{A(s)}{B_2(s)}\right]_{s=r}\quad(l=1,2,\cdots,k-1).$$

(3) 分母 $B(s)$ 有单复数根的情况.设 $B(s)$ 有单复数根 $r=a+\mathrm{i}b,\bar{r}=a-\mathrm{i}b$.记

$$Q(s)=(s-r)(s-\bar{r})=(s-a)^2+b^2,$$

此时 $F(s)$ 可以分解为

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{Cs+D}{Q(s)}+\frac{A_2(s)}{B_2(s)},$$

上式中 $\frac{Cs+D}{Q(s)}$ 是 $B(s)=0$ 有复数根的部分,$\frac{A_2(s)}{B_2(s)}$ 是 $B(s)=0$ 有实数根的部分.关于 $L^{-1}\left[\frac{A_2(s)}{B_2(s)}\right]$ 的求法,前面的(1)及(2)已解决.下面只就求 $L^{-1}\left[\frac{Cs+D}{Q(s)}\right]$ 加以介绍.

设
$$\frac{Cs+D}{Q(s)}=\frac{E(s-a)+bF}{(s-a)^2+b^2}.$$

由下述方法定 E、F:

记
$$W=\frac{A(a+\mathrm{i}b)}{B_2(a+\mathrm{i}b)},$$

则
$$E=\frac{1}{b}\mathrm{Im}W,\quad F=\frac{1}{b}\mathrm{Re}W.$$

故
$$L^{-1}\left[\frac{E(s-a)+bF}{(s-a)^2+b^2}\right]=\frac{\mathrm{e}^{at}}{b}[\mathrm{Im}W\cos(bt)+\mathrm{Re}W\sin(bt)].$$

若记
$$W=M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

则
$$L^{-1}\left[\frac{E(s-a)+bF}{(s-a)^2+b^2}\right]=\frac{M}{b}\mathrm{e}^{at}\sin(bt+\varphi).$$

注:用本方法求像原函数,并不需要求出 C 和 D.

(4) 分母 $B(s)$ 有重复数根的情况.设 $B(s)=0$ 有 k 重复数根 $r=a+\mathrm{i}b,\bar{r}=a-\mathrm{i}b$,记

$$Q(s)=(s-r)(s-\bar{r})=(s-a)^2+b^2,$$

则
$$B(s)=Q(s)B_2(s),$$

$F(s)$ 可以分解为

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A_1(s)}{Q(s)^k}+\frac{A_2(s)}{B_2(s)},$$

上式中 $A_1(s)$是次数不大于$(2k-1)$的多项式，$B_2(s)$不含重复数根.故$\frac{A_2(s)}{B_2(s)}$可按(1)~(3)处理.下面只介绍 $L^{-1}\left[\frac{A_1(s)}{Q(s)^k}\right]$的求法.

把$\frac{A_1(s)}{Q(s)^k}$分解为

$$\frac{A_1(s)}{Q(s)^k}=\frac{C_0s+D_0}{(Q(s))^k}+\frac{C_1s+D_1}{[Q(s)]^{k-1}}+\frac{C_2s+D_2}{[Q(s)]^{k-2}}+\cdots+\frac{C_{k-1}s+D_{k-1}}{Q(s)},$$

记
$$C_ls+D_l=E_l(s-a)+bF\quad(l=0,1,2,\cdots,k-1),$$

则
$$E_0=\frac{1}{b}\operatorname{Im}W_0,\quad F_0=\frac{1}{b}\operatorname{Re}W_0,$$

其中
$$W_0=\frac{A(a+\mathrm{i}b)}{B_2(a+\mathrm{i}b)};$$

$$E_1=-\frac{1}{2b^2}(\operatorname{Re}W_1-E_0),\quad F_1=\frac{1}{2b^2}\operatorname{Im}W_1,$$

其中
$$W_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{A(s)}{B_2(s)}\right]_{s=a+\mathrm{i}b};$$

$$E_2=-\frac{1}{8b^3}(\operatorname{Im}W_2-6bE_1),\quad F_2=\frac{1}{8b^3}[\operatorname{Re}W_2-2bF_1],$$

其中
$$W_2=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{A(s)}{B_2(s)}\right]\Big|_{s=a+\mathrm{i}b}.$$

其他系数 E_l,F_l,用类似方法逐次微分(对 s)式子$\frac{A(s)}{B_2(s)}$之后，再令 $s=a+\mathrm{i}b$ 代入,即可求得.

确定 $E_l,F_l(l=0,1,\cdots,k-1)$后,再求分项分式中每项

$$\frac{E_l(s-a)+bF_l}{[Q(s)]^{k-l}}\quad(l=0,1,2,\cdots,k-1)$$

的拉普拉斯逆变换.为此定义

$$G_n(s)=\frac{1}{(s^2+b^2)^n},$$

记
$$L^{-1}[G_n(s)]=g_n(t),$$

而 $G_n(s)$和 $g_n(t)$有如下递推关系:

$$G_{n+1}(s)=\frac{1}{2nb^2}\left\{(2n-1)G_n(s)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[sG_n(s)]\right\}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$g_{n+1}(t)=\frac{1}{2nb^2}\left[(2n-1)g_n(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g_n(t)\right]\quad(n=1,2,\cdots).$$

因
$$G_1(s)=\frac{1}{s^2+b^2},$$

所以
$$g_1(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+b^2}\right]=\frac{1}{b}\sin bt.$$
由 $g_n(t)$的上述递推关系式,可得
$$g_2(t)=\frac{1}{2b^3}\sin(bt)-\frac{1}{2b^2}t\cos(bt),$$
$$g_3(t)=\frac{1}{8b^5}\sin(bt)-\frac{1}{8b^4}t\cos(bt)-\frac{1}{8b^3}t^2\sin(bt).$$
因
$$\frac{1}{[Q(s)]^n}=\frac{1}{[(s-a)^2+b^2]^n}=G_n(s-a),$$
故
$$L^{-1}\left[\frac{1}{[Q(s)]^n}\right]=e^{at}g_n(t),$$
$$L^{-1}\left[\frac{s-a}{[Q(s)]^n}\right]=L^{-1}[(s-a)G_n(s-a)]=e^{at}\frac{d}{dt}g_n(t),$$
$$L^{-1}\left[\frac{E_l(s-a)+bF_l}{[Q(s)]^{k-l}}\right]=e^{at}\left[E_l\frac{d}{dt}g_{k-l}(t)+bF_lg_{k-l}(t)\right]$$
$$(l=0,1,\cdots,k-1).$$

例 17 求 $L^{-1}\left[\frac{-s^4-2s^3+4s^2+14s+25}{s[(s+1)^2+4]^2}\right]$.

解 因 $B(s)=s[(s+1)^2+4]^2=0$ 有单实根 $s=0$,二重复根 $s=-1\pm 2i$,故 $k=2,a=-1,b=2$.令
$$F(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{E_0(s+1)+2F_0}{[(s+1)^2+4]^2}+\frac{E_1(s+1)+2F_1}{(s+1)^2+4},$$
$$A_1=-\frac{-s^4-2s^3+4s^2+14s+25}{[(s+1)^2+4]^2}\bigg|_{s=0}=\frac{25}{25}=1,$$
$$W_0=\frac{A(s)}{B_2(s)}\bigg|_{s=-1+2i}=-s^3+2s^2+4s+14+\frac{25}{5}\bigg|_{s=-1+2i}=0+8i,$$
$$W_1=\frac{d}{ds}\left[\frac{A(s)}{B_2(s)}\right]\bigg|_{s=-1+2i}=20+0i,$$
所以
$$E_0=\frac{1}{b}\operatorname{Im}W_0=\frac{1}{2}\cdot 8=4,$$
$$F_0=\frac{1}{b}\operatorname{Re}W_0=\frac{1}{2}\cdot 0=0,$$
$$E_1=-\frac{1}{2b^2}[\operatorname{Re}W_1-E_0]=-\frac{1}{8}[20-4]=-2,$$
$$F_1=\frac{1}{2b^2}\operatorname{Im}W_1=\frac{1}{8}\cdot 0=0.$$
故
$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{4(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2}+\frac{-2(s+1)}{[(s+1)^2+4]}.$$
而
$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1,$$

$$g_1(t)=\frac{1}{2}\sin(2t),$$

$$g_2(t)=\frac{1}{16}\sin(2t)-\frac{1}{8}t\cos(2t),$$

$$L^{-1}\left[\frac{-2(s+1)}{(s+1)^2+4}\right]=e^{-t}\left[-2\frac{d}{dt}g_1(t)\right]=e^{-t}[-2\cos(2t)]\quad(k=2,l=1)$$

$$L^{-1}\left[\frac{4(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2}\right]=e^{-t}\left[4\frac{d}{dt}g_2(t)\right]$$

$$=4e^{-t}\left[\frac{1}{4}t\sin(2t)\right]=t\sin(2t)\quad(k=2,l=0),$$

所以 $$f(t)=L^{-1}[F(s)]=1+e^{-t}[t\sin(2t)-2\cos(2t)].$$

3.4 拉普拉斯变换的应用

3.4.1 拉普拉斯变换在求解微分方程中的应用

拉普拉斯变换的重要应用之一是求解线性微分方程．其主要步骤如下：

1° 对微分方程（连同初始条件）进行拉普拉斯变换，得到像函数所满足的方程（称为像方程）；

2° 求解像方程得像函数；

3° 对像函数作拉普拉斯逆变换，则得原方程的解．

例 18 （常系数微分方程式）试求解微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y'''-3y''+3y'-y=t^2e^t,\\ y(0)=1,y'(0)=0,y''(0)=-2.\end{cases}$$

解 对方程两边取拉普拉斯变换并应用线性性质，得

$$L(y''')-3L(y'')+3L(y')-L(y)=L[t^2e^t].$$

利用微分性质并代入初始条件，得

$$[s^3F(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)]-3[s^2F(s)-sy(0)-y'(0)]+$$

$$3[sF(s)-y(0)]-F(s)=\frac{2}{(s-1)^3},$$

即 $$(s^3-3s^2+3s-1)F(s)-s^2+3s-1=\frac{2}{(s-1)^3},$$

解出 $$F(s)=\frac{s^2-3s+1}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s-1)^6}.$$

对 $F(s)$ 进行分项分式，得

$$F(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s-1)^6}.$$

对 $F(s)$ 取拉普拉斯逆变换，得

$$f(t)=e^t-te^t-\frac{t^2}{2}e^t+\frac{t^5e^t}{60}.$$

例 19 （常系数微分方程组）试求解微分方程组

$$\begin{cases} x'(t)=2x(t)-3y(t), x(0)=8, \\ y'(t)=y(t)-2x(t), \ y(0)=3. \end{cases}$$

解 取拉普拉斯变换，记 $L[x(t)]=F(s), L[y(t)]=G(s)$，有

$$\begin{cases} sF(s)-8=2F(s)-3G(s), \\ sG(s)-3=G(s)-2F(s), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s-2)F(s)+3G(s)=8, \\ 2F(s)+(s-1)G(s)=3. \end{cases}$$

联立求解 $F(s), G(s)$，得

$$F(s)=\frac{8s-17}{s^2-3s-4}=\frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}=\frac{5}{s+1}+\frac{3}{s-4},$$

$$G(s)=\frac{3s-22}{s^2-3s-4}=\frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}=\frac{5}{s+1}-\frac{2}{s-4}.$$

对 $F(s), G(s)$ 取拉普拉斯逆变换，得

$$x(t)=5e^{-t}+3e^{4t},$$

$$y(t)=5e^{-t}-2e^{4t}.$$

例 20 （变系数微分方程式）试求解微分方程初值问题：

$$\begin{cases} ty''+y'+4ty=0, \\ y(0)=3, y'(0)=0. \end{cases}$$

解 取拉普拉斯变换，有

$$L[ty'']+L[y']+4L[ty]=0,$$

即

$$-\frac{d}{ds}[s^2F(s)-sy(0)-y'(0)]+[sF(s)-y(0)]-4\frac{d}{ds}[F(s)]=0,$$

化简得关于 $F(s)$ 的微分方程式

$$(s^2+4)\frac{dF(s)}{ds}+sF(s)=0.$$

用分离变量法解上述方程，得

$$F(s)=\frac{C}{\sqrt{s^2+4}}.$$

取拉普拉斯逆变换，得

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{C}{\sqrt{s^2+4}}\right]=CJ_0(2t).$$

由 $y(0)=CJ_0(0)=3$，得 $C=3$，故

$$f(t)=3J_0(2t).$$

例 21 （偏微分方程）试求解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (t>0, x>0, a>0), \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0, & \\ u(0,t)=A\sin\omega t, & |u(x,t)|<M \ (\text{当 } x\to\infty). \end{cases}$$

解 将方程及定解条件对 t 取拉普拉斯变换，且记

$$L[u(x,t)] = F(x,s),$$

得
$$\begin{cases} s^2F(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0) = a^2 \dfrac{d^2}{dx^2}[F(x,s)], \\ F(0,s) = \dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}F(x,s) - \dfrac{s^2}{a^2}F(x,s) = 0 \quad (\mathrm{Re}s > 0), \\ F(0,s) = \dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}. \end{cases}$$

求解以上常微分方程,得

$$F(x,s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}e^{-\frac{x}{a}s}.$$

取拉普拉斯逆变换得

$$u(x,t) = L^{-1}\left[\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}e^{-\frac{x}{a}s}\right] = \begin{cases} A\sin\left(t-\dfrac{x}{a}\right) & \left(\text{当 } t > \dfrac{x}{a}\right), \\ 0 & \left(\text{当 } t < \dfrac{x}{a}\right). \end{cases}$$

例 22 (微分积分方程)求解方程

$$y'(t) + 5\int_0^t \cos 2(t-u)y(u)du = 10, \quad y(0) = 2.$$

解 原方程式可写成

$$y'(t) + 5\cos(2t) * y(t) = 10,$$

对上式取拉普拉斯变换,得

$$sF(s) - y(0) + 5\frac{s}{s^2+4}F(s) = \frac{10}{s}.$$

代入初始条件得

$$sF(s) - 2 + 5\frac{s}{s^2+4}F(s) = \frac{10}{s},$$

解出
$$F(s) = \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)} = \frac{1}{9}\left[\frac{8}{s} + \frac{40}{s^2} + \frac{10s}{s^2+9} + \frac{50}{s^2+9}\right],$$

取拉普拉斯逆变换得

$$f(t) = \frac{1}{27}[24 + 120t + 30\cos(3t) + 50\sin(3t)]$$

例 23 (微分差分方程式)试求解方程

$$y'(t) + y(t-1) = t^2, \text{当 } t \leqslant 0 \text{ 时}, y(t) = 0.$$

解 对方程两边取拉普拉斯变换,得

$$L[y'(t)] + L[y(t-1)] = \frac{2}{s^3}.$$

因
$$L[y'(t)] = sF(s) - y(0) = sF(s),$$

$$L[y(t-1)] = \int_0^\infty e^{-st}y(t-1)dt \qquad (\text{作变换令 } t = u + 1)$$

$$= \int_{-1}^{\infty} e^{-s(u+1)} y(u) du$$
$$= e^{-s}\int_{-1}^{0} e^{-su} y(u) du + e^{-s}\int_{0}^{\infty} e^{-su} y(u) du$$
$$= e^{-s}\cdot 0 + e^{-s}F(s) = e^{-s}F(s).$$

故原变换式为

$$sF(s) + e^{-s}F(s) = \frac{2}{s^3},$$

解出

$$F(s) = \frac{2}{s^3(s+e^{-s})} = \frac{2}{s^4\left(1+\frac{e^{-s}}{s}\right)}.$$

把 $F(s)$ 展开为级数，得

$$F(s) = \frac{2}{s^4}\left[1 - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} + \cdots\right]$$
$$= \frac{2}{s^4} - \frac{2e^{-s}}{s^5} + \frac{2e^{-2s}}{s^6} - \frac{2e^{-3s}}{s^7} + \cdots$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}.$$

因

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}\right] = \begin{cases}\dfrac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} & (t \geqslant n),\\ 0 & (t < n),\end{cases}$$

故

$$y(t) = 2\sum_{n=0}^{[t]}(-1)^n \frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!}.$$

3.4.2　拉普拉斯变换在线性系统中的应用

(1) 传递函数概念　设有一线性系统，其输入量 $x(t)$(又称为**激励函数**)与输出量 $y(t)$(又称为**响应函数**)所满足的关系，可用微分方程表示为

$$a_0 y^{n}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_m x(t) \tag{3-3}$$

其中 $a_0, a_1, 2, \cdots, a_n; b_0, b_1, \cdots, b_m$ 都是实常数，$m \leqslant n$.

假设初始值都是零，即

$$x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0,$$
$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(m-1)}(0) = 0.$$

对上述微分方程(3-3)两边取拉普拉斯变换，得

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n)Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m)X(s)$$

从而

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}.$$

定义　当系统的初始条件为零时，输出量 $y(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y(s)$ 与输入

量 $x(t)$的拉普拉斯变换 $X(s)$之比$\frac{Y(s)}{X(s)}$称为该系统的**传递函数**.一般记为 $G(s)$,即

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)},$$

由此便有
$$Y(s)=G(s)X(s).$$

当系统的初始条件不全为零时,对(3-3)式两边取拉普拉斯变换,其结果为

$$D(s)Y(s)-M_{hy}(s)=M(s)X(s)-M_{hx}(s),$$

即
$$Y(s)=\frac{M(s)}{D(s)}X(s)+\frac{M_{hy}(s)-M_{hx}(s)}{D(s)},$$

其中

$$D(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n,$$

$$M(s)=b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+a_{m-1}s+b_m,$$

$$M_{hy}(s)=a_ny(0)s^{n-1}+[a_ny'(0)+a_{n-1}y(0)]s^{n-2}+\cdots+[a_ny^{(n-1)}(0)+\cdots+a_2y'(0)+a_1y(0)],$$

$$M_{hx}(s)=b_mx(0)s^{m-1}+[b_mx'(0)+b_{m-1}x(0)]s^{m-2}+\cdots+[b_mx^{(m-1)}(0)+\cdots+b_2x'(0)+b_1x(0)].$$

记 $G_h(s)=\frac{M_{hy}(s)-M_{hx}(s)}{D(s)}$,则有

$$F(s)=G(s)X(s)+G_h(s).$$

(2) 脉冲响应函数 设一线性系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \quad 或 \quad Y(s)=G(s)X(s).$$

若以 $g(t)$表示 $G(s)$的逆变换,即

$$g(t)=L^{-1}[G(s)],$$

由卷积性质,有

$$y(t)=g(t)*x(t)=\int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

由此可知,一个线性系统除用传递函数表征外,还可以用传递函数的像原函数 $g(t)$来描述.称 $g(t)$为线性系统的**脉冲响应函数**,其物理意义如下:

若激励是一单位脉冲函数,即 $x(t)=\delta(t)$,则在零初始条件下,有

$$L[\delta(t)]=X(s)=1,$$

此时
$$Y(s)=G(s)X(s)=G(s),$$

从而
$$y(t)=g(t).$$

这就是说,脉冲响应函数 $g(t)$,就是在零初始条件下,激励为 $\delta(t)$时的响应 $y(t)$,如图 3-3 所示.

(3) 频率响应 在系统的传递函数中,令 $s=i\omega$,则得

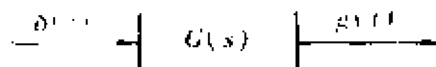


图 3-3

$$G(i\omega)=\frac{Y(i\omega)}{X(i\omega)}=\frac{b_0(i\omega)^m+b_1(i\omega)^{m-1}+\cdots+b_{m-1}(i\omega)+b_m}{a_0(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+\cdots+a_n(i\omega)+a_n}.$$

称上式为系统的频率特性函数,简称为频率响应.

当激励函数 $x(t)=e^{i\omega t}$时,系统的稳态响应是 $y(t)=W(i\omega)e^{i\omega t}$.

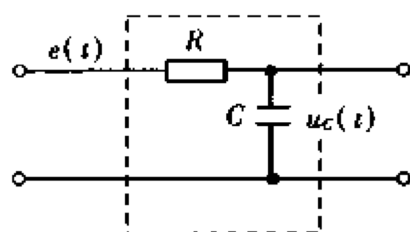


图 3-4

例 24　如图 3-4 所示的 RC 串联电路,把电源电势 $e(t)$看成是电路的激励,则响应 $u_C(t)$与 $e(t)$所满足的微分方程为

$$RC\frac{d}{dt}u_C(t)+u_C(t)=e(t),$$

对方程式两边取拉普拉斯变换,且记 $L[u_C(t)]=U_C(s)$,$L[e(t)]=E(s)$,则有

$$RC[sU_C(s)-u_C(0)]+U_C(s)=E(s),$$

解出

$$U_C(s)=\frac{E(s)}{RCs+1}+\frac{RCu_C(0)}{RCs+1}.$$

故传递函数

$$W(s)=\frac{1}{RCs+1}=\frac{1}{RC(s+\frac{1}{RC})}.$$

电路的脉冲响应函数

$$g(t)=L^{-1}[W(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{RC(s+\frac{1}{RC})}\right]=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

频率响应为

$$W(i\omega)=\frac{1}{RCi\omega+1}.$$

4　梅 林 变 换

4.1　梅林变换的定义

设对某正数 k,积分 $\int_0^{+\infty}|f(x)|x^{k-1}dx$ 有界,且记

$$F_M(s)=\int_0^{+\infty}f(x)x^{s-1}dx\quad(s=c+i\omega),\tag{4-1}$$

则

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F_M(s)x^{-s}ds\quad(c>k).\tag{4-2}$$

称由(4-1)式所确定的 $F_M(s)$为 $f(x)$的**梅林**(**Mellin**)**变换**,并简记为 $M[f;s]$,即

$$M[f;s]=F_M(s)=\int_0^{+\infty}f(x)x^{s-1}dx.$$

称(4-2)式为梅林变换的反演公式.

例 1　求 $f(x)=e^{-\alpha x}$　($\alpha>0$)的梅林变换及 $f(x)$的积分表示式.

解 $$F_M(s)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}x^{s-1}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(s)}{\alpha^s}\quad(\mathrm{Re}s>0),$$
由梅林变换的反演公式得
$$e^{-\alpha x}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{\Gamma(s)}{\alpha^s}x^{-s}\mathrm{d}s\quad(c=\mathrm{Re}s>0).$$
因为 $\Gamma(s)$ 的极点为 $s=-1,-2,\cdots$,所以由留数定理得
$$e^{-\alpha x}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)}{l!}(\alpha x)^l.$$

例 2 求 $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$的梅林变换.

解 $$\begin{aligned}F_M(s)&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x-1}x^{s-1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(1+n)x}x^{s-1}\mathrm{d}x\quad(\text{令}(1+n)x=u)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^s}\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{s-1}\mathrm{d}u\\&=\zeta(s)\Gamma(s),\end{aligned}$$
其中
$$\zeta(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^s}.$$

4.2 梅林变换的性质

4.2.1 微分性质

设 $$M[f;s]=F_M(s),$$
则 $$M[f';s]=-(s-1)F_M(s-1).$$

但函数的高阶导数的梅林变换,就没有这么简单.考察$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f$的梅林变换:
$$M\left[\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n};s\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}x^{s-1}\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}f}{\mathrm{d}x^{n-1}}x^{s-1}\right]_0^{+\infty}-(s-1)\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^{n-1}f}{\mathrm{d}x^{n-1}}x^{s-2}\mathrm{d}x$$
只有当 $f(x)$能使上式右边的方括号为 0 时,才有
$$M\left[\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n};s\right]=-(s-1)M\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}f}{\mathrm{d}x^{n-1}};s-1\right],$$
重复这种运算和条件,得
$$M\left[\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n};s\right]=(-1)^n\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}F_M(s-n).$$

4.2.2 乘幂定理

设 $$M[f(x);s]=F_M(s),$$

则
$$M[x^{\mu}f(x);s]=F_{M}(s+\mu).$$

4.2.3　拉普拉斯算子

记
$$\nabla^{2}f(r,\varphi)=\frac{\partial^{2}f}{\partial r^{2}}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}f}{\partial\varphi^{2}},$$
则
$$M[\nabla^{2}f;s]=\left[\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}\varphi^{2}}+(s-2)^{2}\right]F_{M}(s-2,\varphi).$$

4.2.4　卷积定理

设
$$M[f(x);s]=F_{M}(s),M[g(x);s]=G_{M}(s).$$
又设
$$h(x)=\int_{0}^{+\infty}y^{\mu}f(xy)g(y)\mathrm{d}y,$$
则
$$H_{M}(s)=M[h(x);s]=\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}y^{\mu}f(xy)g(y)\mathrm{d}y\right]x^{s-1}\mathrm{d}x$$
$$=F_{M}(s)G_{M}(\mu-s+1).$$
类似,若设
$$k(x)=\int_{0}^{+\infty}y^{\mu}f\left(\frac{x}{y}\right)g(y)\mathrm{d}y,$$
则
$$K_{M}(s)=F_{M}(s)G_{M}(\mu+s+1).$$
关于梅林变换有下列几种常用的关系：

1° $M[fg;s]=\int_{0}^{+\infty}f(x)g(x)x^{s-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}F_{M}(p)G_{M}(s-p)\mathrm{d}p.$

2° $\int_{0}^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}F_{M}(s)G_{M}(1-s)\mathrm{d}s.$

3° $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}F_{M}(s)G_{M}(s)x^{-s}\mathrm{d}s=\int_{0}^{+\infty}f\left(\frac{x}{u}\right)g(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}.$

4° $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}F_{M}(s)G_{M}(s)\mathrm{d}s=\int_{0}^{+\infty}f\left(\frac{1}{u}\right)g(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}.$

5　汉克尔变换

二维系统在具有圆中心对称的情况下,即
$$f(x,y)=f(r),\quad r=x^{2}+y^{2}$$
的情况下,常用汉克尔变换,使求解变得方便.

5.1　汉克尔变换的定义

$f(r)$的 n 阶汉克尔变换是
$$F_{n}(\xi)=\int_{0}^{+\infty}rf(r)\mathrm{J}_{n}(\xi r)\mathrm{d}r,$$

其反演公式是

$$f(r)=\int_0^{\infty}\xi F_n(\xi)\mathrm{J}_n(\xi r)\mathrm{d}\xi,$$

其中 $\mathrm{J}_n(x)$是 n 阶贝塞尔函数.

5.2 函数的导数的汉克尔变换

设 $F_n(\xi)$是函数 $f(r)$的 n 阶汉克尔变换式，记$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$的 n 阶汉克尔变换为$F_n'(\xi)$，则有

$$F_n'(\xi)=\int_0^{+\infty}r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\mathrm{J}_n(\xi r)\mathrm{d}r=-\xi\left[\frac{n+1}{2n}F_{n-1}(\xi)-\frac{n-1}{2n}F_{n+1}(\xi)\right]\quad(5\text{-}1)$$

（其条件为当 $r\to0$ 与 $r\to\infty$时，有 $rf(r)\to0$）.

重复应用(5-1)式，可得 $f(r)$的高阶导数的汉克尔变换式：

1° $$F_n''(\xi)=\int_0^{+\infty}r\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}r^2}\mathrm{J}_n(\xi r)\mathrm{d}r=-\xi\left[\frac{n+1}{2n}F_{n-1}'(\xi)-\frac{n-1}{2n}F_{n+1}'(\xi)\right].\quad(5\text{-}2)$$

2° 在(5-2)式中代入(5-1)式，又有

$$F_n''(\xi)=\frac{1}{4}\xi^2\left[\frac{n+1}{n-1}F_{n-2}(\xi)-2\frac{n^2-3}{n^2-1}F_n(\xi)+\frac{n-1}{n+1}F_{n+2}(\xi)\right]$$

（其条件为当 $r\to0$ 与 $r\to\infty$时，有 $rf(r)\to0,\ rf'(r)\to0$）.

3° $$\int_0^{+\infty}r\left[\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{n^2}{r^2}f(r)\right]\mathrm{J}_n(\xi r)\mathrm{d}r=-\xi^2F_n(\xi).\quad(5\text{-}3)$$

4° 在(5-3)式中当 $n=1$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\mathrm{J}_1(\xi r)\mathrm{d}r=-\xi^2F(\xi),$$

其中 $$F(\xi)=\int_0^{+\infty}rf(r)\mathrm{J}_0(\xi r)\mathrm{d}r.$$

5° 在(5-3)式中当 $n=0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}r\left[\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right]\mathrm{J}_0(\xi r)\mathrm{d}r=-\xi^2F(\xi),$$

其中 $$F(\xi)=\int_0^{+\infty}rf(r)\mathrm{J}_0(\xi r)\mathrm{d}r.$$

5.3 汉克尔变换的应用

以自由对称振动为例说明汉克尔变换的应用.

设振动关于某轴对称，此轴过原点且垂直于薄膜的平衡位置. 若令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，引入极坐标，则位移 z 只是 $r=\sqrt{x^2+y^2}$的函数. 此时的运动方程式为

$$\frac{\partial^2z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2z}{\partial t^2}\qquad\left(c^2=\frac{T}{\sigma}\right).$$

设初始条件为 $z(r,0)=\varphi(r),\quad z_t'(r,0)=\psi(r).$

试求解 $z(r,t)$.

对方程两边取汉克尔变换,记

$$Z(\xi,t)=\int_0^{+\infty} rz(r,t)\mathrm{J}_0(\xi r)\mathrm{d}r,$$

因为
$$\int_0^{+\infty} r\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\right)\mathrm{J}_0(\xi r)\mathrm{d}r=-\xi^2 Z(\xi,t),$$

设当 $r\to 0, r\to+\infty$ 时有 $r\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\to 0$,则将 $z(r,t)$ 所满足的偏微分方程化为像函数 $Z(\xi,t)$ 所满足的如下常微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}Z(\xi,t)+c^2\xi^2 Z(\xi,t)=0.$$

记

$$\Phi(\xi)=\int_0^{\infty} r\varphi(r)\mathrm{J}_0(\xi r)\mathrm{d}r,$$

$$\Psi(\xi)=\int_0^{+\infty} r\psi(r)\mathrm{J}_0(\xi r)\mathrm{d}r.$$

求解上述常微分方程式,得

$$Z(\xi,t)=A(\xi)\cos(c\xi t)+B(\xi)\sin(c\xi t).$$

由初始条件得
$$Z(\xi,0)=A(\xi)=\Phi(\xi),$$
$$Z_t'(\xi,0)=c\xi B(\xi)=\Psi(\xi).$$

故
$$A(\xi)=\Phi(\xi),\ B(\xi)=\frac{1}{c\xi}\Psi(\xi).$$

所以
$$Z(\xi,t)=\Phi(\xi)\cos(c\xi t)+\frac{1}{c\xi}\Psi(\xi)\sin(c\xi t).$$

由汉克尔反演公式,则得

$$\begin{aligned} z(r,t)&=\int_0^{+\infty}\xi[Z(\xi,t)]\mathrm{J}_0(\xi r)\mathrm{d}\xi\\ &=\int_0^{+\infty}\xi\left[\Phi(\xi)\cos(c\xi t)+\frac{1}{c\xi}\Psi(\xi)\sin(c\xi t)\right]\mathrm{J}_0(\xi r)\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

6 有限积分变换

前面介绍的各种积分变换,变换式的积分区间都是无限区间(双边无限或单边无限),在求解边值问题时,只对无界物体问题有效.为能应用于大小有限的物体问题,必须研究其上下限取有限值的积分变换.即

$$F(s)=\int_a^b K(s,x)f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 a,b 为有限值.这种积分变换称为**有限积分变换**.

6.1　有限傅里叶正弦变换和余弦变换

6.1.1　$f(x)$定义在$[0,\pi]$上的有限傅里叶正弦变换和余弦变换

设$f(x)$在区间$[0,\pi]$内满足狄利克雷条件，则$f(x)$的有限傅里叶正弦变换被定义为

$$F_s(n)=\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x,$$

其中 n 为正整数.

$F_s(n)$的反演公式为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}F_s(n)\sin(nx). \tag{6-1}$$

在间断点 x 处，上式右边改为$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

$f(x)$ 的有限傅里叶余弦变换被定义为

$$F_c(n)=\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x,$$

其反演公式是

$$f(x)=\frac{F_c(0)}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}F_c(n)\cos(nx),$$

其中

$$F_c(0)=\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.$$

6.1.2　在$[0,\pi]$上函数各阶导数的有限傅里叶变换之间的关系

利用有限傅里叶正弦变换和余弦变换的定义及分部积分法，可得以下关系：

1° $\int_0^{\pi}\frac{\partial f}{\partial x}\sin(nx)\mathrm{d}x=-nF_c(n)$.

2° $\int_0^{\pi}\frac{\partial f}{\partial x}\cos(nx)\mathrm{d}x=(-1)^nf(\pi)-f(0)+nF_s(n)$.

3° $\int_0^{\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin(nx)\mathrm{d}x=n[f(0)-(-1)^nf(\pi)]-n^2F_s(n)$.

4° $\int_0^{\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos(nx)\mathrm{d}x=(-1)^n\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=\pi}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0}-n^2F_c(n)$.

5° 若$f(0)=f(\pi)=f''(0)=f''(\pi)=0$，则有

$$\int_0^{\pi}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\sin(nx)\mathrm{d}x=n^4F_s(n).$$

6° 若$f'(0)=f'(\pi)=f'''(0)=f'''(\pi)=0$，则有

$$\int_0^{\pi}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\cos(nx)\mathrm{d}x=n^4F_c(n).$$

为变换更高阶的导数,可作以上类似的考虑.但由1°、2°可以看到,对于奇数阶导数的变换,最后一项的变换式不是同类变换.这点必须注意.由3°、4°知,在求解边值问题时,选用正弦变换还是余弦变换,取决于所要消去的变数所满足的边界条件的形状.若边界条件为已知 f 在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处的值,则利用有限傅里叶正弦变换可以消去方程中的$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$;若边界条件为已知$\frac{\partial f}{\partial x}$在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处的值,则利用有限傅里叶余弦变换可以消去$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

6.1.3 $f(x)$定义在$[0,a]$上的有限傅里叶正弦变换和余弦变换

设 $f(x)$在$[0,a]$上满足狄利克雷条件,则 $f(x)$的有限傅里叶正弦变换定义为

$$F_s(n)=\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x,$$

其反演公式是

$$f(x)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}F_s(n)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\quad(x\text{ 为连续点}).$$

在间断点 x 处,上式左边改为$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

$f(x)$ 的有限傅里叶余弦变换定义为

$$F_c(n)=\int_0^a f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x,$$

其反演公式是

$$f(x)=\frac{F_c(0)}{a}+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}F_c(n)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\quad(x\text{ 为连续点}).$$

当 x 为间断点时,上式左边改为$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

6.1.4 在$[0,a]$上函数各阶导数的有限傅里叶变换之间的关系

利用有限傅里叶正弦变换和余弦变换的定义及分部积分法,可得以下关系:

1° $\int_0^a\frac{\partial f}{\partial x}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x=-\frac{n\pi}{a}F_c(n)$,

其中 $F_c(n)$为 $f(x)$的有限傅里叶余弦变换.

2° $\int_0^a\frac{\partial f}{\partial x}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x=(-1)^n f(a)-f(0)+\frac{n\pi}{a}F_s(n)$,

其中 $F_s(n)$为 $f(x)$的有限傅里叶正弦变换.

3° $\int_0^a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{a}[(-1)^{n+1}f(a)+f(0)]-\frac{n^2\pi^2}{a^2}F_s(n)$.

4° $\int_0^a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x=(-1)^n f'(a)-f'(0)-\frac{n^2\pi^2}{a^2}F_c(n)$.

5° 若$f(0)=f(a)=f''(0)=f''(a)=0$,则有

$$\int_0^a \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = \frac{n^4\pi^4}{a^4}F_s(n).$$

6° 若$f'(0)=f'(a)=f'''(0)=f'''(a)=0$,则有

$$\int_0^a \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = \frac{n^4\pi^4}{a^4}F_c(n).$$

6.1.5 特殊边值条件下的有限傅里叶余弦变换

假设未知函数 $f(x)$及其导数$\frac{\partial f}{\partial x}$在 $x=0$ 和 $x=a$ 处的值满足条件:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+hf\right)_{x=a}=0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0}=0,$$

其中 h 为常数,此时宜用下面的有限傅里叶余弦变换

$$F(s)=\int_0^a f(x)\cos(sx)\mathrm{d}x,$$

其中 s 是超越方程

$$s\tan(sa)=h \tag{6-2}$$

的正根.

$F(s)$的反演公式是

$$f(x) = 2\sum_s \frac{s^2+h^2}{a(s^2+h^2)+h}F(s)\cos(sx). \tag{6-3}$$

式中的和式是按方程(6-2)的一切正根求和的.

6.1.6 应用举例

例 1 一无界而截面为正方形柱体的定常温度问题:设方柱一侧面温度保持一定,其余三侧面上温度为零.试求柱体内温度分布规律.

解 为方便计,取正方形边长为 π.用 u 表示温度,以上问题归结于求解下列偏微分方程的定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (0<x<\pi,0<y<\pi),\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=\pi}=0,\ u|_{y=0}=0,\ u|_{y=\pi}=u_0(\text{常数}).\end{cases}$$

根据边界条件,把方程和后面两个边界条件对 x 取有限傅里叶正弦变换,得

$$\frac{\mathrm{d}^2 U(n,y)}{\mathrm{d}y^2}-n^2U(n,y)=0, \tag{6-4}$$

及

$$U(n,y)\Big|_{y=0}=0,$$

$$U(n,y)\Big|_{y=\pi}=\int_0^\pi u_0\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{-u_0}{n}[(-1)^n-1].$$

方程(6-4)满足边界条件 $u(n,y)\Big|_{y=0}=0$ 的解为

$$U(n,y)=C\sinh(ny)\quad C \text{ 为任意常数}.$$

再由边界条件 $U(n,y)\Big|_{y=\pi}=-\frac{u_0}{n}[(-1)^n-1]$,得

当 n 为偶数时,$U(n,y)=0$,

当 n 为奇数时,$U(n,y)=\frac{2u_0}{n\sinh(n\pi)}\sinh(ny)$.

利用反演公式(6-1)得

$$u(x,y)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\sinh[(2n+1)\pi]}\sinh[(2n+1)y]\sin[(2n+1)x].$$

例2 考察介于两个平行平面 $x=0$ 和 $x=\pi$ 间的物体内热的流动.假设两侧面是绝热的,初始温度是 $\varphi(x)$,设 $u(x,t)$ 表瞬时 t 的温度,试求 $u(x,t)$.

解 上述问题归结为下列定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\quad (t>0,0<x<\pi),\\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0,\\ u(x,0)=\varphi(x).\end{cases}$$

根据已知的边界条件,应取有限傅里叶余弦变换.记 $U_c(n,t)=\int_0^{\pi}u(x,t)\cos nx\,dx$,得

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}U_c(n,t)=-a^2n^2U_c(n,t),\\ U_c(n,0)=\Phi(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos(nx)dx.\end{cases}$$

求解上述常微分方程,得

$$U_c(n,t)=\Phi(n)e^{-a^2n^2t}.$$

由反演公式,可得所求解

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)dx+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2a^2t}\cos nx\Phi(n).$$

例3 试解定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx} & (t>0,0<x<l),\\ u_x(0,t)=0, & u_x(l,t)=hu(l,t)=0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & \text{其中 } h \text{ 为已知正常数}.\end{cases}$$

解 由已知的边界条件,本题应取下列有限傅里叶余弦变换

$$U_c(s,t)=\int_0^{l}u(x,t)\cos(sx)dx\ ,$$

式中 s 是 $s\tan(sl)=h$ 的正根.

对方程和初始条件取上述有限傅里叶余弦变换,得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_c(s,t) = -a^2s^2U_c(s,t), \\ U_c(s,t)\Big|_{t=0} = \Phi(s) = \displaystyle\int_0^l \varphi(x)\cos(sx)\mathrm{d}x. \end{cases}$$

解之得
$$U_c(s,t) = \Phi(s)\mathrm{e}^{-a^2s^2t}.$$

利用反演公式(6-3),得

$$u(x,t) = \sum_s \frac{2(s^2+h^2)}{l(s^2+h^2)+h}\mathrm{e}^{-a^2s^2t}\cos(sx)\int_0^l \varphi(x)\cos(sx)\mathrm{d}x.$$

特别,当 $\varphi(x) = u_0$(常数)时,

$$U_c(s,0) = u_0\int_0^l \cos(sx)\mathrm{d}x = u_0\frac{\sin(sl)}{s},$$

此时
$$u(x,t) = 2u_0\sum_s \frac{h}{l(s^2+h^2)+h}\frac{\cos sx}{\cos sl}\mathrm{e}^{-a^2s^2t}.$$

例4 长度有限的梁的振动:设梁长为 l,梁的两端自由铰结,此时在 $x=0$ 与 $x=l$ 时,对于一切 t,都有 $y(t)=0$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$,其运动方程为

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P(x,t)}{EI},$$

其中 $P(x,t)$表梁的单位长度上所受的载荷,E 是组成梁的材料的杨氏系数,I 是惯性矩,试求 $y(x,t)$.

解 由边界条件知,应对方程两端取有限傅里叶正弦变换并应用 6.1.4 节的 5° 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}Y_s(n,t) + \frac{a^2n^4\pi^4}{l^4}Y_s(n,t) = \frac{a^2}{EI}P_s(n,t).$$

若记 $Y_s(n,t)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y_s(n,t)$的初始值为 Y_0 和 Y_1,则解上述常微分方程得

$$Y_s(n,t) = Y_0\cos\left(\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\right) + \frac{lY_1}{an^2\pi^2}\sin\left(\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\right) + \frac{l^2a}{EIn^2\pi^2}\int_0^t P_s(n,u)\sin\left(\frac{an^2\pi^2(t-u)}{l^2}\right)\mathrm{d}u.$$

由反演公式得
$$y(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}F_s(n,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

6.2 有限汉克尔变换

6.2.1 有限汉克尔变换的定义

设 $f(x)$在区间$(0,a)$内满足狄利克雷条件,它在此区间内的有限汉克尔变换式定义为

$$F(s)=\int_0^a xf(x)\mathrm{J}_n(sx)\mathrm{d}x$$

(其中 s 是超越方程 $\mathrm{J}_n(as)=0$ 的正根),并用符号 $\mathrm{J}_n[f(x)]$ 表示,即

$$\mathrm{J}_n[f(x)]=F(s)=\int_0^a xf(x)\mathrm{J}_n(sx)\mathrm{d}x,$$

其反演公式是

$$f(x)=\frac{2}{a^2}\sum_s F(s)\frac{\mathrm{J}_n(sx)}{[\mathrm{J}_n'(as)]^2}\quad(x\text{ 为连续点}),$$

和式 $\sum\limits_s$ 是关于方程 $\mathrm{J}_n(as)=0$ 的一切正根求和.

当 $n=0$ 时的特殊情形更为重要,此时

$$\mathrm{J}_0'(x)=-\mathrm{J}_1(x),$$

反演公式为

$$f(x)=\frac{2}{a^2}\sum_s F(s)\frac{\mathrm{J}_0(sx)}{[\mathrm{J}_1(as)]^2}.$$

6.2.2　其他类型的汉克尔变换

在汉克尔变换中,s 是某种超越方程的根.当超越方程的形式不同时,有不同的汉克尔变换.

(1)设 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内满足狄利克雷条件,且

$$F(s)=\int_0^a xf(x)\mathrm{J}_n(sx)\mathrm{d}x,$$

其中 s 是超越方程

$$s\mathrm{J}_n'(sa)+h\mathrm{J}_n(sa)=0\tag{6-5}$$

的正根.则在 $(0,a)$ 内的连续点处,有反演公式

$$f(x)=\frac{2}{a^2}\sum_s\frac{s^2F(s)}{h^2+\left(s^2-\dfrac{n^2}{a^2}\right)}\frac{\mathrm{J}_n(sx)}{[\mathrm{J}_n(as)]^2},$$

其中和式 $\sum\limits_s$ 是关于方程(6-5)的正根求和.

这种变换在处理圆柱体侧面与周围介质有热交换的热传导问题时,颇有用处.

特别,当 $n=0$ 时,

$$F(s)=\int_0^a xf(x)\mathrm{J}_0(sx)\mathrm{d}x,$$

$$f(x)=\frac{2}{a^2}\sum_s\frac{s^2F(s)}{h^2+s^2}\frac{\mathrm{J}_0(sx)}{[\mathrm{J}_0(as)]^2},$$

其中 s 是方程 $h\mathrm{J}_0(sa)=s\mathrm{J}_1(sa)$ 的正根,求和是对一切正根求和.

(2)设 $f(x)$ 在 $0<a\leqslant x\leqslant b$ 内满足狄利克雷条件,且设 $f(x)$ 在此区间内的有限汉克尔变换为

$$F(s)=\int_a^b xf(x)[\mathrm{J}_n(sx)\mathrm{Y}_n(as)-\mathrm{Y}_n(sx)\mathrm{J}_n(as)]\mathrm{d}x,$$

其中 $\mathrm{Y}_n(sx)$是第二类 n 阶贝塞尔函数，s 是超越方程

$$\mathrm{J}_n(sb)\mathrm{Y}_n(sa)-\mathrm{J}_n(sa)\mathrm{Y}_n(sb)=0 \tag{6-6}$$

的正根.且用符号 $H_n[f(x)]$表示这种变换，即

$$H_n[f(x)]=F_{\mathrm{H}}(s)=\int_a^b xf(x)[\mathrm{J}_n(sx)\mathrm{Y}_n(sa)-\mathrm{Y}_n(sx)\mathrm{J}_n(sa)]\mathrm{d}x$$

其反演公式是

$$f(x)=2\sum_s\frac{s^2\mathrm{J}_n^2(sb)}{\mathrm{J}_n^2(sa)-\mathrm{J}_n^2(sb)}F_{\mathrm{H}}(s)[\mathrm{J}_n(sx)\mathrm{Y}_n(sa)-\mathrm{J}_n(sa)\mathrm{Y}_n(sx)], \tag{6-7}$$

其中$\sum_s$ 是关于方程(6-6) 的一切正根求和.

若遇到所要消去的变数的变化范围不含原点，例如讨论一个空心管子的材料的温度或应力时，选取上述变换较为方便.

6.2.3 有限汉克尔变换的性质

设汉克尔变换式为　　$F(s)=\int_0^a xf(x)\mathrm{J}_n(sx)\mathrm{d}x$,

(1)s 是超越方程 $\mathrm{J}_n(sa)=0$ 的正根的情形最常见.此时有如下性质:

1° $\mathrm{J}_n\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]=\frac{s}{2n}\{(n-1)\mathrm{J}_{n+1}[f(x)]-(n+1)\mathrm{J}_{n-1}[f(x)]\}(n>0)$.

2° $n\mathrm{J}_n\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\frac{s}{2}\{\mathrm{J}_{n+1}[f(x)]+\mathrm{J}_{n-1}[f(x)]\}$.

3° $\mathrm{J}_n\left[\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]=\frac{s}{2}\left[\mathrm{J}_{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)-\mathrm{J}_{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\right]$.

4° $\mathrm{J}_n\left[\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}-\frac{n^2f}{x^2}\right]=-asf(a)\mathrm{J}_n'(as)-s^2\mathrm{J}_n(f(x))$.

特别，当 $n=0$ 时，有

1° $\mathrm{J}_1\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]=-s\mathrm{J}_0(f(x))$.

2° $\mathrm{J}_0\left(\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=asf(a)\mathrm{J}_1(sa)-s^2\mathrm{J}_0[f(x)]$.

若在边界条件中有 $f(a)=0$ 时，则

$$\mathrm{J}_0\left(\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=-s^2\mathrm{J}_0(f(x)).$$

(2)s 是方程 $s\mathrm{J}_n'(sa)+h\mathrm{J}_n(sa)=0$ 的正根的情形.此时有

1° $\mathrm{J}_0\left[\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]=a\mathrm{J}_0(sa)\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+hf\right)_{x=a}-s^2\mathrm{J}_0(f(x))$.

2° 如果有边界条件$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+hf(x)\right)_{x=a}=0$,则有

$$\mathrm{J}_0\left[\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]=-s^2\mathrm{J}_0(f(x)).$$

在讨论扩散现象时，常有这样的边界条件出现.

(3) s 是方程 $J_n(sb)Y_n(sa)-J_n(sa)Y_n(sb)=0$ 的正根的情形. 此时有

1° $H_n\left(\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}-\frac{n^2f}{x^2}\right)=\frac{J_n(sa)}{J_n(sb)}f(b)-f(a)-s^2H_n(f(x)).$　　(6-8)

2° 特别当 $f(a)=f(b)=0$ 时，有

$$H_n\left(\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}-\frac{n^2f}{x^2}\right)=-s^2H_n(f(x)).$$

3° $H_1\left(\frac{x^2-a^2}{x}\right)=\frac{a^2-b^2}{s^2b^2}\frac{J_1(sa)}{J_1(sb)}.$　　(6-9)

例 5　半径为 a 的圆形薄膜的对称振动：假设振动是自由的，此时的运动方程为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

其中 $c^2=\frac{T}{\sigma}$，T 是薄膜受到的均匀张力，σ 是薄膜单位面积的质量. 且边界和初始条件为 $z(a,t)=0, z(r,0)=f(r), \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r)$，试求位移 $z(r,t)$.

解　对方程和条件取零阶有限汉克尔变换，且记 $J_0[z(r,t)]=Z(s,t)$，得

$$\begin{cases}\frac{d^2}{dt^2}Z(s,t)+c^2s^2Z(s,t)=0,\\ Z(s,0)=\int_0^a uf(u)J_0(su)du,\\ \left.\frac{dZ(s,t)}{dt}\right|_{t=0}=\int_0^a ug(u)J_0(su)du.\end{cases}$$

求解上述常微分方程得

$$Z(s,t)=\cos(cst)\int_0^a uf(u)J_0(su)du+\frac{\sin(cst)}{sc}\int_0^a ug(u)J_0(su)du,$$

由反演公式得

$$\begin{aligned}z(r,t)=&\frac{2}{a^2}\sum_s\frac{J_0(sr)}{[J_1(sa)]^2}\cos(cst)\int_0^a uf(u)J_0(su)du+\\&\frac{2}{ca^2}\sum_s\frac{J_0(sr)}{[J_1(sa)]^2}\cdot\frac{\sin(cst)}{s}\int_0^a ug(u)J_0(su)du,\end{aligned}$$

其中 $\sum_s$ 是对方程 $J_0(sa)=0$ 的一切正根 s 求和.

例 6　两个同心圆柱间粘滞流体的运动：设有粘滞流体包含在两个无界同心圆柱面之间. 它们的半径分别为 a 和 b，内柱面固定不动，外柱面以固定的角速度 ω 突然开始旋转，求由此引起的流体的运动规律.

解　设 v 是流体在瞬间 t 的速度，μ 为运动粘滞系数. 问题归结为下列定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}-\dfrac{v}{r^2}=\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial v}{\partial t} & (a<r<b,t>0),\\ v|_{r=a}=0, v|_{r=b}=\omega b & (t>0),\\ v|_{t=0}=0 & (a<r<b).\end{cases}$$

对方程两边取 $n=1$ 时的(6-6)式汉克尔变换,即

$$H_1[v(r)]=V(s)=\int_a^b rv(r)[\mathrm{J}_1(sr)\mathrm{Y}_1(sa)-\mathrm{Y}_1(sr)\mathrm{J}_1(sa)]\mathrm{d}r,$$

则有

$$H_1\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right]=H_1\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial v}{\mathrm{d}t}\right],$$

因

$$v\Big|_{r=a}=0,\quad v\Big|_{r=b}=\omega b,$$

由 $n=1$ 时的(6-8)式,有

$$\omega b\frac{\mathrm{J}_1(sa)}{\mathrm{J}_1(sb)}-s^2V_{\mathrm{H}}(s,t)=\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_{\mathrm{H}}(s,t),$$

于是得到一阶线性微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\mathrm{d}V_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t}+s^2V_{\mathrm{H}}=\omega b\dfrac{\mathrm{J}_1(sa)}{\mathrm{J}_1(sb)},\\ V_{\mathrm{H}}\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

求解上述一阶微分方程,得

$$\mathrm{V}_{\mathrm{H}}(s,t)=\frac{b\omega}{s^2}\frac{\mathrm{J}_1(sa)}{\mathrm{J}_1(sb)}(1-\mathrm{e}^{-\mu s^2t}),$$

由反演公式得

$$v(r,t)=2\omega b\sum_s\frac{\mathrm{J}_1(sa)\mathrm{J}_1(sb)}{\mathrm{J}_1^2(sa)-\mathrm{J}_1^2(sb)}(1-\mathrm{e}^{-\mu s^2t})\cdot(\mathrm{J}_1(sr)\mathrm{Y}_1(sa)-\mathrm{J}_1(sa)\mathrm{Y}_1(sr))$$

其中 $\sum\limits_s$ 是对方程 $\mathrm{J}_1(sb)\mathrm{Y}_1(sa)-\mathrm{Y}_1(sb)\mathrm{J}_1(sa)=0$ 的一切正根求和.

再由 $n=1$ 时的(6-7)式与(6-9)式,以上结果可写为

$$v(r,t)=\frac{\omega b^2}{r}\left(\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\right)-2\omega b\sum_s\frac{\mathrm{J}_1(sa)\mathrm{J}_1(sb)}{\mathrm{J}_1^2(sa)-\mathrm{J}_1^2(sb)}\mathrm{e}^{-\mu s^2t}\times(\mathrm{J}_1(sr)\mathrm{Y}_1(sa)-\mathrm{Y}_1(sr)\mathrm{J}_1(sa)).$$

6.3 勒让德变换

6.3.1 勒让德变换的定义

取勒让德多项式为积分核的积分变换称为**勒让德变换**.即

$$F(n)=\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

其中 $\mathrm{P}_n(x)$ 为 n 次勒让德多项式,n 为正整数.

$F(n)$的反演公式是

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)F(n)\mathrm{P}_n(x). \tag{6-10}$$

如果变数的变化区间为(0,1),则选取变换

$$F(2n+1) = \int_0^1 \mathrm{P}_{2n+1}(x)f(x)\mathrm{d}x, \tag{6-11}$$

及

$$F(2n) = \int_0^1 \mathrm{P}_{2n}(x)f(x)\mathrm{d}x, \tag{6-12}$$

其中(6-11)式叫勒让德奇变换;(6-12)式叫勒让德偶变换.它们各自的反演公式是

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)\mathrm{P}_{2n+1}(x)F(2n+1),$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)\mathrm{P}_{2n}(x)F(2n).$$

6.3.2　勒让德变换的用途

勒让德变换可消去微分方程中形如$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x)^2\frac{\partial f}{\partial x}\right]$的项,如

$$1° \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{P}_n(x)\mathrm{d}x = -n(n+1)F(n), \tag{6-13}$$

$$2° \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{P}_{2n+1}(x)\mathrm{d}x$$
$$= (2n+1)\mathrm{P}_{2n}(0)[f]_{x=0} - (2n+1)(2n+2)F(2n+1), \tag{6-14}$$

$$3° \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{P}_{2n}(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{P}_{2n}(0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=0} - 2n(2n+1)F(2n). \tag{6-15}$$

例7　带电盘产生的电场:设圆盘的半径为1,v表示平面圆盘引起的电位,选取圆盘中心为坐标原点,z轴方向沿圆盘的轴方向.问题归结为下列定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0,\\ v\Big|_{z=0}=v_0(\text{常数}),0\leqslant r<1,\\ \dfrac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0}=0,r>1(\text{电场关于平面 } z=0 \text{ 对称}).\end{cases} \tag{6-16}$$

解　选取扁球面坐标(μ,ξ),它和柱面坐标(r,z)之间的关系为

$$z=\mu\xi,\ r=(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}.$$

在扁球面坐标系中,原定解问题(6-15)化为下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial v}{\partial \mu}\right]+\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left[(1+\xi^2)\dfrac{\partial v}{\partial \xi}\right]=0,\\ v\Big|_{\xi=0}=v_0,\dfrac{\partial v}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}=0.\end{cases}$$

对上述方程两边取勒让德变换

$$V(n)=\int_{-1}^{1}v\mathrm{P}_n(\mu)\mathrm{d}\mu.$$

由(6-13)式得

$$-n(n+1)V(n)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(1+\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{-1}^{1}v\mathrm{P}_n(\mu)\mathrm{d}\mu=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1+\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}V(n)\right]=n(n+1)V(n).\tag{6-17}$$

相应的边界条件为

$$\xi=0\text{时},V(n)=v_0\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n(\mu)\mathrm{d}\mu.\tag{6-18}$$

当 n 为正整数时,利用 $\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ 得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n(\mu)\mathrm{d}\mu=0.$$

当 $n=0$ 时,$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_0(\mu)\mathrm{d}\mu=2$.

由(6-18)式知,当 $n>0$ 时,$V(n)=0$;当 $n=0$ 时,$V(n)=2v_0$,因而知(6-17)式应是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1+\xi^2)\frac{\partial V(n)}{\partial\xi}\right]=0.\tag{6-19}$$

因为当 $\xi\to\infty$ 时,$V(0)\to0$,故方程(6-19)满足相应边界条件的解为

$$V(0)=\frac{4v_0}{\pi}\mathrm{arccot}\,\xi.$$

由反演公式(6-10),并注意到当 $n>0$ 时,$V(n)=0$,当 $n=0$ 时,$V(n)=2v_0$,得解

$$v=\frac{2v_0}{\pi}\mathrm{arccot}\,\xi.$$

关于在平面 $z=0$ 的一个圆形区域内部和外部具有不同形式的半空间 $z>0$ 的边值问题,可选勒让德奇变换和偶变换.如果在平面 $z=0$ 上的圆形域外部给出了未知函数值,则选奇变换;如果在圆形域内给出未知函数的导数值,则选偶变换.

7 Z 变 换

在连续系统中,常用微分方程描述系统的特性.傅里叶变换、拉普拉斯变换等是求解微分方程的简便工具.在离散系统中,常用差分方程描述系统的特性,而 Z 变换是求解差分方程的重要工具.它在现代科技领域中广为应用.

7.1 离散时间函数

所谓离散时间函数,在工程技术上就是离散时间信号.它既可以是计算机中所

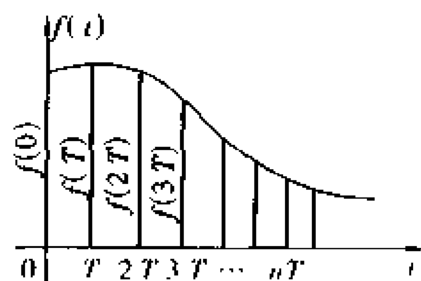


图 7-1

用的纯粹数字信号，也可以是某些系统中的连续信号经采样而得的数字信号. 在许多离散系统中，其信号流程是考虑在 t 的离散值上，通常是在 nT($n=0,\pm1,\pm\cdots$ 或 $n=0,1,\cdots$)上，T 是固定正数. 在采样的数据系统中，T 一般是采样周期. 从理论上说，采样间隔可以不相等. 但实际处理时，一般假定采样时刻是等间隔的，且常取 $T=1$. 因而 $f(nT)=f(n)$.

在图 7-1 中，时间函数 $f(t)$ 是连续的，它在 $t=nT$ 处采样所得的函数值为离散时间函数 $f(nT)$($n=0,1,\cdots$)，$f(nT)$ 在时间上和幅值上都是经过量化了的信号，且可以用数值序列来表示.

7.2　Z 变换的概念

设 $f(n)$ 为双边序列($n=0,\pm1,\pm2,\cdots$)，若级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)z^{-n} \quad (z \text{ 为复参量}) \tag{7-1}$$

在 z 的某变化域内收敛，则由级数(7-1)所确定的函数，记为 $F(z)$，即

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)z^{-n}. \tag{7-2}$$

$F(z)$ 称为 $f(n)$ 的 Z 变换，并且记为 $Z[f(n)]$. 即

$$Z[f(n)] = F(z).$$

而 $f(n)$ 称为 $F(z)$ 的逆变换，且记为

$$f(n) = Z^{-1}[F(z)].$$

由(7-2)式所定义的 Z 变换又称为双边 Z 变换.

若 $f(n)$ 为单边序列，即 $n=0,1,2,\cdots$，此时 $f(n)$ 的 Z 变换定义为

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)z^{-n} \quad (z \text{ 为复参量，级数收敛}) \tag{7-3}$$

且称为 $f(n)$ 的单边 Z 变换. 实用中，单边 Z 变换用得较多.

例 1　确定下列序列的双边 Z 变换及收敛域.

1° $\delta(n)$，　2° $\delta(n-l)$，　3° $\delta(n+l)$，

其中 $\delta(n)$ 为单位脉冲函数，当 $n=0$ 时，$\delta(n)=1$；当 $n\neq0$ 时，$\delta(n)=0$.

解　1° $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)z^{-n} = 1$　(全平面)，

2° $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n-l)z^{-n} = z^{-l}$　($|z|>0$)，

3° $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n+l)z^{-n} = z^{l}$　($|z|\geqslant0$).

例 2 求下列序列的 Z 变换.

1° $\{0,1,r,r^2,\cdots\}$, 2° a^{rn}(a,r 为常数,$a\neq 0$).

解 1° $F(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}r^{n-1}z^{-n}=r^{-1}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(rz^{-1})^n$

$$=r^{-1}\frac{rz^{-1}}{1-rz^{-1}}=\frac{1}{z-r}\quad(|z|>|r|).$$

2° $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a^{rn}z^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a^rz^{-1})^n=\dfrac{z}{z-a^r}\quad(|z|>a^r)$.

7.3 Z 变换的收敛半径及其求法

Z 变换式是一个复变量函数项级数,这级数的收敛性,即 Z 变换的存在性依赖于 $f(n)$ 的取值情况和 Z 的取值范围.为便于说明级数(7-3)的收敛范围.作变换,令 $\xi=\dfrac{1}{z}$,因而

$$F(z)=F\left(\frac{1}{\xi}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}f(n)\xi^n. \tag{7-4}$$

这是 ξ 的幂级数,系数为 $f(n)$.根据阿贝尔定理,存在一个正实数 a,当 $|\xi|<a$ 时,级数(7-4)绝对收敛;当 $|\xi|>a$ 时,级数发散.

对 z 而言,则是当 $|z|>\dfrac{1}{a}=R$ 时,级数(7-3)绝对收敛;当 $|z|<\dfrac{1}{a}=R$ 时,级数(7-3)发散,即 Z 变换不存在.R 称为级数(7-3)的收敛半径.

收敛半径 R 的求法:

1° 设级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}$,若

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f(n+1)}{f(n)}\right|=l,\quad 0\leqslant l\leqslant+\infty,$$

则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}$ 的收敛半径为

$$R=\begin{cases}l & (0<l<+\infty),\\ 0 & (l=0),\\ +\infty & (l=+\infty).\end{cases} \tag{7-5}$$

2° 设级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}$,若

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|f(n)|}=l,\quad 0\leqslant l\leqslant+\infty,$$

则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}$ 的收敛半径为

$$R=\begin{cases} l & (0<l<+\infty), \\ 0 & (l=0), \\ +\infty & (l=+\infty). \end{cases} \tag{7-6}$$

注意:(7-5),(7-6) 式只适用于非缺项级数.

例3　求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{-n}$ 的收敛半径 R.

解
$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(n+1)}{f(n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}=2.$$

或
$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f(n)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n}=2.$$

例4　求下列 Z 变换的收敛半径:

1° $Z[f(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^{-(2n+1)}$,

2° $Z[f(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}z^{-2n}$.

解　以上两个级数是缺项级数,不能直接用公式(7-5) 或(7-6),故用达朗贝尔(D'Alembert) 判别法:

1°
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\Big/\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)\left|\frac{z^{-(2n+3)}}{z^{-(2n+1)}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2|z^{-2}|}{2(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{4}|z^{-2}|.$$

故当 $|z^{-1}|^2\cdot\frac{1}{4}>1$,即 $|z^{-1}|>2$ 时,Z 变换存在,其收敛半径 $R=2$.

2°
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{(n+1)^n}{n!}\right)\left|\frac{z^{-(2n+2)}}{z^{-(2n)}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}|z^{-2}|=\mathrm{e}|z^{-2}|.$$

故当 $\mathrm{e}|z^{-2}|>1$,即 $|z^{-1}|>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ 时,Z 变换存在,其收敛半径为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

7.4　Z 变换存在定理及收敛域

7.4.1　Z 变换存在定理

若存在数 $N>0,R>0$,对于数 $M>0$,有

$$|f(n)|\leqslant MR^n\quad(\text{当 } n\geqslant N \text{ 时})$$

成立(满足此条件的序列 $f(n)$,称为指数阶序列),则 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}$ 在 $|z|>R$ 内绝对收敛,即 Z 变换存在.且 $F(z)$ 在 $|z|>R$ 内解析.上述定理的条件是充分必要的,即非指数阶序列不存在 Z 变换.由上述定理知,若存在一点 z_0,级数

$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z_0^{-n}$ 发散,那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$ 在 $|z| \leqslant |z_0|$ $(z_0 \neq 0)$ 内发散. 在此范围内没有 Z 变换. 若找出了 $F(z)$ 的所有奇点,就可以确定 $F(z)$ 的收敛域. 因为 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$ 的收敛半径所决定的圆周必通过离原点最远的奇点.

例 5 设序列 $f(n)$ 的 Z 变换为

$$F(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z-1)\left(z + \frac{3}{2}\right)(z^2 + 4)},$$

试确定 Z 变换的收敛域.

解 $z_1 = 1, z_2 = -\frac{3}{2}, z_3 = 2\mathrm{i}, z_4 = -2\mathrm{i}$ 是 $F(z)$ 的 4 个奇点,除此 4 个奇点外,$F(z)$ 在全 z 平面上解析. $z = \pm 2\mathrm{i}$ 是离原点最远的奇点,因此 $F(z)$ 只有在 $|z| > 2$ 时,才能表示 Z 变换. 故 Z 变换的收敛域为 $|z| > 2$, 当 $|z| \leqslant 2$ 时,不存在 Z 变换.

7.4.2 双边 Z 变换的存在性和 F(z) 的解析性

因
$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} f(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n},$$

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$ 的收敛域为 $|z| > R_1$, 级数 $\sum_{n=-\infty}^{0} f(n) z^{-n}$ 的收敛域为 $|z| < R_2$, 若 $R_1 < R_2$, 则 $F(z)$ 的收敛域为 $R_1 < |z| < R_2$, 且 $F(z)$ 在此范围内解析. 若 $R_1 > R_2$, 则双边 Z 变换不存在.

7.5 常见序列的 Z 变换

(1) 单位脉冲序列　见例 1 中的 1°.

(2) 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1 & (n \geqslant 0), \\ 0 & (n < 0). \end{cases}$$

$$Z[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1).$$

(3) 单边指数序列

$$f(n) = \begin{cases} a^n & (n \geqslant 0, a > 0), \\ 0 & (n < 0). \end{cases}$$

$$Z[f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (|z| > a).$$

特别,
$$Z[\mathrm{e}^n] = \frac{z}{z - \mathrm{e}} \quad (|z| > \mathrm{e}).$$

(4) 单边正弦序列

$$f(n)=\begin{cases}\sin(n\omega_0) & (n\geqslant 0),\\ 0 & (n<0).\end{cases}$$

$$Z[\sin(n\omega_0)]=Z\left(\frac{e^{in\omega_0}-e^{-in\omega_0}}{2i}\right)=\frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z-e^{i\omega_0}}-\frac{z}{z-e^{-i\omega_0}}\right]$$

$$=\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}.$$

(5)单边余弦序列

$$f(n)=\begin{cases}\cos(n\omega_0) & (n\geqslant 0),\\ 0 & (n<0).\end{cases}$$

$$Z[f(n)]=Z\left[\frac{e^{in\omega_0}+e^{-in\omega_0}}{Z}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{i\omega_0}}+\frac{z}{z-e^{-i\omega_0}}\right]$$

$$=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}.$$

(6)单边斜坡序列

$$f(n)=\begin{cases}n & (n\geqslant 0),\\ 0 & (n<0).\end{cases}$$

$$Z[f(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\cdots+\frac{n}{z^n}+\cdots.$$

因
$$(z-1)Z[f(n)]=1+\left(\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{z}\right)^n+\cdots=\frac{z}{z-1},$$

故
$$Z[f(n)]=F(z)=\frac{z}{(z-1)^2}\quad(|z|>1).$$

7.6　Z 变换的性质

7.6.1　线性性质

设 α,β 为常数,且

$Z[f_1(n)]=F_1(z)\ (|z|>R_1)$,　$Z[f_2(n)]=F_2(z)\ (|z|>R_2)$,

则

$$Z[\alpha f_1(n)+\beta f_2(n)]=\alpha Z[f_1(n)]+\beta Z[f_2(n)]$$
$$=\alpha F_1(z)+\beta F_2(z)\quad(|z|>R=\max(R_1,R_2)).$$

$$Z^{-1}[\alpha F_1(z)+\beta F_2(z)]=\alpha f_1(n)+\beta f_2(n).$$

例 6　求序列 $f(n)=n-b$(b 为常数)的 $Z[f(n)]$.

解　$$Z[f(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}(n-b)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}bz^{-n}$$

$$=\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{b}{z-1}.$$

7.6.2 位移性质

(1) 向左移(提前) 设 $Z[f(n)] = F(z)$，k 为正整数，则

$$Z[f(n+k)] = z^k\left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(n)z^{-n}\right] \quad (|z| > R).$$

当 $k = 1$ 时，$Z[f(n+1)] = z[F(z) - f(0)]$.

当 $k = 2$ 时，$Z[f(n+2)] = z^2F(z) - zf(1) - z^2f(0)$.

例7 求 $Z\left[\dfrac{1}{(n+1)!}\right]$ 及 $Z\left[\dfrac{1}{(n+2)!}\right]$.

解 先求 $Z\left[\dfrac{1}{n!}\right] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} z^{-n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z^{-1})^n}{n!} = e^{\frac{1}{z}}$.

由位移性质知

$$Z\left[\frac{1}{(n+1)!}\right] = z[e^{\frac{1}{z}} - f(0)] = z[e^{\frac{1}{z}} - 1] \quad (|z| > 1).$$

$$Z\left[\frac{1}{(n+2)!}\right] = z^2F(z) - zf(1) - z^2f(0)$$

$$= z^2e^{\frac{1}{z}} - z - z^2 \quad (|z| > 1).$$

(2) 向右移(延迟) 设 $Z[f(n)] = F(z)$，k 为正整数，则

$$Z[f(n-k)u(n-k)] = z^{-k}F(z). \tag{7-7}$$

例8 求 $Z[(n-2)u(n-2)]$.

解 因为已知 $Z[n] = \dfrac{z}{(z-1)^2}$，

故由延迟位移性质(7-7)式，知

$$Z[(n-2)u(n-2)] = z^{-2}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z(z-1)^2}.$$

7.6.3 有限和定理

设 $$Z[f(n)] = F(z) \quad (|z| > R),$$

则 $$Z\left[\sum_{k=1}^{n} f(k)\right] = \frac{z}{z-1}F(z) \quad (|z| > \max(R,1)).$$

例9 设 $g(n) = \sum\limits_{r=0}^{n} r$，试求 $Z[g(n)]$.

解 因 $Z[n] = \dfrac{z}{(z-1)^2}$，由有限和定理得

$$Z[g(n)] = Z\left[\sum_{r=0}^{n} r\right] = \frac{z}{z-1}F(z) = \frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}$$

$$(|z| > 1).$$

7.6.4 初值定理

设 $Z[f(n)] = F(z)$，则

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) \quad (|z| > R).$$

推论　设 $Z[f(n)] = F(z)$，则

$$f(k) = \lim_{z\to\infty} z^k\left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(n)z^{-n}\right] \quad (|z| > R). \tag{7-8}$$

其中 $k = 0,1,2,\cdots$.

由此推论可知如下结果：

1° 如果 $F(z)$ 是有理函数，且 $f(r) = 0\ (r = 0,1,2,\cdots,k-1)$，$f(k) \neq 0$，则 $F(z)$ 的分母多项式比分子多项式高 k 次.

2° 如果 $F(z)$ 是有理函数，则可以根据它的分子分母的最高方的次数，确定 $F(z)$ 所对应的 $f(n)$ 有多少个始值为零（如果有始值为零）. 如果 $f(0) \neq 0$，则 $F(z)$ 的分子与分母的最高次数相等.

3° 如果已知 $f(n)$ 的 Z 变换 $F(z)$，则可以求得序列 $f(n)$ 的值.

例 10　设 $f(n)$ 的 $F(z) = \dfrac{2z^2 + 3z + 12}{(z-1)^4}$，求 $f(0), f(1), f(2), f(3)$.

解　因 $F(z)$ 的分母比分子高 2 次，故知

$$f(0) = f(1) = 0,$$

再由(7-8)式，可求出

$$f(2) = \lim_{z\to\infty} z^2\left[F(z) - \sum_{n=0}^{1} f(n)z^{-n}\right] = \lim_{z\to\infty} z^2 \frac{2z^2 + 3z + 12}{(z-1)^4} = 2,$$

$$f(3) = \lim_{z\to\infty} z^3\left[F(z) - \sum_{n=0}^{2} f(n)z^{-n}\right] = z^3\left[F(z) - 2z^{-2}\right] = 11.$$

7.6.5　终值定理

设 $Z[f(n)] = F(z)$，且 $\lim_{n\to\infty} f(n)$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) \quad (|z| > R, R \leqslant 1).$$

注意：这里 $R \leqslant 1$，如果 $R > 1$，点 $z = 1$ 不在级数收敛范围内，极限没有意义. 其中 $z \to 1$，必须是 $z = 1 + \varepsilon\ (\mathrm{Re}\,\varepsilon > 0)$，而 $\varepsilon \to 0$ 的形式.

如果 $F(z)$ 是 z 的有理函数且有极点 $p_i\ (i = 1,2,\cdots,k)$，离原点距离最远的极点 $p\ (|p| = \max_{1\leqslant i\leqslant k} |p_i|)$ 必在收敛圆周 $|z| = R$ 上. 这种 p 点的位置和重数与 $\lim_{n\to+\infty} f(n)$ 的性质有密切关系. 其中的关系如表 7-1 所示.

例 11　设 $f(n) = \sum_{r=0}^{n} \dfrac{a^r}{r!}$　（a 为常数），求 $\lim_{n\to+\infty} f(n)$.

解　因

$$Z[f(n)] = F(z) = \frac{z}{z-1} e^{\frac{a}{z}},$$

由终值定理得

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) = \lim_{z\to 1} z e^{\frac{a}{z}} = e^a.$$

表 7-1

p 点位置	p 的重数 k	$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ 的性质
$\|p\| < 1$	$k \geqslant 1$	0
$\|p\| = 1$	$k = 1$	常数 $A(\neq 0)$
	$k > 1$	$\pm\infty$
$\|p\| = 1, \mathrm{Im}(p) \neq 0$	$k = 1$	有界振动
	$k > 1$	无界振动
$\|p\| > 1, \mathrm{Im}(p) \neq 0$	$k \geqslant 1$	$\pm\infty$
$\|p\| > 1, \mathrm{Im}(p) \neq 0$		无界振动

例 12 设 $f(n) = (-1)^n$，易见 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ 不存在.

但
$$Z[f(n)] = Z[(-1)^n] = \frac{z}{z+1} = F(z), R = 1,$$
且
$$\lim_{z\to1}(z-1)F(z) = \lim_{z\to1}\frac{z(z-1)}{z+1} = 0.$$
这说明终值定理的逆定理不成立.

7.6.6 周期序列的 Z 变换

设 $f(n)$ 是以 k 为周期的单边序列，即 $f(n+k) = f(n)(n \geqslant 0, k$ 为自然数)，则
$$Z[f(n)] = F(z) = \frac{z^k}{z^k - 1}F_k(z) \quad (|z| > 1), \tag{7-9}$$
其中
$$F_k(z) = \sum_{r=0}^{k-1} f(r)z^{-r},$$
它表示在第一个周期内 $f(n)$ 的 Z 变换.

例 13 设 $f(n) = (-1)^n \ (n \geqslant 0)$，试求 $F(z)$.

解 显然 $f(n)$ 是以 $k = 2$ 为周期的周期序列，由(7-9)式得
$$F(z) = \frac{z^2}{z^2-1}F_2(z),$$
而
$$F_2(z) = \sum_{r=0}^{2-1}(-1)^r z^{-r} = \sum_{r=0}^{1}(-1)^r z^{-r} = 1 + (-1)z^{-1} = 1 - z^{-1},$$
故
$$F(z) = \frac{z^2}{z^2-1}(1 - z^{-1}) = \frac{z}{z+1}.$$

7.6.7 像函数的微分性质

设
$$Z[f(n)] = F(z) \quad (|z| > R),$$
则
$$Z[nf(n)] = -z\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} \quad (|z| > R).$$

推论　若引进算子符号

$$D=-z\frac{d}{dz},$$

$$D^2=-z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}\right]=-z\left[-\frac{d}{dz}-z\frac{d^2}{dz^2}\right]=z\frac{d}{dz}+z^2\frac{d^2}{dz^2},$$

$$D^3=-z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}\right]\left[-z\frac{d}{dz}\right]=-z\frac{d}{dz}-3z^2\frac{d^2}{dz^2}-z^3\frac{d^3}{dz^3},$$

$$\vdots$$

并设 $Z[f(n)]=F(z)$，则有

$$\begin{cases}Z[nf(n)]=D[F(z)],\\ Z[n^2f(n)]=D^2[F(z)],\\ Z[n^3f(n)]=D^3[F(z)],\\ \quad\vdots\\ Z[n^kf(n)]=D^k[F(z)].\end{cases}$$

例 14　设 $f(n)=u(n)$，且知

$$Z[u(n)]=F(z)=\frac{z}{z-1}\quad(|z|>1),$$

则

$$Z[nu(n)]=-z\frac{d}{dz}[F(z)]=-z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right]=\frac{z}{(z-1)^2}\ (|z|>1).$$

7.6.8　像函数的积分

设 $Z[f(n)]=F(z)\quad(|z|>R)$，则

$$Z\left[\frac{f(n)}{n+k}\right]=z^k\int_z^{+\infty}x^{-(k+1)}F(x)dx\quad(k\geqslant 1).$$

7.6.9　尺度变换

(1) 时域尺度改变　设 $Z[f(n)]=F(z)\ (|z|>R)$，k 为任意正整数. 定义序列

$$g(n)=\begin{cases}f\left(\frac{n}{k}\right), & n=mk\\ 0, & mk<n<(m+1)k\end{cases}\quad(m=0,1,2,\cdots),$$

则

$$Z[g(n)]=F[z^k]\quad(|z|>R^{\frac{1}{k}}).\tag{7-10}$$

例 15　设有序列 $g(n)=1,0,1,0,\cdots$，试求 $Z[g(n)]$.

解　因

$$g(n)=\begin{cases}u\left(\frac{n}{2}\right), & n=2m\\ 0, & n\neq 2m\end{cases}\quad(m=0,1,2,\cdots),$$

而

$$Z[u(n)]=\frac{z}{z-1}=F(z),$$

由(7-10)式可得

$$Z[g(n)]=F(z^2)=\frac{z^2}{z^2-1}\quad(|z|>1).$$

(2) Z 域尺度改变 设 $Z[f(n)]=F(z)\ (|z|>R)$，a 是不等于零的常数，则

$$Z[a^nf(n)]=F\left(\frac{z}{a}\right)\quad(|z|>|a|R).$$

7.6.10 差分性质

设 $Z[f(n)]=F(z)\ (|z|>R)$，k 为自然数，则

1° $Z[\Delta^kf(n)]=(z-1)^kF(z)-z\sum_{l=1}^{k-1}(z-1)^{k-l+1}\Delta^lf(0)$.

2° $Z[\nabla^kf(n)]=\left(\frac{z-1}{z}\right)^kF(z)$.

其中 $\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$，向前差分，

$\Delta^2f(n)=\Delta(\Delta f(n))=\Delta(f(n+1)-f(n))=\Delta f(n+1)-\Delta f(n)$,

$\vdots$

$\Delta^kf(n)=\Delta^{k-1}f(n+1)-\Delta^{k-1}f(n)$;

$\nabla f(n)=f(n)-f(n-1)$，向后差分，

$\nabla^2f(n)=\nabla(\nabla f(n))=\nabla[f(n)-f(n-1)]=\nabla f(n)-\nabla f(n-1)$,

$\vdots$

$\nabla^kf(n)=\nabla^{k-1}f(n)-\nabla^{k-1}f(n-1)$.

7.6.11 卷积

这里所论述的是离散序列的卷积.它不仅用于求某些函数 Z 逆变换，而且可以将离散系统之间的输入和输出之间的关系联系起来.它建立了时域与复域间的联系.在离散系统的分析中起着重要的作用.

(1)卷积的定义

设 $f_1(n)$，$f_2(n)$是两个序列，且当 $n<0$ 时，$f_1(n)=f_2(n)=0$，则称

$$\sum_{k=0}^{n}f_1(k)f_2(n-k)$$

为序列 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 的卷积，记为 $f_1(n)*f_2(n)$，即

$$f_1(n)*f_2(n)=\sum_{k=0}^{n}f_1(k)f_2(n-k).$$

卷积满足以下运算规律：

1° 交换律 $f_1(n)*f_2(n)=f_2(n)*f_1(n)$,

2° 结合律 $f_1(n)*[f_2(n)*f_3(n)]=[f_1(n)*f_2(n)]*f_3(n)$,

3° 对加法的分配律

$$f_1(n)*[f_2(n)+f_3(n)]=f_1(n)*f_2(n)+f_1(n)*f_3(n).$$

例16 设 $f_1(n)=(0.3)^n, f_2(n)=(-0.5)^n, n\geqslant 0$，试求 $f_1(n)*f_2(n)$.

解 由卷积定义有

$$f(n)=f_1(n)*f_2(n)=\sum_{k=0}^{n}f_1(k)f_2(n-k),$$

故

$$f(0)=f_1(0)f_2(0)=(0.3)^0(-0.5)^0=1,$$
$$f(1)=f_1(0)f_2(1)+f_1(1)f_2(0)=(1)(-0.5)+(0.3)(1)=-0.2,$$
$$f(2)=f_1(0)f_2(2)+f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0)=0.19,$$
$$\vdots$$

(2) 卷积定理

设 $Z[f_1(n)]=F_1(z)\ (|z|>R_1), Z[f_2(n)]=F_2(z)\ (|z|>R_2)$ 则

$$Z[f_1(n)*f_2(n)]=F_1(z)F_2(z)\quad (|z|>R=\max(R_1,R_2)).$$

例17 设 $f_1(n)=u(n), f_2(n)=e^{-n}u(n)$，求 $Z[f_1(n)*f_2(n)]$.

解 因
$$Z[f_1(n)]=Z[u(n)]=\frac{z}{z-1}\quad (|z|>1),$$
$$Z[f_2(n)]=Z[e^{-n}u(n)]=\frac{z}{z-e^{-1}}\quad (|z|>e^{-1}),$$

由卷积定理得

$$Z[f_1(n)*f_2(n)]=F_1(z)F_2(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-1})}$$
$$(|z|>R=\max(1,e^{-1})=1).$$

7.7 Z 逆变换

求 Z 逆变换的方法主要有4种：反演积分法；幂级数展开法；部分分式展开法；利用卷积定理.

7.7.1 反演积分法

定理 设 $F(z)$ 在 $|z|>R$ 内解析，且在 $|z|>R$ 内只有有限个极点 $z_k(k=1,2,\cdots,l)$，则

$$f(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(z)z^{n-1}dz=\sum_{k=1}^{l}\mathrm{Res}[F(z)z^{n-1},z_k]\qquad(7\text{-}11)$$

其中 C 是 $|z|>R$ 内任一条包含所有极点的闭合曲线且取逆时针方向为正向. 如图7-2所示.

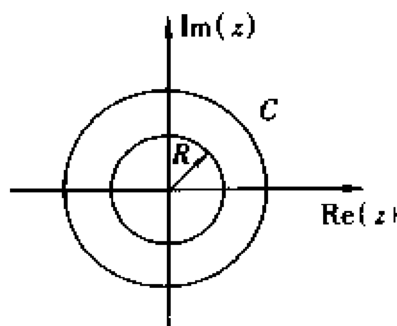


图 7-2

例18 求 $F(z)=\dfrac{z(z+1)}{(z-3)(z+1)^2}\quad(|z|>3)$ 的

逆变换.

解　由 $F(z)z^{n-1}=\frac{z^n(z+1)}{(z-3)(z-1)^2}$知 $z_1=3$ 为一阶极点，$z=1$ 为二阶极点. 应用(7-11)式得

$$f(n)=\mathrm{Res}[F(z)z^{n-1},z=3]+\mathrm{Res}[F(z)z^{n-1},z=1]$$
$$=3^n-n-1\quad(n\geqslant 0).$$

7.7.2　幂级数展开法

若函数 $F(z)$在收敛域内，可以展开成 z^{-n}形式的幂级数，由于展开形式的唯一性，根据 Z 变换 $F(z)$的定义，知 z^{-n}的系数就是 $f(n)$. 此法的关键在于将 $F(z)$表示为

$$F(z)=f(0)+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+\cdots+f(n)z^{-n}+\cdots. \tag{7-12}$$

如果对逆变换式不要求写成统一的表示式，或者只要将信号表示成一系列的采样值，则用幂级数展开法特别简便.

下面介绍几种求幂级数系数的方法：

(1) 若 $F(z)$可以表示成(7-12)式的形式的幂级数，且在$|z|>R$ 内可导，则

$$f(k)=\frac{1}{k!}\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{d}^kF(z)}{\mathrm{d}(z^{-1})^k}\quad(|z|>R), \tag{7-13}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$

例 19　设 $F(z)=z^{-k}$ $(|z|>1)$，试求 $f(n)=Z^{-1}[F(z)]$.

解　在$|z|>1$ 内，$F(z)$可对 z^{-1}求任意阶导数，且易知

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{d}^rF(z)}{\mathrm{d}(z^{-1})^r}=0\quad(r\neq k).$$

当 $r=k$ 时，$F^{(k)}(z)=k!$，故由(7-13)式知

$$f(n)=\delta(n-k)=\begin{cases}1 & (n=k),\\ 0 & (n\neq k).\end{cases}$$

(2) 设 $F(z)$可以表示成(7-12)式的形式，则

$$\begin{cases}f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}F(z),\\ f(k)=\dfrac{(-1)^k}{k!}\lim\limits_{z\to\infty}z^2\dfrac{\mathrm{d}G_{k-1}(z)}{\mathrm{d}z},\end{cases}$$

其中

$$G_0(z)=F(z),G_1(z)=z^2\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z},\cdots,G_k(z)=z^2\frac{\mathrm{d}G_{k-1}(z)}{\mathrm{d}z}.$$

例 20　设 $F(z)=\frac{z}{z-1}$ $(|z|>1)$，试求 $f(n)$ $(n=0,1,2)$.

解

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{z-1}=1.$$

因$\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{-1}{(z-1)^2}$，故

$$f(1)=\frac{(-1)^1}{1!}\lim_{z\to\infty}z^2\frac{(-1)}{(z-1)^2}=1.$$

又

$$G_2(z)=z^2\frac{\mathrm{d}G_1(z)}{\mathrm{d}z}=z^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{-1}{(z-1)^2}\right)=\frac{2z}{(z-1)^3},$$

故

$$f(2)=\frac{(-1)^2}{2!}\lim_{z\to\infty}z^2\frac{2z}{(z-1)^3}=1.$$

继续作下去,可得 $f(n)$ 的各值.

(3) 设 $F(z)=\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$(分子与分母的最高次方相等),其中 $P_n(z)=\sum_{r=0}^{n}p_rz^{-r}$,

$Q_n(z)=\sum_{j=0}^{n}q_jz^{-j}$,则

$$f(0)=p_0,$$

$$f(n)=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&p_0\\q_1&1&0&\cdots&0&p_1\\q_2&q_1&1&\cdots&0&p_2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\q_n&q_{n-1}&q_{n-2}&\cdots&q_1&p_n\end{vmatrix}\quad(n\geqslant 1),\tag{7-14}$$

$$f(n+k)=-\sum_{j=1}^{n}f(n+k-j)q_j\quad(k\geqslant 1).$$

例21 设 $F(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-3}}{1-z^{-1}+3z^{-2}}$,求 $f(k)(k=0,1,2,3,4)$.

解 由 $F(z)$ 的所给形式知

$$p_0=1,p_1=2,p_2=0,p_3=1,q_0=1,q_1=-1,q_2=+3,q_3=0.$$

由公式(7-14)知

$$f(0)=p_0=1,$$

$$f(1)=\begin{vmatrix}1&p_0\\q_1&p_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&2\end{vmatrix}=3,$$

$$f(2)=\begin{vmatrix}1&0&p_0\\q_1&1&p_1\\q_2&q_1&p_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\\3&-1&0\end{vmatrix}=0,$$

$$f(3)=\begin{vmatrix}1&0&0&p_0\\q_1&1&0&p_1\\q_2&q_1&1&p_2\\q_3&q_2&q_1&p_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&2\\3&-1&1&0\\0&3&-1&1\end{vmatrix}=-8,$$

$$f(4)=-\sum_{j=1}^{3}q_jf(4-j)=-[(-1)(-8)+(3)(0)+(0)(3)]=-8.$$

(4) 用长除法求幂级数系数 $f(n)$. 所谓长除法,就是用长除运算求得 $F(z)$ 的幂级数展开式. 仍用例21说明.

对 $F(z)=\dfrac{z^3+2z^2+1}{z^3-z^2+3z}$ 用长除法得

$$
\begin{array}{r}
1+3z^{-1}\qquad\quad -8z^{-3}-8z^{-4}\\
z^3-z^2+3z\;\big)\,z^3+2z^2\qquad\quad +1\\
\underline{z^3-\;\;z^2+3z\qquad}\\
3z^2-3z+1\\
\underline{3z^2-3z+9\quad}\\
-8\\
\underline{-8+8z^{-1}-24z^{-2}}\\
-8z^{-1}+24z^{-2}\\
\underline{-8z^{-1}+\;8z^{-2}-24z^{-1}}\\
16z^{-2}+24z^{-1}
\end{array}
$$

故

$$f(0)=1,\quad f(1)=3,\quad f(2)=0,\quad f(3)=-8,\quad f(4)=-8.$$

用长除法所得结果与例 21 的结果一致.

(5) 利用已知函数的幂级数展开式求幂级数系数 $f(n)$.

例 22 求 $F(z)=e^{-\frac{a}{z}}$ 的逆变换 $f(n)$.

解 利用 e^x 的幂级数展开式,知

$$F(z)=e^{-\frac{a}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{a}{z}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{n!}z^{-n},$$

故

$$f(n)=\frac{(-a)^n}{n!}.$$

7.7.3 部分分式展开法

在应用中,序列的 Z 变换 $F(z)$ 常是 z 的有理函数,即 $F(z)$ 的表示式为

$$F(z)=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0}{a_lz^l+a_{l-1}z^{l-1}+\cdots+a_1z+a_0}\triangleq\frac{P_m(z)}{Q_l(z)}\quad(l\geqslant m).$$

将 $F(z)$ 化成部分分式之和,分别求出各部分分式的 Z 逆变换,把各逆变换相加,便得所求的 $f(n)$.

例 23 设 $F(z)=\dfrac{z^2-z+3}{z^3+6z^2+11z+6}$,此处 $m=2,l=3,m<l$,试求 $f(n)$.

解 $Q_l(z)=z^3+6z^2+11z+6=(z+2)(z+3)(z+1)$,

设 $F(z)\equiv\dfrac{A}{z+1}+\dfrac{B}{z+2}+\dfrac{C}{z+3}$,用比较系数法求出

$$A=\frac{5}{2},\quad B=-9,\quad C=\frac{15}{2},$$

因此

$$F(z)=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{z+1}-9\frac{1}{z+2}+\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{z+3}$$

因

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{z+1}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+z^{-1}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z^{-1})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2}(-1)^{n-1}z^{-n},$$

$$-9\frac{1}{z+2}=-9\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}9(-1)^n2^{n-1}z^{-n},$$

$$\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{z+3}=\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15}{2}(-1)^{n-1}3^{n-1}z^{-n},$$

故

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{2}(-1)^{n-1}+9(-1)^n2^{n-1}+\frac{15}{2}(-1)^{n-1}3^{n-1}\right]z^{-n},$$

因而

$$\begin{cases}f(n)=\frac{5}{2}(-1)^{n-1}+9(-1)^n2^{n-1}+\frac{15}{2}(-1)^{n-1}3^{n-1} & (n=1,2,\cdots),\\ 0 & (n\leqslant 0).\end{cases}$$

例 24 设 $F(z)=\dfrac{z^2+4}{z^2+2z-3}$,试求 $f(n)$.

解 $$Q_l(z)=z^2+2z-3=(z-1)(z+3),$$

$$P_m(z)=z^2+4,\ l=m.$$

因 $l=m$,先用除法变成整式加真分式,即

$$F(z)=1-\frac{2z-7}{(z-1)(z+3)},$$

再设

$$\frac{2z-7}{(z-1)(z+3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z+3)},$$

用比较系数法定出 $A=-\dfrac{5}{4}$,$B=\dfrac{13}{4}$,从而

$$\begin{aligned}F(z)&=1+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{z+3}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}+\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}+\frac{13}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n3^{n-1}z^{-n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{4}u(n-1)z^{-n}\\
&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{13}{4}(-1)^n3^{n-1}u(n-1)z^{-n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\delta(n)+\frac{5}{4}u(n-1)+\frac{13}{4}(-1)^n3^{n-1}u(n-1)\right]z^{-n},\end{aligned}$$

故

$$f(n) = \delta(n) + \frac{5}{4}u(n-1) + \frac{13}{4}(-1)^n 3^{n-1}u(n-1)$$
$$(n = 0,1,2,\cdots).$$

7.8 Z 变换在求解差分方程中的应用

Z 变换方法在脉冲-数据系统理论、信息论、数字滤波器理论以及离散马尔可夫过程等离散系统性能分析中都有广泛的应用.下面仅就用 Z 变换求解差分方程作些简要介绍.

用 Z 变换求解线性时不变离散系统的差分方程,主要基于 Z 变换的位移性质.因此性质把差分方程转化为代数方程,从而达到简化计算的目的.

例 25 求齐次差分方程

$$y(n+2) + 2y(n+1) + y(n) = 0 \quad (n \geq 0)$$

在初始条件 $y(0) = 1, y(1) = 0$ 下的解.

解 记 $Z[y(n)] = Y(z)$,对差分方程两端取 Z 变换,得

$$[z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)] + 2[zY(z) - zy(0)] + Y(z)] = 0,$$

将初始条件代入,并解出 $Y(z)$,得

$$Y(z) = \frac{z^2+2z}{z^2+2z+1} = \frac{z}{(z+1)^2} + \frac{z}{z+1}.$$

查有关 Z 变换表得上式的逆变换为

$$y(n) = (-1)^n(1-n) \quad (n \geq 0).$$

例 26 求解非齐次差分方程

$$y(n+2) + 2y(n+1) + y(n) = 1,$$

初始条件 $y(0) = 1, y(1) = 0$.

解 对方程两边取 Z 变换,并记 $Z[y(n)] = Y(z)$,且代入初始条件得

$$[z^2Y(z) - z^2] + 2[zY(z) - z] + Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}},$$

解出

$$Y(z) = \frac{1}{(z+1)^2(1-z^{-1})} + \frac{z^2+2z}{(z+1)^2}.$$

对上式两边取 Z 变换,且因

$$Z^{-1}\left[\frac{z^2+2z}{(z+1)^2}\right] = (-1)^n(1-n),$$

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)^2(1-z^{-1})}\right] = Z^{-1}\left[\frac{z}{(z+1)^2(z-1)}\right]$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{2n(-1)^n + (-1)^{n-1}}{4},$$

故

$$f(n)=Z^{-1}[Y(z)]=(-1)^n(1-n)+\frac{1}{4}+\frac{2n(-1)^n+(-1)^{n-1}}{4}$$

$$=\frac{(-1)^n(3-2n)}{4}+\frac{1}{4}\quad(n\geqslant 1).$$

由上式知，$(-1)^n(1-n)$是所给差分方程对应的齐次方程的解，而$\frac{(-1)^n(2n-1)}{4}+\frac{1}{4}$是非齐次方程的一个特解.

参 考 文 献

1 史奈登著.傅里叶变换.何衍璿，张燮译.北京：科学出版社，1958.
2 罗纳德，布拉斯维尔著.傅里叶变换及其应用.杨燕昌等译.北京：人民邮电出版社.1986.
3 罗汝梅.积分变换.见：现代工程数学手册编委会.现代工程数学手册.第Ⅰ卷.武汉：华中工学院出版社，1985.
4 孙仲康编著.快速傅里叶变换及其应用.北京：人民邮电出版社，1982.
5 《数学手册》编写组.数学手册.北京：高等教育出版社，1984.
6 施皮格尔著.拉普拉斯变换原理及其应用.张智星译.台北：晓园出版社，1993.
7 布赖姆著.快速傅里叶变换.柳群译.上海：上海科学技术出版社，1979.
8 熊大国编著.积分变换.北京：北京理工大学出版社.1990.
9 周肇锡编.拉普拉斯变换与傅里叶变换.北京：国防工业出版社，1990.
10 南京工学院数学教研组编.积分变换.北京：高等教育出版社，1978.
11 刘经燕等编.积分变换.武汉：华中理工大学出版社.
12 汤国熙编著.Z 变换的理论与应用.北京：宇航出版社，1988.

傅里叶积分变换表

编号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F(\omega)$
1	$\begin{cases} E, & \lvert t\rvert \leqslant \frac{\tau}{2} \\ 0, & 其他 \end{cases}$	$2E\dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$
2	$u(t)e^{-\beta t} \quad (\beta > 0)$	$\dfrac{1}{\beta + i\omega}$
3	$Ae^{-\beta t^2} \quad (\beta > 0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{\beta}}Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$
4	$\begin{cases} \frac{2A}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}+t\right), & -\frac{\tau}{2} \leqslant t < 0 \\ \frac{2A}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}-t\right), & 0 \leqslant t < \frac{\tau}{2} \end{cases}$	$\dfrac{4A}{\tau\omega^2}\left(1-\cos\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$
5	$\dfrac{\sin\omega_0 t}{\pi t}$	$\begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert \leqslant \omega_0 \\ 0, & \lvert\omega\rvert > \omega_0 \end{cases}$
6	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$
7	$\begin{cases} E\cos(\omega_0 t), & \lvert t\rvert \leqslant \frac{\tau}{2} \\ 0, & 其他 \end{cases}$	$\dfrac{E\tau}{2}\left\{\dfrac{\sin\left[(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}} + \dfrac{\sin\left[(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}\right\}$
8	$\delta(t)$	1
9	$\delta(t-c)$	$e^{-i\omega c}$
10	$\delta'(t)$	$i\omega$
11	$\delta^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n$
12	$\delta^{(n)}(t-c)$	$(i\omega)^n e^{-i\omega c}$
13	$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\dfrac{2\pi}{T}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\dfrac{2\pi n}{T}\right)$
14	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
15	$\sin(\omega_0 t)$	$i\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
16	1	$2\pi\delta(\omega)$
17	t	$2\pi i\delta'(\omega)$
18	t^n	$2\pi i^n\delta^{(n)}(\omega)$
19	e^{iat}	$2\pi\delta(\omega-a)$

续表

编号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F(\omega)$
20	$t^n e^{iat}$	$2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega - a)$
21	$u(t)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
22	$u(t - c)$	$\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega c} + \pi\delta(\omega)$
23	$u(t) \cdot t$	$\pi i\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$
24	$u(t) \cdot t^n$	$\frac{n!}{(i\omega)^{n+1}} + \pi i^n \delta^{(n)}(\omega)$
25	$u(t)\sin(at)$	$\frac{a}{a^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2i}[\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)]$
26	$u(t)\cos(at)$	$\frac{i\omega}{a^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)]$
27	$u(t)e^{iat}$	$\frac{1}{i(\omega - a)} + \pi\delta(\omega - a)$
28	$u(t - c)e^{iat}$	$\frac{1}{i(\omega - a)}e^{-i(\omega - a)c} + \pi\delta(\omega - a)$
29	$u(t)e^{iat}t^n$	$\frac{n!}{[i(\omega - a)]^{n+1}} + \pi i^n \delta^{(n)}(\omega - a)$
30	$e^{a\|t\|}, Re(a) < 0$	$\frac{-2a}{\omega^2 + a^2}$
31	$\frac{1}{a^2 + t^2}, Re(a) < 0$	$-\frac{\pi}{a}e^{a\|\omega\|}$
32	$\frac{t}{(a^2 + t^2)^2}, Re(a) < 0$	$\frac{i\omega\pi}{2a}e^{a\|\omega\|}$
33	$\frac{e^{ibt}}{a^2 + t^2}, Re(a) < 0$, b 为实数	$-\frac{\pi}{a}e^{a\|\omega - b\|}$
34	$\frac{\cos(bt)}{a^2 + t^2}, Re(a) > 0$, b 为实数	$-\frac{\pi}{2a}[e^{a\|\omega - b\|} + e^{a\|\omega + b\|}]$
35	$\frac{\sin(bt)}{a^2 + t^2}, Re(a) > 0$, b 为实数	$-\frac{\pi}{2ai}[e^{a\|\omega - b\|} + e^{a\|\omega + b\|}]$

续表

编号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F(\omega)$
36	$\dfrac{\sinh(at)}{\sinh(\pi t)}$, $-\pi < a < \pi$	$\dfrac{\sin a}{\cosh\omega + \cos a}$
37	$\dfrac{\sinh(at)}{\cosh(\pi t)}$, $-\pi < a < \pi$	$-2\mathrm{i}\dfrac{\sin\frac{a}{2}\sinh\frac{\omega}{2}}{\cosh\omega + \cos a}$
38	$\dfrac{\cosh(at)}{\cosh(\pi t)}$, $-\pi < a < \pi$	$2\cdot\dfrac{\cos\frac{a}{2}\cosh\frac{\omega}{2}}{\cosh\omega + \cos a}$
39	$\dfrac{1}{\cosh(at)}$	$\dfrac{\pi}{a}\dfrac{1}{\cosh\frac{\pi\omega}{2a}}$
40	$\sin(at^2)$, $(a > 0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a} + \dfrac{\pi}{4}\right)$
41	$\cos(at^2)$, $a > 0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a} - \dfrac{\pi}{4}\right)$
42	$\dfrac{1}{t}\sin(at)$, $a > 0$	$\begin{cases}\pi, & \lvert\omega\rvert \leqslant a\\ 0, & \lvert\omega\rvert > a\end{cases}$
43	$\dfrac{1}{t^2}\sin^2(at)$, $a > 0$	$\begin{cases}\pi\left(a - \dfrac{\lvert\omega\rvert}{2}\right), & \lvert\omega\rvert \leqslant 2a\\ 0, & \lvert\omega\rvert > 2a\end{cases}$
44	$\dfrac{\sin(at)}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega + a\rvert}} - \dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega - a\rvert}}\right)$
45	$\dfrac{\cos(at)}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega + a\rvert}} + \dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega - a\rvert}}\right)$
46	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}}$
47	$\mathrm{sgn}\,t$	$\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}$
48	$\lvert t\rvert$	$-\dfrac{2}{\omega^2}$
49	$\dfrac{1}{\lvert t\rvert}$	$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\lvert\omega\rvert}$

拉普拉斯变换表

编号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\delta(t-a),\quad a>0$	e^{-as}
3	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
4	$t^n,\quad n=0,1,2,\cdots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6	$t^n e^{at},\quad n=0,1,2,\cdots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
7	$t^a,\quad a>-1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
8	$t^a e^{at},\quad a>-1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(s-a)^{a+1}}$
9	$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
10	$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
11	$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
12	$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
13	$e^{-at}\cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
14	$e^{-at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
15	$e^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
16	$e^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$

续表

编号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)$
17	$e^{at}[A+(aA+B)t]$	$\dfrac{As+B}{(s-a)^2}$
18	$t\cos(bt)$	$\dfrac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
19	$t\sin(bt)$	$\dfrac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
20	$t\cosh(bt)$	$\dfrac{s^2+b^2}{(s^2-b^2)^2}$
21	$t\sinh(bt)$	$\dfrac{2bs}{(s^2-b^2)^2}$
22	$\dfrac{1}{2}t^2\cos(bt)$	$\dfrac{s(s^2-3b^2)}{(s^2+b^2)^3}$
23	$\dfrac{1}{2}t^2\cosh(bt)$	$\dfrac{s(s^2+3b^2)}{(s^2-b^2)^3}$
24	$\dfrac{1}{6}t^3\cos(bt)$	$\dfrac{s^4-6b^2s^2+b^4}{(s^2+b^2)^4}$
25	$\dfrac{1}{6}t^3\cosh(bt)$	$\dfrac{s^4+6b^2s^2+b^4}{(s^2-b^2)^4}$
26	$\dfrac{\sin(bt)-bt\cos(bt)}{2b^3}$	$\dfrac{1}{(s^2+b^2)^2}$
27	$\cos(bt)-\dfrac{1}{2}bt\sin(bt)$	$\dfrac{s^3}{(s^2+b^2)^2}$
28	$\dfrac{bt\cosh(bt)+\sinh(bt)}{2b}$	$\dfrac{s^2}{(s^2-b^2)^2}$
29	$\cosh(bt)+\dfrac{1}{2}bt-\sinh(bt)$	$\dfrac{s^3}{(s^2-b^2)^2}$
30	$\dfrac{e^{at}+e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$, $a\neq b$
31	$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$, $a\neq b$

续表

编号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)$
32	$\frac{(b-c)e^{at}}{(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{(c-a)e^{bt}+(a-b)e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$, $a \neq b \neq c$
33	$\frac{a(b-c)e^{at}}{(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{b(c-a)e^{bt}+c(a-b)e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$, $a \neq b \neq c$
34	$\frac{a(b-c)e^{at}}{(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{b^2(c-a)e^{bt}+c^2(a-b)e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}$, $a \neq b \neq c$
35	$\frac{e^{at}-[1+(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)^2}$,　$a \neq b$
36	$\frac{ae^{at}-[a+b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)^2}$,　$a \neq b$
37	$\frac{a^2}{(a-b)^2} - \frac{[2ab-b^2+b^2(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)^2}$,　$a \neq b$
38	$\frac{a\sin(bt)-b\sin(at)}{a^2-b^2}$	$\frac{ab}{(s^2+b^2)(s^2+b^2)}$
39	$\frac{\cos(bt)-\cos(at)}{a^2-b^2}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
40	$\frac{a\sin(at)-b\sin(bt)}{a^2-b^2}$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
41	$\frac{1}{3b^2}\left[e^{bt}-e^{-bt/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}bt}{2}+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}bt}{2}\right)\right]$	$\frac{1}{s^3-b^3}$

续表

编号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)$
42	$\frac{1}{3b}\left[e^{-bt}-e^{-bt/2}e^{bt}\left(\cos\frac{\sqrt{3}bt}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}bt}{2}\right)\right]$	$\frac{s}{s^3-b^3}$
43	$\frac{1}{3}\left[e^{bt}+2e^{-bt/2}\cos\frac{\sqrt{3}bt}{2}\right]$	$\frac{s^2}{s^3-b^3}$
44	$\frac{1}{4b^3}[\sinh(bt)\cosh(bt)-\cos(bt)\sinh(bt)]$	$\frac{1}{s^4+4b^4}$
45	$\frac{1}{2b^2}\sin(bt)\sinh(bt)$	$\frac{s}{s^4+4b^4}$
46	$\frac{1}{2b}\sin(bt)\cosh(bt)+\cos(bt)\sinh(bt)$	$\frac{s^2}{s^4+4b^4}$
47	$\cos(bt)\cosh(bt)$	$\frac{s^3}{s^4+6b^4}$
48	$\frac{1}{2b^3}[\sinh(bt)-\sin(bt)]$	$\frac{1}{s^4-b^4}$
49	$\frac{1}{2b^2}[\cosh(bt)-\cos(bt)]$	$\frac{s}{s^4-b^4}$
50	$\frac{1}{2b}[\sinh(bt)+\sin(bt)]$	$\frac{s^2}{s^4-b^4}$
51	$\frac{1}{2}[\cosh(bt)+\cos(bt)]$	$\frac{s^3}{s^4-b^4}$
52	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{s-a}{s-b}$
53	$\frac{2\sinh(bt)}{t}$	$\ln\frac{s+b}{s-b}$
54	$\frac{2[\cos(at)-\cos(bt)]}{t}$	$\ln\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}$
55	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$

续表

编号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)$
56	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$
57	$\frac{4^n n!\,t^{n-\frac{1}{2}}}{(2n)!\sqrt{\pi}}$,　$n=0,1,2,\cdots$	$\frac{1}{s^n\sqrt{s}}$
58	$\frac{e^{bt}}{\sqrt{\pi t}}(1+2bt)$	$\frac{s}{(s-b)^{3/2}}$
59	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{2t\sqrt{\pi t}}$	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$
60	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{2(b-a)t\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}}$
61	$\frac{\cos(2\sqrt{bt})}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-b/s}}{\sqrt{s}}$
62	$\frac{\cosh(2\sqrt{bt})}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{b/s}}{\sqrt{s}}$
63	$\frac{\sin(2\sqrt{bt})}{\sqrt{\pi b}}$	$\frac{e^{-b/s}}{s\sqrt{s}}$
64	$\frac{\sinh(2\sqrt{bt})}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{b/s}}{s\sqrt{s}}$
65	$\frac{\sqrt{b}}{2t\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{b}{4t}\right)$	$\exp(-\sqrt{sb})$,　$b>0$
66	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{b}{4t}\right)$	$\frac{\exp(-\sqrt{sb})}{\sqrt{s}}$,　$b>0$
67	$\frac{\operatorname{erf}(\sqrt{bt})}{\sqrt{b}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s+b}}$
68	$\frac{e^{bt}\operatorname{erf}(\sqrt{bt})}{\sqrt{b}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-b)}$
69	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-be^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{s}+b}$
70	$e^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$

续表

编号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)$
71	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}+be^{b^2t}\mathrm{erf}(b\sqrt{t})$	$\frac{\sqrt{s}}{s-b^2}$
72	$\frac{\cos(b\sqrt{t})}{\pi\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\exp\left(-\frac{b^2}{4s}\right)$
73	$\frac{\sin(b\sqrt{t})}{\pi}$	$\frac{b}{2s\sqrt{\pi s}}\exp\left(-\frac{b^2}{4s}\right)$
74	$\frac{1}{\pi t}\sin(2b\sqrt{t})$	$\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{s}}\right)$
75	$\frac{1}{\pi t}\exp(-2b\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{b^2/s}\mathrm{erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{s}}\right)$
76	$\frac{\sin(bt)}{t}$	$\arctan\frac{b}{s}$
77	$\frac{\sinh\sqrt{2bt}\sin\sqrt{2bt}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\sin\left(\frac{b}{s}\right)$
78	$\frac{\cosh\sqrt{2bt}\cos\sqrt{2bt}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\cos\left(\frac{b}{s}\right)$
79	$\frac{\cosh\sqrt{2bt}\sin\sqrt{2bt}}{\sqrt{\pi b}}$	$\frac{1}{s\sqrt{2s}}\left(\cos\frac{b}{s}+\sin\frac{b}{s}\right)$
80	$\frac{\sinh\sqrt{2bt}\cos\sqrt{2bt}}{\sqrt{\pi b}}$	$\frac{1}{s\sqrt{2s}}\left(\cos\frac{b}{s}-\sin\frac{b}{s}\right)$
81	$\frac{\cosh(2\sqrt{bt})-\cos(2\sqrt{bt})}{2\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\sinh\left(\frac{b}{s}\right)$
82	$\frac{\cosh(2\sqrt{bt})+\cos(2\sqrt{bt})}{2\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\cosh\left(\frac{b}{s}\right)$
83	$\frac{\sinh(2\sqrt{bt})-\sin(2\sqrt{bt})}{2\sqrt{\pi b}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\sinh\left(\frac{b}{s}\right)$
84	$\frac{\sinh(2\sqrt{bt})+\sin(2\sqrt{bt})}{2\sqrt{\pi b}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\cosh\left(\frac{b}{s}\right)$
85	$a^nJ_n(at)$	$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}$, $n>-1$

续表

编号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)$
86	$a^n I_n(at)$	$\dfrac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^n}{\sqrt{s^2-a^2}}$, $n>1$
87	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$	$\dfrac{\exp[b(s-\sqrt{s^2+a^2})]}{\sqrt{s^2+a^2}}$
88	$t^n J_n(at)$	$\dfrac{(2a)^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(s^2+a^2)^{n+1/2}}$, $n>-\dfrac{1}{2}$
89	$L^n(t)$, $n=0,1,2,\cdots$	$\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{s-1}{s}\right)^n$

梅林变换表

编号	像原函数 $f(x)$	像函数 $F_M(s)$
1	e^{-ax}	$a^{-s}\Gamma(s)$, $\mathrm{Re}s>0$
2	$x^{1/2}J_\nu(x)$	$\dfrac{2^{s-1/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)}$
3	e^{-x^2}	$\dfrac{1}{2}\Gamma(\dfrac{s}{2})$
4	$\sin ax$　$a>0$	$\dfrac{1}{a^s}\Gamma(s)\sin(\dfrac{1}{2}s\pi)$
5	$\cos ax$　$a>0$	$\dfrac{1}{a^s}\Gamma(s)\cos(\dfrac{1}{2}s\pi)$
6	$(1+x)^{-1}$	$\pi\csc(\pi s)$
7	$(1+x)^{-a}$, $\mathrm{Re}a>0$	$\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(a)}$

续表

编号	像原函数 $f(x)$	像函数 $F_M(s)$
8	$(1+x^2)^{-1}$	$\frac{\pi}{2}\csc\left(\frac{1}{2}\pi s\right)$
9	$\begin{cases}1, & 0 \leqslant x \leqslant a\\0, & x > a\end{cases}$	$\frac{a^s}{s}$
10	$\begin{cases}(1-x)^{a-1}, & 0 \leqslant x < 1\\0, & x > 1, \mathrm{Re}a > 0\end{cases}$	$\frac{\Gamma(s)\Gamma(a)}{\Gamma(s+a)}$
11	$\begin{cases}0, & 0 \leqslant x < 1\\(x-1)^{-a}, & x > 1, 0 < \mathrm{Re}a < 1\end{cases}$	$\frac{\Gamma(a-s)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-s)}$
12	$\ln(1+x)$	$\frac{\pi}{s}\csc(s\pi)$
13	$\mathrm{ci}(x)$	$s^{-1}\Gamma(s)\cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right)$
14	$\mathrm{si}(x)$	$s^{-1}\Gamma(s)\sin\left(\frac{1}{2}s\pi\right)$

汉克尔变换表

编号	$f(r)$	n	$F_n(\xi)$
1	$\begin{cases}r^n, & 0 < r < a\\0, & r > a\end{cases}$	>-1	$\frac{a^{n+1}}{\xi}J_{n+1}(\xi a)$
2	$\begin{cases}1, & 0 < r < a\\0, & r > a\end{cases}$	0	$\frac{a}{\xi}J_1(a\xi)$
3	$\begin{cases}a^2-r^2, & 0 < r < a\\0, & r > a\end{cases}$	0	$\frac{4a}{\xi^3}J_1(\xi a)-\frac{2a^2}{\xi^2}J_0(\xi a)$
4	$r^n e^{-pr^2}$	>-1	$\frac{\xi}{(2p)^{n+1}}e^{-\frac{\xi^2}{4p}}$
5	$r^{\mu-1}$	>-1	$\frac{2^\mu\Gamma\left(\frac{1+\mu+n}{2}\right)}{\xi^{\mu+1}\Gamma\left(\frac{1-\mu+n}{2}\right)}$

续表

编号	$f(r)$	n	$F_n(\xi)$
6	$\frac{e^{-pr}}{r}$	0	$\frac{1}{\sqrt{\xi^2+p^2}}$
7	e^{-pr}	0	$\frac{p}{\sqrt{(\xi^2+p^2)^3}}$
8	$\frac{e^{-pr}}{r^2}$	1	$\frac{\sqrt{\xi^2+p^2}-p}{\xi}$
9	$\frac{e^{-pr}}{r}$	1	$\frac{1}{\xi}-\frac{p}{\xi\sqrt{\xi^2+p^2}}$
10	e^{-pr}	1	$\frac{\xi}{\sqrt{(\xi^2+p^2)^3}}$
11	$\frac{a}{(a^2+r^2)^{3/2}}$	0	$e^{-a\xi}$
12	$\frac{\sin ar}{r}$	0	$\begin{cases}0, & \xi>a\\ \frac{1}{\sqrt{a^2-\xi^2}}, & 0<\xi<a\end{cases}$
13	$\frac{\sin ar}{r}$	1	$\begin{cases}\frac{a}{\xi\sqrt{\xi^2-a^2}}, & \xi>a\\ 0, & \xi<a\end{cases}$
14	$\frac{\sin r}{r^2}$	0	$\begin{cases}\arcsin\frac{1}{\xi}, & \xi>1\\ \frac{\pi}{2}, & \xi<1\end{cases}$

有限傅里叶正弦变换表

编号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F_s(n)$
1	1	$\frac{a}{\pi n}[1+(-1)^{n+1}]$
2	x	$(-1)^{n+1}\frac{a^2}{n\pi}$
3	$1-\frac{x}{a}$	$\frac{a}{\pi n}$
4	$\begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2} \\ a-x, & \frac{a}{2} \leqslant x \leqslant a \end{cases}$	$\frac{2a^2}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$
5	x^2	$\frac{a^3}{\pi n}(-1)^{n-1}-\frac{2a^3}{\pi^3 n^3}[1-(-1)^n]$
6	x^3	$(-1)^n\frac{a^4}{\pi^3}\left(\frac{6}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)$
7	$x(a^2-x^2)$	$(-1)^{n+1}\frac{6a^4}{n^3\pi^3}$
8	$x(a-x)$	$\frac{2a^3}{\pi^3 n^3}[1-(-1)^n]$
9	e^{kx}	$\frac{n\pi a}{\pi^2 n^2+k^2 a^2}[1-(-1)^n e^{ak}]$
10	$\cos(kx)$	$\frac{n\pi a}{\pi^2 n^2-k^2 a^2}[1-(-1)^n\cos(ak)], n \neq \frac{ka}{\pi}$
11	$\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)$，$m$ 为整数	$\begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{a}{2}, & n = m \end{cases}$

有限傅里叶余弦变换表

编号	像原函数 $f(x)$	像函数 $F_c(n)$
1	1	a，$n=0$ 0，$n=1,2,\cdots$

续表

编号	像原函数 $f(x)$	像函数 $F_c(n)$
2	$\begin{cases}1, & 0<x<\frac{a}{2}\\ -1, & \frac{a}{2}<x<a\end{cases}$	$\begin{cases}0, & n=0\\ \frac{2a}{\pi n}\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right), & n=1,2,\cdots\end{cases}$
3	x	$\begin{cases}\frac{1}{2}a^2, & n=0\\ \left(\frac{a}{\pi n}\right)^2[(-1)^n-1], & n=1,2,\cdots\end{cases}$
4	x^2	$\begin{cases}\frac{1}{3}a^3, & n=0\\ \frac{2a^3}{\pi^2n^2}(-1)^n, & n=1,2,\cdots\end{cases}$
5	$\left(1-\frac{x}{a}\right)$	$\begin{cases}\frac{1}{3}a, & n=0\\ \frac{2a}{\pi^2n^2}, & n=1,2,\cdots\end{cases}$
6	x^3	$\begin{cases}\frac{1}{4}a^4, & n=0\\ \frac{3a^4(-1)^n}{\pi^2n^2}+\frac{6a^4}{\pi^4n^4}[(-1)^n-1], & n=1,2,\cdots\end{cases}$
7	e^{kx}	$\frac{a^2k}{k^2a^2+n^2\pi^2}[(-1)^ne^{ka}-1]$
8	$\sin(kx)$	$\frac{a^2k}{n^2\pi^2-a^2k^2}[(-1)^n\cos(ka)-1], \quad n=\frac{ka}{\pi}$

有限汉克尔变换表

变换式

$$F(s)=\int_0^a xf(x)J_n(sx)dx$$

$$f(x)=\frac{2}{a^2}\sum_s F(s)\frac{J_n(sx)}{[J'_n(as)]^2}$$

式中$\sum_s$是关于方程 $J_n(as)=0$ 的一切正根求和.

编号	$f(x)$	n	$F(s)$
1	x^n	$n>-1$	$\frac{a^{n+1}}{s}J_{n+1}(as)$

续表

编号	$f(x)$	n	$F(s)$
2	c	$n=0$	$\frac{ac}{s}\mathrm{J}_1(as)$
3	a^2-x^2	$n=0$	$\frac{4a}{s}\mathrm{J}_1(as)$
4	$\frac{\mathrm{J}_n(\beta x)}{\mathrm{J}_n(\beta a)}$	$n>-1$	$\frac{as}{\beta^2-s^2}\mathrm{J}'_n(as)$
5	$\frac{\mathrm{J}_0(\beta x)}{\mathrm{J}_0(\beta a)}$	$n=0$	$\frac{as}{\beta^2-s^2}\mathrm{J}_1(as)$

Z 变换表

编号	原序列 f_n	Z 变换 $F(z)$
1	δ_n	1
2	δ_{n-k}	z^{-k}
3	u_n	$\frac{z}{z-1}$
4	u_{n-k}	$\frac{z^{1-k}}{z-1}$
5	$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$
6	$\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}(-1)^n$	$\frac{z^2}{z^2-1}$
7	a^n	$\frac{z}{z-a}$
8	e^{an}	$\frac{z}{z-\mathrm{e}^a}$
9	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
10	n^2	$\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$

续表

编号	原序列 f_n	Z 变换 $F(z)$
11	n^3	$\frac{z^3+4z^2+z}{(z-1)^4}$
12	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
13	n^2a^n	$\frac{az^2+a^2z}{(z-a)^3}$
14	n^3a^n	$\frac{az^3+4a^2z^2+a^3z}{(z-a)^4}$
15	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	$\frac{z^3}{(z-1)^3}$
16	$\frac{(n+1)n}{2}$	$\frac{z^2}{(z-1)^3}$
17	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{z}{(z-1)^3}$
18	$(n+1)^2$	$\frac{z^3+z^2}{(z-1)^3}$
19	$(n-1)^2u_{n-1}$	$\frac{z+1}{(z-1)^3}$
20	n^2+1	$\frac{z^3-z^2+2z}{(z-1)^3}$
21	$\binom{n+k}{k}a^n$	$\left(\frac{z}{z-a}\right)^{k+1}$
22	$\binom{n}{k}a^n$	$\frac{a^kz}{(z-a)^{k+1}}$
23	$\binom{n-1}{k}a^nu_{n-1}$	$\left(\frac{a}{z-a}\right)^{k+1}$
24	$\binom{k}{n}a^nb^{k-n}$	$\frac{(a+bz)^k}{z^k}$
25	u_n-u_{n-k}	$\frac{z^k-1}{z^k-z^{k-1}}$
26	$\frac{a^n+(-a)^n}{2a^2}u_{n-1}$	$\frac{1}{z^2-a^2}$

续表

编号	原序列 f_n	Z 变换 $F(z)$
27	$\frac{a^n-(-a)^n}{2a}$	$\frac{z}{z^2-a^2}$
28	$\frac{a^n+(-a)^n}{2}$	$\frac{z^2}{z^2-a^2}$
29	$-a^{n-2}u_{n-1}\cos n\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{z^2+a^2}$
30	$a^{n-1}\sin n\frac{\pi}{2}$	$\frac{z}{z^2+a^2}$
31	$a^n\cos n\frac{\pi}{2}$	$\frac{z^2}{z^2+a^2}$
32	$(n-1)a^{n-2}u_{n-1}$	$\frac{1}{(z-a)^2}$
33	na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$
34	$(n+1)a^n$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
35	$\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}u_{n-1}$	$\frac{1}{(z-a)(z-b)}$
36	$\frac{a^n-b^n}{a-b}$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$
37	$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$	$\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$
38	$\frac{a^n-1}{a-1}$	$\frac{z}{(z-a)(z-1)}$
39	$\frac{a^n-1}{(a-1)^2}-\frac{n}{a-1}$	$\frac{z}{(z-a)(z-1)^2}$
40	$\frac{a^n-b^n}{(a-b)^2}-\frac{nb^{n-1}}{a-b}$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)^2}$
41	$\frac{na^{n-1}}{a-1}+\frac{1-a^n}{(a-1)^2}$	$\frac{z}{(z-a)^2(z-1)}$
42	$\frac{na^{n-1}}{a-b}+\frac{b^n-a^n}{(a-b)^2}$	$\frac{z}{(z-a)^2(z-b)}$

续表

编号	原序列 f_n	Z 变换 $F(z)$
43	$\frac{1}{a-b}\left(\frac{a^n-1}{a-1}-\frac{b^n-1}{b-1}\right)$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)(z-1)}$
44	$\frac{1}{a-b}\left(\frac{a^n-c^n}{a-c}-\frac{b^n-c^n}{b-c}\right)$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)(z-c)}$
45	$\cos(n\theta)$	$\frac{z(z-\cos\theta)}{z^2-2z\cos\theta+1}$
46	$\sin(n\theta)$	$\frac{z\sin\theta}{z^2-2z\cos\theta+1}$
47	$\sin(n\theta+\phi)$	$\frac{z^2\sin\phi+z\sin(\theta-\phi)}{z^2-2z\cos\theta+1}$
48	$\cos(n\theta+\phi)$	$\frac{z^2\cos\phi-z\cos(\theta-\phi)}{z^2-2z\cos\theta+1}$
49	$a^n\cos(n\theta)$	$\frac{z(z-a\cos\theta)}{z^2-2az\cos\theta+a^2}$
50	$a^n\sin(n\theta)$	$\frac{az\sin\theta}{z^2-2az\cos\theta+a^2}$
51	$\cosh(n\beta)$	$\frac{z(z-\cosh\beta)}{z^2-2z\cosh\beta+1}$
52	$\sinh(n\beta)$	$\frac{z\sinh\beta}{z^2-2z\cosh\beta+1}$
53	$a^n\cosh(n\beta)$	$\frac{z(z-a\cosh\beta)}{z^2-2az\cosh\beta+a^2}$
54	$a^n\sinh(n\beta)$	$\frac{az\sinh\beta}{z^2-2az\cosh\beta+a^2}$
55	$n\sin(n\theta)$	$\frac{(z^3-z)\sin\theta}{(z^2-2z\cos\theta+1)^2}$
56	$n\cos(n\theta)$	$\frac{(z^3+z)\cos\theta-2z^2}{(z^2-2z\cos\theta+1)^2}$
57	$na^n\sin(n\theta)$	$\frac{(az^3-a^3z)\sin\theta}{(z^2-2az\cos\theta+a^2)^2}$
58	$na^n\cos(n\theta)$	$\frac{(az^3+a^3z)\cos\theta-2a^2z^2}{(z^2-2az\cos\theta+a^2)^2}$

续表

编号	原序列 f_n	Z 变换 $F(z)$
59	$\frac{\sin n\theta}{\sin^3\theta}-\frac{n(\cos\theta)\cos n\theta}{\sin^2\theta}-\frac{n\sin\theta}{\sin\theta}$	$\frac{2z}{(z^2-2z\cos\theta+1)^2}$
60	$a^n\left(1+\cos n\pi+2\cos n\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{4z^4}{z^4-a^4}$
61	$a^n\left(1+\cos n\pi-2\cos n\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{4a^2z^2}{z^4-a^4}$
62	$a^n(1+\cos n\pi)\sin n\frac{\pi}{4}$	$\frac{2a^2z^2}{z^4+a^4}$
63	$na^n(1+\cos n\pi)$	$\frac{4a^2z^2}{(z^2-a^2)^2}$
64	$na^n\cos n\frac{\pi}{2}$	$\frac{2a^2z^2}{(z^2+a^2)^2}$
65	$\begin{cases}0, & 当\ n=0\\ \frac{a^n}{n}, & 其他\end{cases}$	$\ln\left(\frac{z}{z-a}\right)$
66	$\begin{cases}0, & 当\ n=0\\ \frac{(-a)^n}{n}, & 其他\end{cases}$	$\ln\left(\frac{z}{z+a}\right)$
67	$\begin{cases}\frac{a^n}{n}, & 当\ n=1,3,5,\cdots\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+a}{z-a}\right)$
68	$\begin{cases}\frac{a^n}{n}, & 当\ n=2,4,6,\cdots\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\ln\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\right)$
69	$\begin{cases}\frac{a^n}{n!}, & 当\ n=1,3,5,\cdots\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\sinh\left(\frac{a}{z}\right)$
70	$\begin{cases}\frac{a^n}{n!}, & 当\ n=0,2,4,\cdots\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\cosh\left(\frac{a}{z}\right)$
71	$\frac{1}{n+1}$	$z\ln\left(\frac{z}{z+1}\right)$
72	$\frac{1}{(n+1)(n+2)}$	$z+(z-z^2)\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$

续表

编号	原序列 f_n	Z 变换 $F(z)$
73	$\frac{n}{(n+1)(n+2)}$	$-2z+(2z^2-z)\ln\frac{z}{z-1}$
74	$\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$	$\frac{3}{2}z-z^2+z(1-z)^2\ln\frac{z}{z-1}$
75	$\frac{1}{2n+1}$	$\sqrt{z}\arctan\sqrt{\frac{1}{z}}$
76	$\frac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$
77	$\frac{(\ln a)^n}{n!}$	$a^{\frac{1}{z}}$
78	$\frac{1}{(2n)!}$	$\cosh\sqrt{\frac{1}{z}}$
79	$\begin{cases}0, & 当\ n=0\\ \frac{1-e^{an}}{n}, & 其他\end{cases}$	$\ln\frac{z-e^a}{z-1}$
80	$\begin{cases}0, & 当\ n=0\\ \frac{\sin n\theta}{n}, & 其他\end{cases}$	$\arctan\frac{\sin\theta}{z-\cos\theta}$
81	$\begin{cases}0, & 当\ n=0\\ \frac{\sin n\pi/2}{n}, & 其他\end{cases}$	$\arctan\frac{1}{z}$
82	$\begin{cases}0, & 当\ n=0\\ \frac{\cos n\theta}{n}, & 其他\end{cases}$	$\ln\frac{z}{(z^2-2z\cos\theta+1)^{1/2}}$
83	$\frac{(2n)!a^n}{(2^n n!)^2}$	$\left(\frac{z}{z-a}\right)^{1/2}$
84	$\frac{(2n)!(-a)^n}{(2^n n!)^2}$	$\left(\frac{z}{z+a}\right)^{1/2}$

·经典数学卷·

第 10 篇

常微分方程

编　者　钱祥征
审校者　王志成

目　录

引　言

微分方程是数学科学联系实际的主要桥梁之一,在体系上属于无穷小分析的一部分.凡采用无穷小分析方法研究物质世界运动状态的数量变化规律的,它的数学模型往往可归结为微分方程.因此,它的求解理论和方法,被广泛地应用于力学、物理学、各种工程技术科学、生物生态科学和经济学等的研究中.

只有一个自变量(在实际问题中常是时间 t)的微分方程称为常微分方程,它就是本篇叙述的对象.按手册内容的统筹安排,本篇主要介绍一些可用分析方法、代数方法求解的微分方程和方程组,除了一阶微分方程外,线性微分方程(组)的解法是重点,此外还介绍一些常微分方程边值问题的基本知识.关于非线性微分方程(组)的一般性讨论和数值方法等一些较近代的知识,将在本《手册》的近代数学卷中介绍.

1　常微分方程基本概念

常微分方程是联系自变量 t、未知函数 x 和它的某些阶导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\cdots,\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}$ 的关系式

$$F\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\cdots,\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}\right)=0. \tag{1-1}$$

1.1　常微分方程的阶

微分方程中出现的最高阶导数的阶数 n,称为该**方程的阶**.例如,

$$x''+x'^3=t^4$$

是二阶常微分方程($x''=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$).

(n 维)一阶常微分方程组是联系自变量 t 和 n 个未知函数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个一阶常微分方程构成的方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1-2}$$

若引进向量记号:

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} f_1(t,\boldsymbol{x}) \\ f_2(t,\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(t,\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(t,x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(t,x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(t,x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{bmatrix},$$

则上述方程组可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}).\tag{1-3}$$

1.2　常微分方程(组)的解

(1) 常微分方程(组)的解　使常微分方程(组)成为恒等式的变量之间的关系式,都是该方程(组)的解.

常微分方程(组)的解式中,若含有个数与其阶(维)数相同的、彼此独立的任意常数,即

$$\boldsymbol{x}=\varphi(t;C_1,C_2,\cdots,C_n)$$

$$(\text{或}\ x_i=\varphi_i(t;C_1,C_2,\cdots,C_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)),$$

则上式称为该方程(组)的**通解**.

相对于通解而言,微分方程的每一个特定的解,称为**特解**.

(2) 定解条件　为确定微分方程的一个特解,人们通常预先给出这个特解所必须满足的条件,这就是所谓的**定解条件**.若定解条件是在自变量 t 的一个值上给出的,则称其为**初始条件**.例如:

对方程(1-1),当 $t=t_0$ 时,

$$x=x_0,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x_0^{(1)},\quad \cdots,\quad \frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}=x_0^{n-1},$$

或对方程组(1-2),当 $t=t_0$ 时,

$$x_1=x_{10},\quad x_2=x_{20},\quad \cdots,\quad x_n=x_{n0}.$$

若定解条件是在自变量 t 的两个或两个以上值上给出的,则称为**边界条件**.

(3) 常微分方程初值问题　求微分方程满足初始条件的解,称为**初值问题**.例如,一阶微分方程的初值问题就是求解方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x), \\ x(t_0)=x_0. \end{cases}$$

(4) 常微分方程的边值问题 求微分方程满足边界条件的解,称为**边值问题**.例如,某个二阶微分方程的边值问题形如求解方程

$$\begin{cases} x'' = t, \\ x(0) - x(1) = 1, \\ x'(0) + x'(1) = 0. \end{cases}$$

1.3 初值问题解的存在和唯一性定理

(1) 一阶微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1-4}$$

定理 1 若 $f(t,x)$满足

1° 在闭区域 **R**:

$$|t - t_0| \leqslant a, \quad |x - x_0| \leqslant b \quad (a > 0, b > 0)$$

上连续;

2° 在 **R** 内对变量 x 满足**利普希茨(Lipschitz)条件**,即存在正数 L,使对 **R** 内任何两点(t, x_1),(t, x_2)都有

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|.$$

则在闭区间$[t_0 - h, t_0 + h]$上,(1-4)式存在唯一的解 $x = \varphi(t)$,其中 $h = \min(a, \dfrac{b}{M})$, $M = \max\limits_{(t,x)\in\mathbf{R}} |f(t,x)|$.

(2) n 维一阶微分方程组(1-2)在引进向量记号后,可写成向量形式(1-3).若再引进向量 $\boldsymbol{x}$ 和$\boldsymbol{f}$ 的**范数**

$$\| \boldsymbol{x} \| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \| \boldsymbol{f} \| = (\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$

分别替代定理 1 中的绝对值 $|x|$, $|f|$.则对 n 维一阶微分方程组(1-2)解的存在唯一性定理的叙述,在形式上与定理 1 没什么大的区别.

(3) n 阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}), \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{1-5}$$

可化为 n 维一阶微分方程组初值问题的特例($x_1 = x$)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t, x_1, \cdots, x_n) \end{bmatrix}, \\ x_1(t_0) = x_0, x_2(t_0) = x_0^{(1)}, \cdots, x_n(t_0) = x_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

2 一阶微分方程

一阶微分方程通常分为显式与隐式两类.

一阶显式微分方程是指形如

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{2-1}$$

或

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0 \tag{2-2}$$

的方程.这类方程中,常见的被称作可积类型的,就是可用初等解法把它的解以有限形式表达出来的那些方程.一般的解法有5种:**直接积分法(分离变量法)、变量代换法、常数变易法、凑全微分法和积分因子法**.其中第一、第五两种方法是基本的,前者代表了沿单变量积分求解的思想,后者是沿全微分这条途径求解的实现.其余3种方法概括了最具代表性的几种求解中间过程,它们最终还得走向第一、第五两种基本途径.

一阶隐式微分方程的一般形式为

$$F(t,x,x') = 0. \tag{2-3}$$

它们中的可积类型除了化为上一类方程(可能是多个)求解外,一般的方法是引入参数的解法,这将在2.1.3小节中叙述.

为了便于查阅,以下列表简述,从方程类型出发,指出最常用的解法(一般都有多种解法),给出通解积分形式.

2.1 可积类型及其通解

2.1.1 基本可积型方程及其通解

基本可积型方程及其通解见表2-1.

表2-1

方程类型	解法要点及通解表达式
类型1 变量已分离方程 $\frac{dx}{dt} = f(t)\varphi(x)$, 或 $f_1(t)g_1(x)dt + f_2(t)g_2(x)dx = 0$	解法:变量单列、直接积分. 两边同乘$\frac{dt}{\varphi(x)}$或$\frac{1}{g_1(x)f_2(t)}$再分别积分,得 $\int\frac{dx}{\varphi(x)} = \int f(t)dt + C$ 或 $\int\frac{f_1(t)}{f_2(t)}dt + \int\frac{g_2(x)}{g_1(x)}dx = C$

续表

方程类型	解法要点及通解表达式
类型2 齐次方程 $$\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{x}{t}\right),$$ 设 $f\left(\frac{x}{t}\right)\neq\frac{x}{t}$,否则它属于类型1. 例如 $t\frac{dx}{dt}+2\sqrt{tx}=x$	解法:变量代换法. 令 $\frac{x}{t}=u$,即 $x=ut$, 则 $\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$,代入原方程,得 $$\frac{du}{dt}=\frac{f(u)-u}{t},$$ 再按类型1求解,得 $$t=Ce^{\int\frac{du}{f(u)-u}},\quad u=\frac{x}{t}$$
类型3 线性方程 非齐次线性方程 $$\frac{dx}{dt}=p(t)x+q(t), \qquad (L)$$ (对应的)齐次线性方程 $$\frac{dx}{dt}=p(t)x. \qquad (L_0)$$ 例如 $t\frac{dx}{dt}-nx=e^t t^{n+1}$.	解法:常数变易法. 先按类型1求出 (L_0) 的通解 $$x=Ce^{\int p(t)dt},$$ 再令 (L) 有形式解 $$x=C(t)e^{\int p(t)dt}$$ (常数 C 变易为 $C(t)$),并代入 (L) 得 $C(t)$ 的微分方程,求出 $$C(t)=\int q(t)e^{-\int p(t)dt}dt+C,$$ 最后得 (L) 的通解公式 $$x=e^{\int p(t)dt}\left[C+\int q(t)e^{-\int p(t)dt}dt\right].$$
类型4 全微分方程 $$M(t,x)dt+N(t,x)dx=0,$$ 其中 M,N 满足 $$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}.$$ 例如 $$(3t^2+6tx^2)dt+(6t^2x+4x^3)dx=0,$$ $$\frac{\partial M}{\partial x}=12tx=\frac{\partial N}{\partial t}.$$	解法:凑全微分法(或用公式). 因这时方程可写成 $$M(t,x)dt+N(t,x)dx\equiv dU(t,x)=0,$$ 故通解为 $$U(t,x)=C,$$ 其中 $$U(t,x)=\int_{t_0}^{t}M(t,x_0)dt+\int_{x_0}^{x}N(t,x)dx,$$ 计算第二个积分时,把 t 作常数对待. 或用凑全微分法直接得 $U(t,x)$.试解左例:方程重新组合,得 $$3t^2dt+4x^3dx+(6tx^2dt+6t^2xdx)=0,$$ 即 $d(t^3)+d(x^4)+d(3t^2x^2)=0$, $$d(t^3+x^4+3t^2x^2)\equiv dU(t,x)=0$$

2.1.2　可化可积型方程及其解法

可化可积型方程及其解法见表 2-2.

表 2-2

方程类型	解法提要
类型5　可化为类型1或2形的方程: 1° $\frac{dx}{dt}=f(at+bx+c)$. 2° $\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)$, 其中　$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$. 3° $xf(tx)dt+tg(tx)dx=0$. 4° $t^2\frac{dx}{dt}=f(tx)$. 5° $\frac{dx}{dt}=tf\left(\frac{x}{t^2}\right)$.	解法:作变量代换化方程为类型1或2形. 1° 令 $y=at+bx+c$,化方程为类型1: $\frac{dy}{dt}=a+bf(y)$. 2° 从 $\begin{cases} a_1t+b_1x+c_1=0, \\ a_2t+b_2x+c_2=0 \end{cases}$ 解出交点 (α,β),作坐标平移 $t=\xi+\alpha$,　$x=\eta+\beta$, 原方程化为类型2: $\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right)=F\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$. 3°、4° 令 $u=tx$、5° 令 $u=\frac{x}{t^2}$,均可化相应的方程为类型1形
类型6　伯努利(Bernoulli)方程 $\frac{dx}{dt}=p(t)x+q(t)x^n$　$(n\neq 0,1)$	解法:作变量代换化为线性方程. 以 x^{-n} 乘方程两边,得 $x^{-n}\frac{dx}{dt}=x^{1-n}p(t)+q(t)$, 令 $y=x^{1-n}$,代入上式得线性方程 $\frac{dy}{dt}=(1-n)p(t)y+(1-n)q(t)$

2.1.3　一阶隐式微分方程的可积类型

一阶隐式微分方程的一般形式是

$$F(t,x,x')=0. \tag{2-4}$$

下列4种类型相对来说有一般解法,共同的思路是:引进适当的参数,使方程化为某种导数已解出型.一阶隐式微分方程的可积类型及解法见表 2-3.

表 2-3

方程类型	引进参数方式及解法提要
类型 7　可将 x 解出的方程 $x=f(t,x')$.	令参数 $p=\frac{dx}{dt}$，方程写为 $x=f(t,p)$， 两边对 t 求导，得 $p=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt}$， 这里导数 $\frac{dp}{dt}$ 已解出. 若能解出 $p=\varphi(t,C)$，则原方程通解为 $x=f(t,\varphi(t,C))$ 若能解出 $t=\psi(p,C)$，则原方程参数形式通解为 $\begin{cases} t=\psi(p,C), \\ x=f(\psi(p,C),p) \end{cases}$
举例 **1° 克莱罗(Clairaut)方程** $x=tx'+f(x')$， 其中 f 是已知可微函数.	1° 按上述方法可化原方程为 $[t+f'(p)]\frac{dp}{dt}=0$， 取 $\frac{dp}{dt}=0$，得 $p=C$，代入原方程，得通解 $x=Ct+f(C)$； 取 $[t+f'(p)]=0$，与原方程联立 $\begin{cases} t+f'(p)=0, \\ x=tp+f(p), \end{cases}$ 消去 p 得奇解(见 2.4 节).
2° 拉格朗日(Lagrange)方程 $x=tf_1(x')+f_2(x')$， 其中 f_1,f_2 是已知可微函数	2° 按上述方法可化原方程为关于 t 的线性方程 $\frac{dt}{dp}=\frac{f_1'(p)}{p-f_1(p)}t+\frac{f_2'(p)}{p-f_1(p)}$， 再按类型 3 求解
类型 8　可将 t 解出的方程 $t=f(x,x')$	令参数 $p=\frac{dx}{dt}$，代入方程后对 t 求导数，并注意到 $x''=\frac{dp}{dx}p$，则可得 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}p-1\right)dx+p\frac{\partial f}{\partial p}dp=0$. 若可求出 $p=\varphi(x,C)$，则原方程通解为 $t=f(x,\varphi(x,C))$ 若求出的是 $x=\psi(p,C)$，则原方程有参数形式通解 $\begin{cases} t=f(\psi(p,C),p), \\ x=\psi(p,C) \end{cases}$

续表

方程类型	引进参数方式及解法提要
类型9 不显含未知函数 x 的方程 $F(t,x')=0$	先引入参数 $p=\frac{dx}{dt}$，再把 $F(t,p)=0$ 看作 $t-p$ 平面上的曲线方程，找出它的参数表达式 $t=\varphi(\tau),p=\psi(\tau)$, 利用关系 $dx=pdt$，就可得原方程参数形式通解 $t=\varphi(\tau)$, $x=\int\psi(\tau)\varphi'(\tau)d\tau+C$
类型10 不显含自变量 t 的方程 $F(x,x')=0$	引入参数 $p=\frac{dx}{dt}$，找到方程 $F(x,p)=0$ 的参数形式 $x=\varphi(\tau),p=\psi(\tau)$, 利用关系 $dt=\frac{dx}{p}$，就可得原方程参数形式通解 $t=\int\frac{\varphi'(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau+C$, $x=\varphi(\tau)$

2.2 里卡蒂方程

形如

$$\frac{dx}{dt}=p(t)x^2+q(t)x+r(t) \tag{2-5}$$

的方程，称为**里卡蒂(Riccati)方程**，在一般情况下，它是不可积的. 1841 年，刘维尔(Liouville)证明了，在一般情况下，它的解不能用初等函数的积分形式表达出来. 人们只能对若干特殊情况或已知(观察出)它的一个以上的特解时，才能求出它的有限形式的通解. 例如：

1° 当 $p(t)\equiv p,q(t)\equiv q,r(t)\equiv r$ 皆为常数时，(2-5)式属变量已分离型，即类型1；

2° 当 $p(t)\equiv 0$ 时，(2-5)式是线性方程(类型3)；

3° 当 $r(t)\equiv 0$ 时，(2-5)式是伯努利方程(类型6)；

4° 当已知方程(2-5)的一个特解 $x_1(t)$ 时，作变换

$$x=x_1(t)+\frac{1}{y},$$

可将(2-5)式化为线性方程

$$\frac{dy}{dt}=-[2p(t)x_1(t)+q(t)]y-p(t); \tag{2-6}$$

5° 当已知方程(2-5)的二个特解 $x_1(t), x_2(t)$ 时，方程(2-6)有特解 $y_1(t)=\frac{1}{x_2(t)-x_1(t)}$，这时原方程(2-5)的通解是

$$x=x_1(t)+\frac{1}{C\varphi(t)+y_1(t)},$$

其中
$$\varphi(t)=\exp\left[-\int(2p(t)x_1(t)+q(t))\mathrm{d}t\right].$$

2.3　积分因子法

积分因子法是对称形一阶方程的一般解法.

当一阶微分方程以(或化为)对称形式出现时，即

$$M(t,x)\mathrm{d}t+N(t,x)\mathrm{d}x=0, \tag{2-7}$$

除了它直接是全微分方程(见 2.1.1 小节中类型 4)外，若存在连续可微函数 $\mu(t,x)\neq 0$，使

$$\mu(t,x)M(t,x)\mathrm{d}t+\mu(t,x)N(t,x)\mathrm{d}x=0 \tag{2-8}$$

成为全微分方程，则称 $\mu(t,x)$ 为方程(2-7)的一个积分因子.

积分因子通常是存在的，但求出它并不总是容易的. 当求出了 $\mu(t,x)$ 时，再按处理可积类型 4 的办法求出(2-8)式的通解，它也是原方程(2-7)的通解.

表 2-4 列出了常见的可求出积分因子的条件及相应得到的积分因子的形式.

表 2-4

(2-7) 式应满足的条件	积分因子 $\mu(t,x)$
$tM+xN=0$	$\frac{1}{tM-xN}$
$tM-xN=0$	$\frac{1}{tM+xN}$
$M(t,x)=xM_1(tx)$ $N(t,x)=tN_1(tx)$ 且 $tM-xN\neq 0$	$\frac{1}{tM-xN}$
$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)=f(t)$	$e^{\int f(t)\mathrm{d}t}$
$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)=\varphi(x)$	$e^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}$
$\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}=Nf(t)-M\varphi(x)$	$e^{\left[\int f(t)\mathrm{d}t+\int\varphi(x)\mathrm{d}x\right]}$

积分因子还有一个性质：若 $\mu(t,x)$ 是(2-7)式的积分因子，它使(2-8)式的左边恒等于 $\mathrm{d}U(t,x)$，则 $\mu(t,x)\Phi(U)$ 是(2-7)式的积分因子通式，其中 $\Phi(z)$ 是 z 的任

何可微函数.

此外也可将方程(2-7)重新“分项组合”,用观察的办法“凑”出积分因子来.

例1　求解$(2tx^2-x)dt+(x^2+t+x)dx=0$.

解　原方程先重新组合成

$$2tx^2dt+x^2dx+xdx+(tdx-xdt)=0.$$

再乘以$\frac{1}{x^2}$(积分因子),得

$$2tdt+dx+\frac{dx}{x}+\frac{tdx-xdt}{x^2}=0,$$

即

$$d[t^2+x+\ln|x|-\frac{t}{x}]\equiv dU(t,x)=0,$$

通解为

$$U(t,x)\equiv t^2+x+\ln|x|-\frac{t}{x}=C.$$

例2　求$(t-x^2)dt+2txdx=0$的积分因子.

解　原方程重新组合成

$$tdt+(-x^2dt+2txdx)=0,$$

上式左边第一部分tdt的积分因子$\mu_1=1$,它的通积分是$\frac{1}{2}t^2=C$,所以它的积分因子通式为$\mu_1\Phi_1(t^2)\equiv\Phi_1(t^2)$;第二部分$(-x^2dt+2txdx)$的积分因子可取为$\mu_2=\frac{1}{tx^2}$,它使

$$\mu_2(-x^2dt+2txdx)=-\frac{dt}{t}+\frac{2dx}{x}=0$$

有通积分$\frac{x^2}{t}=C$,因而有积分因子通式$\frac{1}{tx^2}\cdot\Phi_2\left(\frac{x^2}{t}\right)$.因此,若取$\Phi_1(u)=\frac{1}{u}$,$\Phi_2(v)=v$,就可统一两个通式

$$\mu_1\Phi_1(t^2)=\Phi_1(t^2)=\frac{1}{t^2},$$

$$\mu_2\Phi_2(\frac{x^2}{t})=\frac{1}{tx^2}\cdot\frac{x^2}{t}=\frac{1}{t^2},$$

这说明$\mu(t,x)=\frac{1}{t^2}$是全式两部分的公共积分因子.

2.4　包络与奇解

(1) 曲线族的包络　单参数曲线族$\Phi(t,x,C)=0$的包络是一条曲线,它本身不含在这曲线族中,但过这条曲线上的每一点,都有曲线族中的某条曲线在该点上与它相切.

(2) C-判别曲线法　从下列两个方程

$$\begin{cases}\Phi(t,x,C)=0,\\ \Phi_C'(t,x,C)=0\end{cases}$$

中消去 C，而得到的曲线(可能是多条)称为 **C-判别曲线**，包络含在其中，需要检验哪一条是包络. 由此途径求包络的方法，称为 C-判别曲线法.

(3) 微分方程的奇解　微分方程的某个解，若它对应的曲线上的每个点，在同一个切线方向上至少有两条积分曲线通过，则这个解称为该方程的**奇解**.

(4) 奇解与包络的关系　一阶微分方程通解的包络，如果它存在，则一定是方程的奇解；反之，该方程若有奇解，则一定是它通解的包络.

(5) p-判别曲线法　从下列两个方程

$$\begin{cases}F(t,x,p)=0,\\ F_p'(t,x,p)=0\end{cases}$$

中消去 p 而得到的曲线(可能是多条)，称为 **p-判别曲线**. 方程 $F\left(t,x,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=0$ 的奇解必含在其中，需要检验哪一条是奇解. 由此途径求一阶微分方程奇解的方法，称为 p-判别曲线法.

例 3　设在等速凸轮机构中，滚轮为一族半径为 r 的圆

$$(x-x_p)^2+(y-y_p)^2=r^2, \tag{2-9}$$

滚轮中心曲线采用阿基米德螺线 $\rho=a+b\varphi$. 试求凸轮的平面外形曲线.

解　凸轮的平面外形曲线就是滚轮圆族的内包络线(见图 2-1). 由滚轮中心曲线的参数方程

$$x_p=(a+b\varphi)\cos\varphi,$$
$$y_p=(a+b\varphi)\sin\varphi$$

对 φ 求导数，得

$$x'_p(\varphi)=a\cos\varphi-(a+b\varphi)\sin\varphi,$$
$$y'_p(\varphi)=a\sin\varphi+(a+b\varphi)\cos\varphi.$$

代入圆族(2-9)对 φ 的偏导数式

$[x-x_p(\varphi)]x'_p(\varphi)+[y-y_p(\varphi)]y'_p(\varphi)=0$ 中，再与(2-9)式联立，解得以 φ 为参数的曲线

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi-\dfrac{r(b\sin\varphi+\rho\cos\varphi)}{\sqrt{b^2+\rho^2}},\\ y=\rho\sin\varphi+\dfrac{r(b\cos\varphi-\rho\sin\varphi)}{\sqrt{b^2+\rho^2}},\end{cases}$$

其中 $\rho=a+b\varphi$. 这就是凸轮的平面外形曲线.

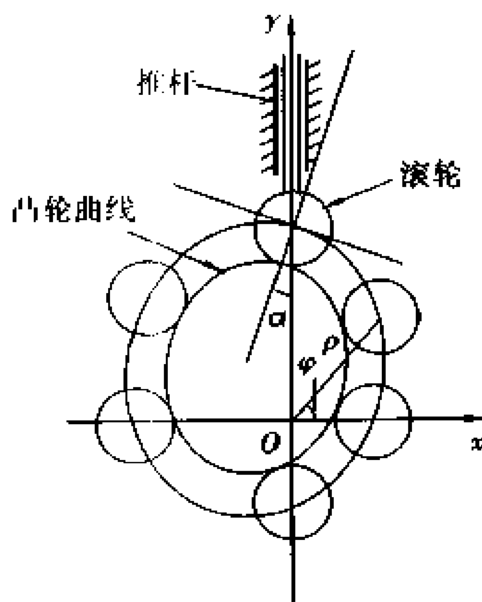


图 2-1

例 4　求解方程 $x=tx'+\dfrac{1}{x'}$，其中 $x'=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

解　这是克莱罗方程，由 2.1.3 节中可积类型 7 的例 1°知，它有通解

$$x = Ct + \frac{1}{C},$$

及由

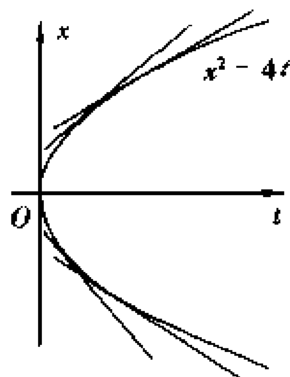


图 2-2

$$\begin{cases} t - \dfrac{1}{p^2} = 0, \\ x = tp + \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

消去 p 而得的特解 $x^2 = 4t$. 前者是一族直线，可直接将方程中 $x' = p$ 换成 C 而得；后者经验算，是方程的奇解，见图 2-2. 这个奇解可由通解的直线族及直线族方程对 C 求偏导数，且两式联立

$$\begin{cases} x = Ct + \dfrac{1}{C}, \\ 0 = t - \dfrac{1}{C^2} \end{cases}$$

消去 C 而得（C-判别曲线法）；也可从引入参数 p 的方程及它对 p 求偏导数后，两式联立

$$\begin{cases} x = tp + \dfrac{1}{p}, \\ 0 = t - \dfrac{1}{p^2} \end{cases}$$

消去 p 得到（p-判别曲线法）.

2.5　一阶微分方程的近似解

许多微分方程求不出精确解的有限形式表达式，但有办法求出它达到一定精确度的近似解，存在唯一性定理的证明过程中，就提供了利用某种函数逼近序列求初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2-10}$$

的近似解的方法.

求解初值问题(2-10)，等价于求积分方程

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x)\,dx$$

的连续解，它可用皮卡（Picard）函数序列

$$x_0(t) = x_0,$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_0)\,dt,$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_1(t))\mathrm{d}t,$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_{n-1}(t))\mathrm{d}t,$$

$$\vdots$$

来逼近.第 n 次近似解 $x_n(t)$ 与精确解之间的误差,有估计式

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1},$$

其中 $M = \max\limits_{(t,x)\in \mathbf{R}} |f(t,x)|$ L 是 $f(t,x)$ 关于 x 的利普希茨条件中的常数.

例 5 设方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t^2 + x^2$ 定义在矩形 $\mathbf{R}$: $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上,试求它经过点(0,0)的近似解,要求它与精确解的误差不超过0.05.

解 对照第1章中解的存在唯一性定理的叙述,知过(0,0)点解的存在区间是 $[-h, h]$, $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$,现在 $\mathbf{R}$ 中的 $a = b = 1$,所以

$$M = \max_{(t,x)\in \mathbf{R}} |f(t,x)| = 2,$$

$$h = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};$$

又因为在 $\mathbf{R}$ 上

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = |2x| \leqslant 2,$$

故利普希茨常数可取为 $L = 2$.以上各数代入误差估计式

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$$= \frac{M}{L}\frac{1}{(n+1)!}(Lh)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!},$$

现要求 $\frac{1}{(n+1)!} < 0.05$,显然可取 $n = 3$.这样,逐个求出0次到3次近似解:

$$x_0(t) = 0,$$

$$x_1(t) = \int_0^t [t^2 + x_0^2(t)]\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3},$$

$$x_2(t) = \int_0^t [t^2 + x_1^2(t)]\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$x_3(t) = \int_0^t [t^2 + x_2^2(t)]\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

这个 $x_3(t)$ 就是方程过点(0,0),在 $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ 上存在的与精确解误差不超过0.05的近似解.

3　高阶线性微分方程

n 阶线性微分方程的一般形式是

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t),\tag{3-1}$$

其中 $a_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$和 $f(t)$都是区间$[a,b]$上的连续函数.当 $f(t)\equiv 0$ 时,称

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0\tag{3-2}$$

为与(3-1)式对应的**齐次线性微分方程**,(3-1)式也称为**非齐次线性微分方程**.

3.1　高阶线性微分方程基本概念与解的结构

3.1.1　基本概念

(1) **解的存在唯一性定理**　如果 $a_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$及 $f(t)$都是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数,则对于任一 $t_0\in[a,b]$及任意的 $x_0,x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$,方程(3-1)存在唯一解 $x=\varphi(t)$,定义于整个区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上,且满足初始条件

$$\varphi(t_0)=x_0,\quad \frac{d\varphi(t_0)}{dt}=x_0^{(1)},\quad \cdots,\quad \frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}}=x_0^{(n-1)}.$$

(2) 函数的线性相关性　定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的函数组 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$,若存在不全为零的常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,使恒等式

$$C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t)\equiv 0$$

对所有的 $t\in[a,b]$都成立,则称这些函数是**线性相关**的;否则,称这些函数在$[a,b]$上**线性无关**.

(3) 朗斯基行列式　在$[a,b]$区间上,n 个 $n-1$ 次可微的函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$作成的行列式

$$W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\equiv W(t)\equiv\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t)\\ x'_1(t) & x'_2(t) & \cdots & x'_n(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}$$

称为这些函数的**朗斯基(Wronsky)行列式**.

朗斯基行列式的性质:

1° 若函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在区间$[a,b]$上线性相关,则在$[a,b]$上它们的朗斯基行列式 $W(t)\equiv 0$.

2° 若函数$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是某齐次线性微分方程(3-2)在$[a,b]$上的$n$个解,则它们的朗斯基行列式 $W(t)\equiv 0$(这 n 个解线性相关),或 $W(t)\neq 0$(这 n 个

解线性无关).

3.1.2 解的结构

(1) 齐次线性微分方程解的结构

1° **叠加原理** 若方程(3-2)有 k 个解 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$,则它们的线性组合

$$C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_kx_k(t)$$

也是(3-2)式的解,这里 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 是任意常数.

2° **通解结构** 若上式中 $k=n$,且这 n 个解是线性无关的,则方程(3-2)的通解可表为

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t),$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是任意常数.通解包括了方程(3-2)的所有解.

3° 基本解组 方程(3-2)的任何一组 n 个线性无关解,称为该方程的一个**基本解组**.

(2) 非齐次线性微分方程的通解结构 非齐次线性微分方程(3-1)的通解,是它的一个特解 $\check{x}(t)$与对应的齐次线性微分方程(3-2)的通解之和,即

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t)+\check{x}(t),$$

其中 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是(3-2)式的任何一个基本解组,$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为任意常数.这个通解包括了方程(3-1)的所有解.

3.2 常系数高阶线性微分方程

当线性微分方程中所有的系数都是常数时,称为常系数线性微分方程.常系数非齐次线性微分方程有一般形式

$$L[x]\equiv\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=f(t), \tag{3-3}$$

齐次线性微分方程为

$$L[x]=0, \tag{3-4}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为实常数.

3.2.1 常系数齐次线性微分方程通解的求法

(1) 特征方程与特征根 n 次代数方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{3-5}$$

称为齐次线性方程(3-4)的**特征方程**,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是(3-4)式中相应的常系数,它的 n 个根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 称为**特征根**.

(2) 常系数齐次线性方程的通解 只要求出(3-4)式的任何 n 个线性无关的解,就可按通解结构定理写出它的通解.这些线性无关的解完全由特征根来决定,这就是所谓特征根法,它们的对应关系见表 3-1.

表3-1

特　征　根	对应的线性无关解
λ_j $(j=1,2,\cdots,n)$是互异实根	$x_j(t)=\exp(\lambda_j t)$ $(j=1,2,\cdots,n)$
若 $\lambda=\alpha+i\beta$ 是特征方程的单根，则 $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ 也是特征方程的单根	$x_1(t)=\exp(\alpha t)\cos\beta t$, $x_2(t)=\exp(\alpha t)\sin\beta t$.
λ 是 r 重实根	$x_1(t)=\exp(\lambda t)$, $x_2(t)=t\exp(\lambda t),\cdots$, $x_r(t)=t^{r-1}\exp(\lambda t)$.
若 $\lambda=\alpha+i\beta$ 是 r 重复根，则 $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ 也是 r 重复根.	$x_1(t)=\exp(\alpha t)\cos\beta t$, $x_2(t)=t\exp(\alpha t)\cos\beta t,\cdots$, $x_r(t)=t^{r-1}\exp(\alpha t)\cos\beta t$; $x_{r+1}(t)=\exp(\alpha t)\sin\beta t$, $x_{r+2}(t)=t\exp(\alpha t)\sin\beta t,\cdots$, $x_{2r}(t)=t^{r-1}\exp(\alpha t)\sin\beta t$

3.2.2　欧拉方程的解法

形如

$$t^n\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1t^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=0 \tag{3-6}$$

的方程称为欧拉(Euler)方程，这里 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数. 此方程引入变换

$$t=\mathrm{e}^\tau$$

可化为常系数齐次线性微分方程，因而有类似的解法：它有 $x=t^k$ 形的解，代入方程(3-6)，约去因子 t^k，得确定 k 的代数方程

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0,$$

1° 若 $k=k_0$ 是它的 m 重实根，则方程(3-6)有 m 个线性无关的解

$$t^{k_0},\quad t^{k_0}\ln|t|,\quad t^{k_0}\ln^2|t|,\cdots,t^{k_0}\ln^{m-1}|t|.$$

2° 若 $k=\alpha+i\beta$ 是它的 l 重复根，则 $\overline{k}=\alpha-i\beta$ 也是它的 l 重复根，它们对应方程(3-6)的 $2l$ 个线性无关的解

$$t^\alpha\cos(\beta\ln|t|),\quad t^\alpha\ln|t|\cos(\beta\ln|t|),\quad\cdots,\quad t^\alpha\ln^{l-1}|t|\cos(\beta\ln|t|),$$
$$t^\alpha\sin(\beta\ln|t|),\quad t^\alpha\ln|t|\sin(\beta\ln|t|),\quad\cdots,\quad t^\alpha\ln^{l-1}|t|\sin(\beta\ln|t|).$$

例1　求解 $t^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+5x=0$.

解　令 $x=t^k$，代入原方程得

$$k(k-1)+3k+5=0,$$

即

$$k^2-2k+5=0.$$

它有根 $k=-1\pm2i$，它们对应两个线性无关的实解

$$t^{-1}\cos(2\ln|t|),\quad t^{-1}\sin(2\ln|t|).$$

故原方程通解为

$$x = t^{-1}[C_1\cos(2\ln|t|) + C_2\sin(2\ln|t|)].$$

3.2.3 常系数非齐次线性微分方程特解的求法

求解非齐次线性微分方程，关键是求出它的一个特解.因为有了它，加上相应的齐次线性微分方程的通解，方程(3-3)的通解也就得到了.方程(3-3)特解的求法有多种，常见的有**待定系数法**、**常数变易法**、**算子解法**和**拉氏变换法**.它们各有特点，分别介绍如下.

(1) 待定系数法　当方程(3-3)右边函数 $f(t)$ 是工程技术问题中常见的特定形式

$$[B(t)\cos\beta t + D(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

时(其中 $B(t)$，$D(t)$ 是实系数多项式，α，β 是实数)，可先按不同情况写出对应的特解 $\tilde{x}(t)$ 的待定表达式，再代入方程(3-3)中，比较同类项，得到待定表达式中各系数的代数方程，求出这些系数，得到了完全确定的特解.可以看出，根据不同情况正确地写出特解 $\tilde{x}(t)$ 的待定表达式是本方法的关键.它与 $f(t)$ 类型的对应关系由表 3-2 给出.

表 3-2

$f(t)$ 的类型	$\tilde{x}(t)$ 的待定表达式
$\beta=0$ 时： $(b_0t^m + b_1t^{m-1} + \cdots + b_{m-1}t + b_m)e^{\alpha t}$	$t^k(B_0t^m + B_1t^{m-1} + \cdots + B_{m-1}t + B_m)e^{\alpha t}$，这里 k 为当 α 是特征根时的重数(α 不是特征根时则 $k=0$).
$[B(t)\cos\beta t + D(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$	$t^k[P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，这里 k 为当 $\alpha+i\beta$ 是特征根时的重数；$P(t)$，$Q(t)$ 均为 m 次实系数待定多项式，m 是多项式 $B(t)$，$D(t)$ 的最高次数.

例 2　求方程 $x''' + x'' = 1 + t^2$ 的通解.

解　特征方程为

$$\lambda^3 + \lambda^2 \equiv \lambda^2(\lambda+1) = 0,$$

所以特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=-1$.对应齐次线性微分方程的线性无关解为 1，t，e^{-t}.故齐次线性微分方程的通解为

$$X(t) = C_1 + C_2t + C_3e^{-t}.$$

为求非齐次线性微分方程的一个特解，注意右边函数

$$f(t) = 1 + t^2 = (1+t^2)e^{0t},$$

这时 $\alpha=0$ 是二重特征根，故特解的待定形式为

$$\tilde{x}(t) = t^2(at^2 + bt + c).$$

代入原方程,经整理得

$$12at^2+(24a+6b)t+6b+2c=1+t^2.$$

比较等式两边 t 的同次幂系数,得

$$12a=1,\quad 24a+6b=0,\quad 6b+2c=1.$$

解得 $$a=\frac{1}{12},\quad b=-\frac{1}{3},\quad c=\frac{3}{2},$$

得特解 $$\tilde{x}(t)=\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2.$$

故原方程通解为

$$x=X(t)+\tilde{x}(t)=C_1+C_2t+C_3\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2.$$

例3 讨论小阻尼的强迫振动

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\omega^2\varphi=H\sin pt,$$

其中 $n^2<\frac{1}{2}\omega^2$,H 是常数.

解 特征方程为

$$\lambda^2+2n\lambda+\omega^2=0,$$

特征根为 $$\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-\omega^2}\equiv-n\pm\omega_1\mathrm{i},$$

故对应的齐次线性微分方程的通解为

$$\Phi=\mathrm{e}^{-nt}(C_1\cos\omega_1t+C_2\sin\omega_1t)\equiv A\mathrm{e}^{-nt}\sin(\omega_1t+\theta),$$

这里 A,θ 为任意常数,分别代表系统的固有振动的振幅和初位相.注意原方程右边函数

$$f(t)=H\sin pt=\mathrm{e}^{0\cdot t}(0\cdot\cos pt+H\sin pt).$$

即 $\alpha+\mathrm{i}\beta=0+\mathrm{i}p$ 不是特征根,所以特解形式为

$$\tilde{\varphi}=M\cos pt+N\sin pt.$$

代入原方程,比较同类项系数,从所得的代数方程中解得

$$M=\frac{-2npH}{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}\equiv H^*\sin\theta^*,$$

$$N=\frac{(\omega^2-p^2)H}{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}\equiv H^*\cos\theta^*,$$

这里

$$H^*=\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}},\quad \theta^*=\arctan\left(\frac{-2np}{\omega^2-p^2}\right).$$

故非齐次线性微分方程特解为

$$\tilde{\varphi}=H^*\sin(pt+\theta^*).$$

原方程通解为

$$\varphi=A\mathrm{e}^{-nt}\sin(\omega_1t+\theta)+\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt+\theta^*).$$

这个解的第一部分是系统的固有振动,它随时间的增加而衰减,直至消失;第二部分是由外力引起的强迫振动,它的振幅不随时间的增加而衰减,而它的圆频率与外力的圆频率一样.经简单的讨论可知,当外力圆频率 $p=\sqrt{\omega^2-2n^2}$ 时,强迫振动的振幅达到最大值

$$H_{\max}^{*}=\frac{H}{2n\sqrt{\omega^2-n^2}}.$$

这时的圆频率 $p=\sqrt{\omega^2-2n^2}$ 称为共振圆频率,所产生的现象也称共振现象.

例 4 求 $x''+x=\sin t\cdot\sin 2t$ 的一个特解.

解 特征方程为 $\lambda^2+1=0$,
特征根是 $\lambda_{1,2}=\pm i$.现右边函数

$$f(t)=\sin t\cdot\sin 2t=\frac{1}{2}(\cos t-\cos 3t).$$

故特解的形式为

$$\tilde{x}(t)=t(a\cos t+b\sin t)+(c\cos 3t+d\sin 3t).$$

代入原方程,比较同类项系数,得

$$-2a=0,\quad 2b=\frac{1}{2},\quad -8c=-\frac{1}{2},\quad -8d=0,$$

求出

$$a=0,\quad b=\frac{1}{4},\quad c=\frac{1}{16},\quad d=0.$$

故求得特解为

$$\tilde{x}(t)=\frac{t}{4}\sin t+\frac{1}{16}\cos 3t.$$

(2) **常数变易法** 设已知对应的齐次线性微分方程(3-4)的通解是

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t),$$

若期望非齐次线性微分方程(3-3)的特解也具有类似形式

$$\tilde{x}(t)=C_1(t)x_1(t)+C_2(t)x_2(t)+\cdots+C_n(t)x_n(t),\tag{3-7}$$

则作方程组

$$\begin{cases}C_1'(t)x_1(t)+C_2'(t)x_2(t)+\cdots+C_n'(t)x_n(t)=0,\\ C_1'(t)x'_1(t)+C_2'(t)x'_2(t)+\cdots+C_n'(t)x'_n(t)=0,\\ \quad\vdots\\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+C_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)=f(t),\end{cases}$$

由于 $C_i'(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 的系数行列式是朗斯基行列式 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\neq 0$,可从上面所作的方程组中唯一解出 $C_i'(t)=\varphi_i(t)$,从而得

$$C_i(t)=\int\varphi_i(t)\mathrm{d}t\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

(这里取任意常数为零),并代入(3-7)式得

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \int \varphi_i(t) \mathrm{d}t ,$$

容易验证它的确是(3-3)式的解.这个方法也适用于求变系数非齐次线性微分方程的特解.

例5 求 $x'' + x = \frac{1}{\cos t}$ 的通解.

解 对应的齐次线性微分方程 $x'' + x = 0$ 的通解是

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

期望所求方程的特解是

$$\tilde{x}(t) = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t. \tag{3-8}$$

对 t 求导数后,令

$$C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = 0, \tag{3-9}$$

得
$$\tilde{x}'(t) = -C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t,$$

再对 t 求导数,得

$$\tilde{x}''(t) = -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t - C_1(t)\cos t - C_2(t)\sin t,$$

将它与(3-8)式一起代入原方程,得

$$-C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \frac{1}{\cos t},$$

这个式子就是上述一般方法中,决定 $C_i'(t)$ 的方程组中最后一个方程的来源.上式与(3-9)式一起构成方程组

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = 0, \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \dfrac{1}{\cos t}, \end{cases}$$

解得

$$C_1'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}, \qquad C_2'(t) = 1,$$

所以取

$$C_1(t) = -\int \frac{\sin t}{\cos t} \mathrm{d}t = \ln|\cos t|, \quad C_2(t) = t.$$

故原方程通解为

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \cdot \ln|\cos t| + t\sin t.$$

例6 求变系数线性微分方程

$$tx'' - x' = t^2$$

于 $t \neq 0$ 区域上的通解.

解 原方程对应的齐次线性微分方程为

$$tx'' - x' = 0,$$

上式可改写成

$$\frac{x''}{x'} = \frac{1}{t},$$

积分得 $$x' = at,$$

再积分得通解 $$x = \frac{1}{2}at^2 + b,$$

或写成 $$x = C_1 + C_2 t^2.$$

为求非齐次线性微分方程的特解,先将原方程写成标准形式

$$x'' - \frac{1}{t}x' = t.$$

利用上述齐次线性微分方程通解写出它的特解形式

$$\tilde{x}(t) = C_1(t) + C_2(t)t^2,$$

再按一般方法写出决定 $C_i'(t)$的方程组

$$\begin{cases} C_1'(t) + C_2'(t)t^2 = 0, \\ 2C_2'(t)t = t, \end{cases}$$

求出 $$C_1(t) = -\frac{1}{6}t^3, \quad C_2(t) = \frac{1}{2}t,$$

从而 $$\tilde{x}(t) = \frac{1}{3}t^3.$$

故原方程通解为

$$x = C_1 + C_2 t^2 + \frac{1}{3}t^3.$$

(3) **算子解法** 这是利用微分算子及其逆算子的性质、运算公式来求常系数线性微分方程解的方法.

对方程(3-3)引进算子记法

$$P(\mathrm{D})x \equiv (\mathrm{D}^n + a_1\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathrm{D} + a_n)x = f(t), \tag{3-10}$$

这里 $\mathrm{D} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$称为**微分算子**,规定

$$\mathrm{D}^k \equiv \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}, \quad \mathrm{D}^k f(t) = \mathrm{D}\mathrm{D}^{k-1}f(t);$$

D^k 的逆算子记为$\frac{1}{\mathrm{D}^k}$,规定它的意义为

$$\frac{1}{\mathrm{D}^k} f(t) = \underbrace{\int\cdots\int}_{k} f(t)(\mathrm{d}t)^k.$$

$P(\mathrm{D})$的逆算子记为$\frac{1}{P(\mathrm{D})}$,它有性质:

1° $P(\mathrm{D})\left[\frac{1}{P(\mathrm{D})}f(t)\right] = \frac{1}{P(\mathrm{D})}[P(\mathrm{D})f(t)] = f(t)$;

2°(线性性质)当 C_1, C_2 为常数时,

$$\frac{1}{P(\mathrm{D})}[C_1f_1(t) + C_2f_2(t)] = C_1\frac{1}{P(\mathrm{D})}f_1(t) + C_2\frac{1}{P(\mathrm{D})}f_2(t);$$

3°(交换律)若 $P(\mathrm{D}) = P_1(\mathrm{D})\cdot P_2(\mathrm{D})$,则

$$\frac{1}{P(\mathrm{D})}f(t)=\frac{1}{P_1(\mathrm{D})}\left[\frac{1}{P_2(\mathrm{D})}f(t)\right]=\frac{1}{P_2(\mathrm{D})}\left[\frac{1}{P_1(\mathrm{D})}f(t)\right].$$

4°（位移定理）当 λ 为常数时，

$$\frac{1}{P(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{\lambda t}f(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\frac{1}{P(\mathrm{D}+\lambda)}f(t);$$

$P(\mathrm{D})$还有下列的常用公式：

5° $$\frac{1}{P(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{\lambda t}=\begin{cases}\dfrac{1}{P(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda t} & (P(\lambda)\neq 0\text{时}),\\ \dfrac{t^k}{P^{(k)}(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda t} & (P(\lambda)=P'(\lambda)=\cdots=P^{(k-1)}(\lambda)=0,\\ & \text{但 } P^{(k)}(\lambda)\neq 0\text{时});\end{cases}$$

6° $$\frac{1}{P(\mathrm{D}^2)}\sin\beta t=\frac{1}{P(-\beta^2)}\sin\beta t\quad(P(-\beta^2)\neq 0);$$

7° $$\frac{1}{P(\mathrm{D}^2)}\cos\beta t=\frac{1}{P(-\beta^2)}\cos\beta t\quad(P(-\beta^2)\neq 0);$$

8° 设 $P(0)=a_n\neq 0$，则

$$\frac{1}{P(\mathrm{D})}(A_0t^k+A_1t^{k-1}+\cdots+A_k)=Q_k(\mathrm{D})(A_0t^k+A_1t^{k-1}+\cdots+A_k),$$

其中 $Q_k(\mathrm{D})\equiv a_0'+a_1'\mathrm{D}+\cdots+a_k'\mathrm{D}^k$ 是用升幂排列的 $P(\mathrm{D})$除以 1 而得的商，取到 D^k 为止的 k 次多项式.

例 7　求 $x'''+3x''+3x'+x=\mathrm{e}^{-t}(t-5)$的特解.

解　将方程写成算子形式

$$P(\mathrm{D})x\equiv(\mathrm{D}^3+3\mathrm{D}^2+3\mathrm{D}+1)x\equiv(\mathrm{D}+1)^3x=\mathrm{e}^{-t}(t-5),$$

则

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t)&=\frac{1}{(\mathrm{D}+1)^3}[\mathrm{e}^{-t}(t-5)]\\&=\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{(\mathrm{D}+1-1)^3}(t-5)\quad(\text{由位移定理得})\\&=\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{\mathrm{D}^3}(t-5)\\&=\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{24}t^4-\frac{5}{6}t^3\right).\end{aligned}$$

例 8　求$\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}+2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=\cos 2t$ 的一个特解.

解　将方程写成算子形式

$$(\mathrm{D}^4+2\mathrm{D}^2+1)x=\cos 2t,$$

则

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t)&=\frac{1}{(\mathrm{D}^2+1)^2}\cos 2t\\&=\frac{1}{(-2^2+1)^2}\cos 2t\quad(\text{由性质 7° 得})\\&=\frac{1}{9}\cos 2t.\end{aligned}$$

例 9　求 $x'''+x'=\mathrm{e}^{-2t}\cos 2t$ 的一个特解.

解 原方程写成

$$(D^3+D)x=e^{-2t}\cos 2t,$$

则

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t)&=\frac{1}{D^3+D}[e^{-2t}\cos 2t]\\&=e^{-2t}\frac{1}{(D-2)^3+(D-2)}\cos 2t \quad \text{（由位移定理得）}\\&=e^{-2t}\frac{1}{D^3-6D^2+13D-10}\cos 2t\\&=e^{-2t}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{D^3-6D^2+13D-10}e^{2it}\right]\\&=e^{-2t}\mathrm{Re}\left[e^{2it}\frac{1}{(2i)^3-6(2i)^2+13\cdot 2i-10}\right] \quad \text{（由性质 5°得）}\\&=\frac{1}{260}(7\cos 2t+9\sin 2t)e^{-2t}.\end{aligned}$$

(4) **拉氏变换法** 由拉普拉斯(Laplace)首创的拉氏变换法是把常系数线性微分方程转换成复变数 s 的代数方程，通过一些代数运算，再利用拉氏变换表，就可求出微分方程的解．该方法十分简便，从而为工程技术工作者普遍采用，特别是对求给定初始条件的特解，它更具优越性．

1) 定义 在实变数 $t\geqslant 0$ 上有意义，t 充分大时满足

$$|f(t)|\leqslant Me^{\sigma t} \qquad (M>0,\sigma\geqslant 0 \text{ 常数})$$

的函数 $f(t)$，作积分

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\mathrm{d}t\ , \tag{3-11}$$

则 $F(s)$在 s（一般为复数）的某一域内存在．(3-11)式建立了 $f(t)$与 $F(s)$间的对应关系，称 $f(t)$为原函数，$F(s)$为像函数．把 $f(t)$映射为 $F(s)$的(3-11)式称为拉普拉斯变换，有时也称 $F(s)$为 $f(t)$的拉氏变换，记为 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$；称 $f(t)$为 $F(s)$的**拉氏逆变换**，记为 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$．

2) 拉氏变换的基本性质

1° 线性性质

$$\mathscr{L}[C_1f_1(t)+C_2f_2(t)]=C_1\mathscr{L}[f_1(t)]+C_2\mathscr{L}[f_2(t)],$$

$$\mathscr{L}^{-1}[C_1F_1(s)+C_2F_2(s)]=C_1\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+C_2\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)];$$

2° 微分性质

$$\mathscr{L}[x^{(n)}(t)]=s^n\mathscr{L}[x(t)]-\sum_{k=1}^{n}x^{(k-1)}(0)s^{n-k},$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathscr{L}[f(t)]=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)];$$

3° 积分性质

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)];$$

4° 位移性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$\mathscr{L}[e^{\alpha t}f(t)]=F(s-\alpha).$$

例 10　求方程 $x'''+3x''+3x'+x=1$ 满足初始条件 $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ 的解.

解　对原方程两边分别取拉氏变换,由拉氏变换的基本性质 1°及 2°(注意这里的初始值都是零),有

$$(s^3+3s^2+3s+1)\mathscr{L}[x(t)]=\frac{1}{s},$$

所以

$$\mathscr{L}[x(t)]=\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3},$$

这里用了有理式的部分分式分解.两边再取拉氏逆变换,得所求解

$$\begin{aligned}x(t)&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3}\right]\\&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right]\\&=1-e^{-t}-te^{-t}-\frac{1}{2}t^2e^{-t}.\end{aligned}$$

例 11　求方程 $x''+2x'+x=e^{-t}$满足初始条件 $x(1)=x'(1)=0$ 的解.

解　注意到在拉氏变换的微分性质 2°的公式中,初始时刻必须是 $t_0=0$,故首先要令 $\tau=t-1$ $(dt=d\tau)$,问题化为

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{d\tau^2}+2\dfrac{dx}{d\tau}+x=e^{-(\tau+1)},\\x(0)=x'(0)=0.\end{cases}$$

上式两边取拉氏变换,得

$$[s^2+2s+1]\mathscr{L}[x(\tau)]=\frac{1}{e}\mathscr{L}[e^{-\tau}]=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{s+1},$$

$$\mathscr{L}[x(\tau)]=\frac{1}{e}\frac{1}{(s+1)^3},$$

所以

$$\begin{aligned}x(\tau)&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{e}\frac{1}{(s+1)^3}\right]=\frac{1}{e}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right]\\&=\frac{1}{2e}\tau^2e^{-\tau}=\frac{1}{2}\tau^2e^{-(\tau+1)},\end{aligned}$$

回到原自变量 t,得所求特解

$$x(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2e^{-t}.$$

3.3　二阶变系数齐次线性方程的幂级数解法

二阶变系数齐次线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a(t)\frac{dx}{dt}+b(t)x=0 \tag{3-12}$$

一般不能找到用初等函数积分表示的解，这时可考虑求具有幂级数形式的解.

(1) 若 $a(t),b(t)$在 $t=t_0$ 可展成$(t-t_0)$的幂级数，收敛区间为$|t-t_0|<r$，则可求方程(3-12)在 $t=t_0$ 附近的解. 设

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t-t_0)^k,$$

从形式上算出所需的各阶导数，代入原方程中成恒等式，从比较同次幂系数得的代数方程确定待定的系数 a_k，从而得所求的幂级数解，它的收敛区间也是$|t-t_0|<r$.

(2) 当 $a(t),b(t)$ 是 t 的有理分式，分母在 $t=t_0$ 时等于零，而$(t-t_0)a(t)$ 及$(t-t_0)^2b(t)$ 却能展为$(t-t_0)$的幂级数，收敛区间为$|t-t_0|<r$，则方程(3-12)具有形如

$$x(t)=(t-t_0)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t-t_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t-t_0)^{\alpha+k}$$

的广义幂级数解，收敛区间也是$|t-t_0|<r$. 其中 α 和 a_k 都是待定常数，并按以上同样方式来确定.

二阶变系数齐次线性方程的幂级数解法对高于二阶的变系数线性方程也适用.

例 12 求方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}-2t\dfrac{dx}{dt}-4x=0$满足初始条件 $x(0)=0,x'(0)=1$ 的解.

解 这里 $t_0=0$，初始条件 $x(0)=0,x'(0)=1$ 分别对应 $a_0=0,a_1=1$. 所以可设解的幂级数形式为

$$x=t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots.$$

求出所需导数

$$x'=1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots+na_nt^{n-1}+\cdots,$$

$$x''=2a_2+3\cdot2a_3t+\cdots+n(n-1)a_nt^{n-2}+\cdots.$$

将它们代入原方程，合并 t 的各同次幂项，令各项系数等于零，得到

$$\begin{aligned}&2a_2=0,\\&3\cdot2a_3-2-4=0,\\&4\cdot3a_4-4a_2-4a_2=0,\\&\quad\vdots\\&n(n-1)a_n-2(n-2)a_{n-2}-4a_{n-2}=0,\\&\quad\vdots\end{aligned}$$

从中求出

$$a_2=0,\quad a_3=1,\quad a_4=0,\quad\cdots,\quad a_n=\frac{2}{n-1}a_{n-2},\quad\cdots$$

因而
$$a_{2k}=0,\quad a_{2k+1}=\frac{1}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

故得满足初始条件的特解

$$
\begin{aligned}
x &= t + t^3 + \frac{t^5}{2!} + \cdots + \frac{t^{2k+1}}{k!} + \cdots \\
&= t\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \cdots + \frac{t^{2k}}{k!} + \cdots\right) \\
&= t e^{t^2}.
\end{aligned}
$$

3.3.1　勒让德方程的解

形如

$$(1 - t^2)x'' - 2tx' + n(n+1)x = 0 \tag{3-13}$$

的方程称为**勒让德(Legendre)方程**.

在 $t=0$ 附近($|t|<1$),方程的系数可以展成幂级数. 令解的幂级数形式为

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

代入原方程,按上述方式可定出两个线性无关解

$$x_1(t) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}t^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}t^4 + \cdots,$$

$$x_2(t) = t - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}t^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}t^5 - \cdots.$$

(3-13)式的通解是

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t).$$

当在方程(3-13)中,参数 n 为任何一个确定的正整数时,两个解 $x_1(t)$,$x_2(t)$ 中必有一个是 n 次多项式,另一个仍为无穷级数. 对该确定的 n,适当地选取多项式的那个 $x_i(t)$ 前的任意常数 C_i(i 是 1 或 2),可使该多项式在 $t=1$ 时的值为 1,这个解用符号 $\mathrm{P}_n(t)$ 记之,称为**勒让德多项式**,也称为**第一类勒让德函数**. 另一个与 $\mathrm{P}_n(t)$ 线性无关的解记作 $\mathrm{Q}_n(t)$,它是 $|t|<1$ 时收敛的无穷级数,称为**第二类勒让德函数**. 这时方程(3-13)的通解是

$$x(t) = A\mathrm{P}_n(t) + B\mathrm{Q}_n(t),$$

其中 A,B 是任意常数.

例如

方程中 n 取值	0	1	2	3	4
对应多项式	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t)$
适当选 C_i	$C_1=1$	$C_2=1$	$C_1=-\frac{1}{2}$	$C_2=-\frac{3}{2}$	$C_1=\frac{3}{8}$
$\mathrm{P}_n(t)$	1	t	$\frac{1}{2}(3t^2-1)$	$\frac{1}{2}(5t^3-3t)$	$\frac{1}{8}(35t^4-30t^2+3)$

一般地有

$$\mathrm{P}_n(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

其中
$$N=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & (\text{当 } n \text{ 为偶数时}),\\ \dfrac{n-1}{2} & (\text{当 } n \text{ 为奇数时}).\end{cases}$$

3.3.2 贝塞尔方程的解

形如
$$t^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+(t^2-n^2)x=0 \tag{3-14}$$
的方程,称为 **n 阶贝塞尔(Bessel)方程**,其中 n 为任意实数.对应于(3-12)式,这时
$$a(t)=\frac{1}{t},\quad b(t)=1-\frac{n^2}{t^2}$$
是 t 的有理分式,在 $t=0$ 处不能展成幂级数,但 $ta(t)=1,t^2b(t)=t^2-n^2$ 在 $t=0$ 处能展成幂级数.因此,有
$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^{\alpha+k}$$
形式的解(这里可设 $a_0\neq0$).代入原方程,令 t 的各次幂系数等于零,得一系列代数方程
$$a_0[\alpha^2-n^2]=0,$$
$$a_1[(\alpha+1)^2-n^2]=0,$$
$$a_k[(\alpha+k)^2-n^2]+a_{k-2}=0\quad(k=2,3,\cdots).$$
从第一个方程解得 $\alpha=n$ 和 $\alpha=-n$(不妨认为 $n\geqslant0$).

首先将 $\alpha=n$ 代入上面代数方程组中的其余的方程,求得
$$a_1=a_3=\cdots=a_{2k+1}=\cdots=0,$$
$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}k!\ (n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\quad(k=1,2,\cdots).$$
作为(3-14)式的一个特解,不妨取
$$a_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)},$$
其中 $\Gamma(s)$ 是 Γ 函数.这些均代入形式幂级数中,得(3-14)式的一个特解
$$x_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)\cdots(n+1)\Gamma(n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}=\mathrm{J}_n(t).$$
这是由贝塞尔方程(3-14)定义的特殊函数,称为 **n 阶贝塞尔函数**.

再求 $\alpha=-n$ 时形如
$$x=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,t^{-n+k}$$
的解.当 $\alpha\neq$ 负整数时,像以上 $\alpha=n$ 求解过程一样,若取

$$a_0 = \frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)},$$

可得到(3-14)式的另一个线性无关的特解

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-n} = \mathrm{J}_{-n}(t),$$

并称为 $-n$ 阶贝塞尔函数,它与 $\mathrm{J}_n(t)$ 都称**第一类贝塞尔函数**.这时贝塞尔方程的通解为

$$x(t) = C_1\mathrm{J}_n(t) + C_2\mathrm{J}_{-n}(t)$$

当 α = 负整数时,可以证明

$$\mathrm{N}_n(t) = \lim_{\alpha\to n}\frac{\mathrm{J}_\alpha(t)\cos\alpha\pi - \mathrm{J}_{-\alpha}(t)}{\sin\alpha\pi}$$

也是方程(3-14)的一个解,且与 $\mathrm{J}_n(t)$ 线性无关.这时方程(3-14)的通解为

$$x(t) = C_1\mathrm{J}_n(t) + C_2\mathrm{N}_n(t).$$

$\mathrm{N}_n(t)$ 称为 n 阶**第二类贝塞尔函数**.

4 线性微分方程组

线性微分方程组的一般形式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{4-1}$$

其中已知函数 $a_{ij}(t)$ 和 $f_i(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 均在某区间 $[a,b]$ 上连续.若至少有一个 $f_i(t)$ 不恒等于零,则称(4-1)为**非齐次线性方程组**,如果所有的 $f_i(t)$ 都恒等于零,即

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n, \end{cases} \tag{4-2}$$

则称(4-2)式为(4-1)式对应的**齐次线性方程组**.

引进向量和矩阵记号:

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\equiv\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\\vdots\\f_n(t)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)&\cdots&a_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}(t)&a_{n2}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

则上述方程组分别写成

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\tag{4-3}$$

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}.\tag{4-4}$$

4.1 基本概念与解的结构

4.1.1 基本概念

(1) 向量函数的朗斯基行列式 n 个向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 的朗斯基行列式,是指它们的分量构成的 $n\times n$ 行列式

$$W[\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]\equiv W(t)=\begin{vmatrix}x_{11}(t)&x_{12}(t)&\cdots&x_{1n}(t)\\x_{21}(t)&x_{22}(t)&\cdots&x_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{n1}(t)&x_{n2}(t)&\cdots&x_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

(2) 向量函数的线性相关性 若存在不全为零的常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,使在$[a,b]$上恒有

$$C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+C_n\boldsymbol{x}_n(t)\equiv 0,$$

则称向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 在$[a,b]$上是线性相关的;否则,称 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是线性无关的.

若向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 在$[a,b]$上是线性相关的,则它们的朗斯基行列式 $W(t)\equiv 0\quad(t\in[a,b])$.

4.1.2 解的结构

(1) 齐次线性方程组解的性质

1° 叠加原理 若 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_k(t)$ 是(4-4)式的 k 个解,则它们的线性组合

$$C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+C_k\boldsymbol{x}_k(t)$$

也是(4-4)式的解.

2° 若(4-4)式的 n 个解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关,则它们的朗斯基行列式 $W(t)\neq 0\quad(t\in[a,b])$.

3° 基本解矩阵的存在性 齐次线性方程组(4-4)一定存在 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$,以每个解向量为列构成**基本解矩阵**

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

(4-4)式的一个解矩阵 $\boldsymbol{X}(t)$ 是基本解矩阵的充分必要条件是行列式

$$\det\boldsymbol{X}(t)\neq 0 \quad (t\in[a,b]).$$

4° 通解结构 若 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(4-4)式的一个基本解矩阵,则它的任何一个解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均可表为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{C}=(C_1,C_2,\cdots,C_n)^{\mathrm{T}}$ 是某个常向量.

(2) 非齐次线性方程组解的性质

1° 若 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是齐次线性方程组(4-4)的解,$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是非齐次线性方程组(4-3)的解,则 $\boldsymbol{\varphi}(t)+\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 也是(4-3)式的解.

若 $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(t),\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_2(t)$ 是非齐次线性方程组(4-3)的两个解,则 $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(t)-\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_2(t)$ 是对应的齐次线性方程组(4-4)的解.

2° 通解结构 若 $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是非齐次线性方程组(4-3)的一个解,$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是对应的齐次线性方程组(4-4)的基本解矩阵,则(4-3)式的任何解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均可表为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}+\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t),$$

其中 $\boldsymbol{C}=(C_1,C_2,\cdots,C_n)^{\mathrm{T}}$ 是任意常向量.

4.2 常系数齐次线性微分方程组通解的求法

常系数齐次线性微分方程组的一般标准形式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{4-5}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$均为常数.或以向量、矩阵形式表示为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{4-6}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵,元素为 a_{ij}.

常系数齐次线性微分方程组的通解的求法,常见的有4种:**待定系数法**、**消元**

法、拉氏变换法和直接计算基本解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$. 分别叙述如下.

4.2.1 待定系数法

待定系数法是解常系数齐次线性方程组的常用方法,理论简明,便于记忆,但运算有时较繁. 具体步骤是

写出特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}|=0$, 求出特征根, 设它互不相等的特征根是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$, 重数分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_k(n_1+n_2+\cdots+n_k=n)$.

(1) 若 λ_i 是其中 n_i 重实特征根, 则方程组(4-6)有形如

$$\left(\begin{bmatrix} C_1^{(0)} \\ C_2^{(0)} \\ \vdots \\ C_n^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \\ \vdots \\ C_n^{(1)} \end{bmatrix} t + \cdots + \begin{bmatrix} C_1^{(n_i-1)} \\ C_2^{(n_i-1)} \\ \vdots \\ C_n^{(n_i-1)} \end{bmatrix} t^{n_i-1}\right) e^{\lambda_i t} \equiv \boldsymbol{P}_{n_i-1}(t) e^{\lambda_i t}$$

的解. 将它代入方程组(4-6), 比较 t 的同次幂系数, 得诸 $C_s^{(r)}$ 的代数方程组, 解之可得 n_i 个线性无关解.

(2) 若 $\lambda_j=\alpha+i\beta$ 是其中 n_j 重复特征根, 则其共轭数 $\bar{\lambda}_j=\alpha-i\beta$ 也必然是 n_j 重复特征根($\boldsymbol{A}$ 是实矩阵). 这时方程组(4-6)有形如

$$(\boldsymbol{P}_{n_j-1}(t)\cos\beta t+\boldsymbol{Q}_{n_j-1}(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$$

的实解, 同理可决定 $2n_j$ 个线性无关的解.

对一切 $\lambda_l(l=1,2,\cdots,k)$, 按以上方法共得到 n 个线性无关的解, 以每个解为列向量, 构成(4-6)式的基本解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$, 通解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$.

4.2.2 消元法

消元法的思想来自解代数方程组的消元法. 有时运算较简便, 适用性较广, 还能解非标准形式的常系数线性微分方程组. 具体步骤是

(1) 引进微分算子记号 $\mathrm{D}\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 把微分方程组形式上化成代数方程组.

(2) 应用克莱默(Cramer)法则消元, 得到只含一个变元的方程——高阶常系数齐次线性微分方程, 求出若干个这种方程的通解.

(3) 把上述通解再代入原方程组中适当的方程, 求出余下变元的解.

以二维方程组为例:

$$\begin{cases} \dot{x}=a_{11}x+a_{12}y, \\ \dot{y}=a_{21}x+a_{22}y. \end{cases}$$

引进 $\mathrm{D}\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 后原方程组写成

$$\begin{cases} (\mathrm{D}-a_{11})x-a_{12}y=0, \\ -a_{21}x+(\mathrm{D}-a_{22})y=0. \end{cases} \tag{4-7}$$

记

$$\Delta(\mathrm{D})\equiv\begin{vmatrix}\mathrm{D}-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \mathrm{D}-a_{22}\end{vmatrix},$$

则解 $x(t),y(t)$显然满足二阶常系数齐次线性微分方程

$$\begin{cases}\Delta(\mathrm{D})x=0,\\ \Delta(\mathrm{D})y=0.\end{cases}\tag{4-8}$$

由(4-8)式中的第一个方程求出 $x(t)$的通解,代入方程组(4-7)中的第一个方程再求得 $y(t)$;或从(4-8)式中的第二个方程求出 $y(t)$的通解,代入方程组(4-7)中的第二个方程再求得 $x(t)$;或分别从(4-8)式两个方程中求得 $x(t),y(t)$的通解,代入方程组(4-7)中调整任意常数的关系,均可得到原方程组的通解.

4.2.3 拉氏变换法

本小节的拉氏变换法与3.2.3小节中的拉氏变换法思路一样.在应用原函数的微分公式时,把初值以任意常向量代替,则可得通解.在例子中还可看到,用拉氏变换法解方程组的初值问题,其优越性更为突出.

4.2.4 直接计算基本解矩阵 $\exp\boldsymbol{A}t$

常系数齐次线性方程组(4-6)的通解有表达式

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}=(\exp\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{C},$$

其中

$$\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^m}{m!}+\cdots$$

因此,关键是如何具体计算出 $\exp\boldsymbol{A}t$.方法很多,这里提供一种简便算法:

$$\exp\boldsymbol{A}t=\sum_{j=0}^{n-1}r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j,$$

其中 $r_1(t),r_2(t),\cdots,r_n(t)$ 是初值问题

$$\begin{cases}r_1'=\lambda_1r_1,r_1(0)=1,\\ r_j'=r_{j-1}+\lambda_jr_j,r_j(0)=0\quad(j=2,3,\cdots,n)\end{cases}$$

的解,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(不必相异);

$$\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{I},\boldsymbol{P}_j=\prod_{k=1}^{j}(\boldsymbol{A}-\lambda_k\boldsymbol{I})\quad(j=1,2,\cdots,n-1).$$

4.2.5 例子

例1 求$\begin{bmatrix}x_1'\\ x_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$的通解.

解法一(待定系数法)

特征方程为

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}\equiv\lambda^2-2\lambda+1\equiv(\lambda-1)^2=0,$$

有特征根 $\lambda_1=\lambda_2=1$.作形式解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{bmatrix} e^t,$$

代入方程组,得

$$\begin{bmatrix} b_1 + a_1 + b_1 t \\ b_2 + a_2 + b_2 t \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} -a_1 + 2a_2 + (-b_1 + 2b_2)t \\ -2a_1 + 3a_2 + (-2b_1 + 3b_2)t \end{bmatrix} e^t.$$

比较上式两边 t 的同次幂系数,得

$$b_1 + a_1 = -a_1 + 2a_2, \quad b_1 = -b_1 + 2b_2.$$
$$b_2 + a_2 = -2a_1 + 3a_2, \quad b_2 = -2b_1 + 3b_2,$$

可解得 $b_1 = b_2, a_1 = a_2 - \frac{1}{2} b_2$.把 a_2, b_2 选作任意常数,记为 $a_2 = C_1, b_2 = C_2$,则有

$$b_1 = C_2, \qquad a_1 = C_1 - \frac{1}{2} C_2.$$

代入形式解中,得方程组通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} e^t.$$

解法二(消元法)

把方程组写成

$$\begin{cases} (D+1)x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + (D-3)x_2 = 0. \end{cases}$$

记

$$\Delta(D) \equiv \begin{vmatrix} D+1 & -2 \\ 2 & D-3 \end{vmatrix} \equiv (D-1)^2,$$

解二阶方程

$$\Delta(D)x_1 \equiv (D-1)^2 x_1 \equiv x_1'' - 2x_1' + x_1 = 0,$$

知有二重特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,故它有通解

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 t e^t,$$

代入方程组中第一个方程,得

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1' + x_1) = \left[C_1 + C_2\left(t + \frac{1}{2}\right) \right] e^t.$$

即原方程组有通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} t \\ t + \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^t$$

$$= C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} e^t.$$

解法三(拉氏变换法)

对方程组取拉氏变换得

$$\begin{bmatrix} s\mathscr{L}[x_1]-x_1^0 \\ s\mathscr{L}[x_2]-x_2^0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathscr{L}[x_1] \\ \mathscr{L}[x_2] \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 2 & s-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathscr{L}[x_1] \\ \mathscr{L}[x_2] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}.$$

计算出

$$\Delta(s)\equiv\begin{vmatrix} s+1 & -2 \\ 2 & s-3 \end{vmatrix}=s^2-2s+1=(s-1)^2,$$

$$\Delta_1(s)\equiv\begin{vmatrix} x_1^0 & -2 \\ x_2^0 & s-3 \end{vmatrix}=x_1^0s+2x_2^0-3x_1^0,$$

$$\Delta_2(s)\equiv\begin{vmatrix} s+1 & x_1^0 \\ 2 & x_2^0 \end{vmatrix}=x_2^0s+x_2^0-2x_1^0,$$

所以

$$\mathscr{L}[x_1]=\frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}=\frac{x_1^0s+2x_2^0-3x_1^0}{(s-1)^2}$$

$$=x_1^0\left[\frac{1}{s-1}-\frac{2}{(s-1)^2}\right]+\frac{2x_2^0}{(s-1)^2},$$

$$\mathscr{L}[x_2]=\frac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)}=\frac{x_2^0s+x_2^0-2x_1^0}{(s-1)^2}$$

$$=x_2^0\left[\frac{1}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2}\right]-\frac{2x_1^0}{(s-1)^2},$$

再反查拉氏变换表，得通解

$$\begin{cases} x_1=x_1^0e^t+2(x_2^0-x_1^0)te^t, \\ x_2=x_2^0e^t+2(x_2^0-x_1^0)te^t. \end{cases}$$

若取 $2(x_2^0-x_1^0)=C_1, x_2^0=C_2$，也得同样形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^t+C_1\begin{bmatrix} t-\frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix}e^t.$$

解法四(直接计算基本解矩阵 $\exp At$)

写出
$$\exp At=\exp\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}t=r_1(t)P_0+r_2(t)P_1.$$

已知 $\lambda_1=\lambda_2=1, r_1(t), r_2(t)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} r_1'=r_1, r_1(0)=1, \\ r_2'=r_1+r_2, r_2(0)=0. \end{cases}$$

解得
$$r_1(t)=e^t, r_2(t)=te^t.$$

又
$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}-\lambda_1\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

故基本解矩阵为

$$\exp At = e^t I + te^t \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t & 2t \\ -2t & 1+2t \end{bmatrix} e^t.$$

原方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1-2t & 2t \\ -2t & 1+2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$= C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + 2(C_2 - C_1) \begin{bmatrix} t - \dfrac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} e^t.$$

例 2 求 $x' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x$ 的通解.

解 用待定系数法.特征方程为

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0,$$

特征根为 $\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i$.它们对应实值形式解为

$$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{-2t} \cos t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} e^{-2t} \sin t.$$

代入方程组,得

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} (-2\cos t - \sin t) e^{-2t} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} (-2\sin t + \cos t) e^{-2t}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \sin t \right) e^{-2t},$$

消去 e^{-2t},比较两边 $\cos t, \sin t$ 的系数,得

$$-2a_1 + b_1 = -a_1 - a_2, \quad -a_1 - 2b_1 = -b_1 - b_2,$$

$$-2a_2 + b_2 = 2a_1 - 3a_2, \quad -a_2 - 2b_2 = 2b_1 - 3b_2.$$

把 a_1, b_1 当作任意常数,可解得

$$a_2 = a_1 - b_1, \quad b_2 = a_1 + b_1.$$

故通解为

$$x = e^{-2t} \left(a_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{bmatrix} \right).$$

例 3 求非标准型的常系数线性微分方程组

$$\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \end{cases}$$

满足 $x(0) = x'(0) = 1, y(0) = y'(0) = 0$ 的解.

解 取拉氏变换,得

$$\begin{bmatrix} 2s^2 - s + 9 & -s^2 - s - 3 \\ 2s^2 + s + 7 & -s^2 + s - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathscr{L}[x] \\ \mathscr{L}[y] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x(0)s + 2x'(0) - x(0) - y(0)s - y'(0) - y(0) \\ 2x(0)s + 2x'(0) + x(0) - y(0)s - y'(0) + y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s + 1 \\ 2s + 3 \end{bmatrix}.$$

计算出

$$\Delta(s)\equiv\begin{vmatrix}2s^2-s+9 & -s^2-s-3\\ 2s^2+s+7 & -s^2+s-5\end{vmatrix}=6(s-1)(s^2+4),$$

$$\Delta_1(s)\equiv\begin{vmatrix}2s+1 & -s^2-s-3\\ 2s+3 & -s^2+s-5\end{vmatrix}=6s^2+4,$$

$$\Delta_2(s)\equiv\begin{vmatrix}2s^2-s+9 & 2s+1\\ 2s^2+s+7 & 2s+3\end{vmatrix}=20.$$

因此有

$$\mathscr{L}[x]=\frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}=\frac{6s^2+4}{6(s-1)(s^2+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-1}+\frac{2s+2}{s^2+4}\right),$$

$$\mathscr{L}[y]=\frac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)}=\frac{20}{6(s-1)(s^2+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{s-1}-\frac{2s+2}{s^2+4}\right),$$

反查拉氏变换表，就得初值问题的解

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}(e^t+2\cos2t+\sin2t),\\ y=\dfrac{1}{3}(2e^t-2\cos2t-\sin2t).\end{cases}$$

4.3 常系数非齐次线性微分方程组特解的求法

常系数非齐次线性微分方程组的一般标准形式为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+f_1(t),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+f_2(t),\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+f_n(t),\end{cases}\tag{4-9}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 均为常数，$f_i(t)$ 为某区间 $[a,b]$ 上的连续函数．或以向量、矩阵形式表示为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\tag{4-10}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵，元素为 a_{ij}．方程组(4-5)或(4-6)称为它对应的齐次线性微分方程组．

由 4.1.2 小节中非齐次线性方程组解的性质(2)知，只要已知它对应的齐次线性方程组(4-6)的基本解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，则只需求得(4-10)式自己的一个特解 $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$，通解立即可得

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}+\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t).$$

下面介绍特解 $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 的 4 种求法：待定系数法、常数变易法、算子解法、拉氏变

换法.

4.3.1 待定系数法

待定系数法与3.2.3节中介绍的求高阶非齐次线性微分方程特解时所用的待定系数法,在思路与步骤上完全一致,关键是首先要正确写出待定解的形式.请注意这里用的形式与高阶非齐次线性微分方程中所用的略有区别.

(1) 若 $\boldsymbol{f}(t)=(P_1(t),P_2(t),\cdots,P_n(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\alpha t}$,
其中 $P_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$是 t 的多项式,则(4-10)的特解有待定形式

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=(Q_1(t),Q_2(t),\cdots,Q_n(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\alpha t},$$

其中 $Q_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$为 t 的待定多项式,它们次数都是 $m+l$ 次.这里 m 是 $P_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$中最高的次数,l 是当 α 为特征根时的重数,α 不是特征根时 $l=0$.

注意与 n 阶非齐次线性方程解法中的区别:这里不是令

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=t^l(Q_1(t),Q_2(t),\cdots,Q_n(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\alpha t}\quad(Q_i(t)\text{最高次为 }m).$$

(2) 若 $\boldsymbol{f}(t)=(P_1(t)\cos\beta t+\tilde{P}_1(t)\sin\beta t,\cdots,P_n(t)\cos\beta t+\tilde{P}_n(t)\sin\beta t)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\alpha t}$,其中 $P_i(t),\tilde{P}_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$均是 t 的多项式,则特解有待定形式

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=(Q_1(t)\cos\beta t+\tilde{Q}_1(t)\sin\beta t,\cdots,Q_n(t)\cos\beta t+\tilde{Q}_n(t)\sin\beta t)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\alpha t},$$

其中 $Q_i(t),\tilde{Q}_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$均为 $m+l$ 次实系数多项式.这里 m 是 $P_i(t)$及 $\tilde{P}_i(t)$中最高的次数,l 是当 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是特征根时的重数,$\alpha+\mathrm{i}\beta$ 不是特征根时 $l=0$.

例4 求$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}$的通解.

解 特征方程为

$$(\lambda-5)(\lambda+1)=0,$$

特征根为 $\lambda_1=5,\lambda_2=-1$.

先求对应齐次线性方程组的基本解矩阵.由于特征根均为单实根,故线性无关解有形式

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\mathrm{e}^{5t}\\b_1\mathrm{e}^{5t}\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2\mathrm{e}^{-t}\\b_2\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}.$$

分别代入齐次线性方程组,比较同类项,得

$$4a_1=2b_1,\qquad b_2=-a_2.$$

取 $a_1=1$,则 $b_1=2$,对应一个解

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{5t}\\2\mathrm{e}^{5t}\end{bmatrix};$$

取 $a_2=1$,则 $b_2=-1$,对应另一个解

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\-\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}.$$

它们显然是线性无关的，故齐次线性方程组的基本解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{bmatrix}.$$

再求非齐次线性方程组的一个特解. 因 $\alpha=-1$ 是单重特征根，又右边函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 中的 $(P_1(t),P_2(t))=(-1,4)$ 均是零次多项式，所以特解的待定形式为

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1t+d_1 \\ C_2t+d_2 \end{bmatrix}e^{-t}.$$

代入原方程组，约去公因子 e^{-t}，比较 t 同次幂系数，得

$$C_1=-2,\quad C_2=2,\quad d_1+d_2=-\frac{1}{2}.$$

取 $d_1=0$，则 $d_2=-\frac{1}{2}$，对应一个特解

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2t \\ 2t-\frac{1}{2} \end{bmatrix}e^{-t}.$$

故原方程组通解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2t \\ 2t-\frac{1}{2} \end{bmatrix}e^{-t}.$$

例5 求 $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{-4t}$ 的一个特解.

解 特征方程为

$$(\lambda+4)^2=0,$$

有 $\lambda_1=\lambda_2=-4$. 而 $\boldsymbol{f}(t)=(-1,2)^{\mathrm{T}}e^{-4t}$ 中的 $\alpha=-4$ 是二重特征根，多项式 $P_i(t)$ 是零次，故设特解为

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1t^2+b_1t+c_1 \\ a_2t^2+b_2t+c_2 \end{bmatrix}e^{-4t}.$$

代入方程，消去 e^{-4t}，比较 t 同次幂系数，得

$$a_1=-\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{2},\quad b_1+b_2=1,\quad b_1+c_1+c_2=-1.$$

取 $b_1=0, c_1=0$，得 $b_2=1, c_2=-1, a_1=-\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{2}$，对应一个特解

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2}+t-1 \end{bmatrix}e^{-4t}.$$

例6 求 $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 4t \end{bmatrix}$ 的一个特解.

解　特征方程为 $\lambda^2-4=0$，其特征根为 $\lambda_1=2\mathrm{i},\lambda_2=-2\mathrm{i}$.

先求
$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos 2t \tag{4-11}$$
的特解.

因 $\boldsymbol{f}(t)$ 中的 $\alpha+\mathrm{i}\beta=0+2\mathrm{i}$ 恰是单重特征根，故特解形式为
$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (a_1t+b_1)\cos 2t+(a_2t+b_2)\sin 2t \\ (a_1't+b_1')\cos 2t+(a_2't+b_2')\sin 2t) \end{bmatrix},$$
代入方程(4-11)，比较同类项系数，得关于 $a_i,b_i,a_i',b_i'(i=1,2)$ 的代数方程，解得
$$a_1=\frac{1}{2},\quad b_1=\frac{1}{4},\quad a_2=0,\quad b_2=\frac{1}{4}.$$
$$a_1'=0,\quad b_1'=0(\text{取作 }0),\quad a_2'=-1,\quad b_2'=-\frac{1}{2}.$$
故方程(4-11)的特解为
$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right)\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t \\ -(t+\frac{1}{2})\sin 2t \end{bmatrix}.$$
再求
$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\sin 4t \tag{4-12}$$
的特解.

这时 $\boldsymbol{f}(t)$ 中 $\alpha+\mathrm{i}\beta=0+4\mathrm{i}$ 不是特征根，设特解形式为
$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1\cos 4t+C_2\sin 4t \\ C_1'\cos 4t+C_2'\sin 4t \end{bmatrix},$$
代入方程(4-12)，按以上同样步骤求得(4-12)式的特解为
$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{12}\sin 4t \\ -\frac{1}{3}\cos 4t \end{bmatrix}.$$
最后得原方程的一个特解
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{12}\sin 4t \\ -\left(t+\frac{1}{2}\right)\sin 2t-\frac{1}{3}\cos 4t \end{bmatrix}.$$

4.3.2　常数变易法

常数变易法是在已知相应的齐次线性方程组的基本解矩阵时，求非齐次线性方程组的解的一种普遍可用的方法，此方法也适用于变系数线性方程组. 导出解的常数变易公式的基本思想，同于一阶非齐次线性方程所采用的同名方法. 方程组(4-10)满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解的公式是

$$\varphi(t)=\exp[(t-t_0)A]\eta+\int_{t_0}^{t}\exp[(t-s)A]f(s)\mathrm{d}s, \tag{4-13}$$

其中 $\exp At$ 是对应的齐次线性方程组(4-6)的基本解矩阵.这个公式在理论研究中也非常有用.

例7 求 $x'=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}$ 满足初始条件 $\varphi(0)=(0,1)^{T}$ 的解.

解 记对应的齐次线性方程组的基本解矩阵为

$$\exp\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}t=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix},$$

代入公式(4-13),这里 $t_0=0$,得

$$\varphi(t)=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+$$

$$\int_0^t e^{3(t-s)}\begin{bmatrix}\cos 5(t-s) & \sin 5(t-s)\\ -\sin 5(t-s) & \cos 5(t-s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-s}\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{d}s,$$

利用公式或分部积分法,最后得所求特解为

$$\varphi(t)=\frac{1}{41}e^{3t}\begin{bmatrix}4\cos 5t+46\sin 5t-4e^{-4t}\\ 46\cos 5t-4\sin 5t-5e^{-4t}\end{bmatrix}.$$

4.3.3 算子解法

当(4-9)式的右边函数 $f_i(t)$ 具有与待定系数法中指出的同样的形式时,采用算子法求(4-9)式的一个特解,在多数情况下是十分简便的.方法的基本思想与所用的逆算子运算表同于3.2.3节.

例8 求例7中方程组的任意一个特解.

解 引进算子记号 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,将方程组写成

$$\begin{cases}Dx_1=3x_1+5x_2+e^{-t},\\ Dx_2=-5x_1+3x_2,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(D-3)x_1-5x_2=e^{-t},\\ 5x_1+(D-3)x_2=0.\end{cases} \tag{4-14}$$

用克莱默法则从形式上解出 x_1,再进行算子的正运算与逆运算,得

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{1}{\begin{vmatrix}D-3 & -5\\ 5 & D-3\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}e^{-t} & -5\\ 0 & D-3\end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{D^2-6D+34}(D-3)e^{-t}\\ &=\frac{1}{D^2-6D+34}(-4e^{-t})\\ &=-4\cdot\frac{1}{(-1)^2-6(-1)+34}e^{-t}\quad \text{(用3.2.3节中(3)公式5°)}\end{aligned}$$

$$= -\frac{4}{41}e^{-t},$$

将它代入(4-14)式中的第一个方程①,得

$$x_2 = \frac{1}{5}(Dx_1 - 3x_1 - e^{-t}) = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{41} + \frac{12}{41} - 1\right)e^{-t} = -\frac{5}{41}e^{-t}.$$

因此

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{4}{41}e^{-t}, \\ x_2 = -\dfrac{5}{41}e^{-t}, \end{cases}$$

就是方程组的一个特解.

例9 求$\begin{cases} x' - y' + x = -t, \\ x'' - y' + 3x - y = e^{2t} \end{cases}$的一个特解.

解 将方程组写成

$$\begin{cases} (D+1)x - Dy = -t, \\ (D^2+3)x - (D+1)y = e^{2t}. \end{cases}$$

解出

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} D+1 & -D \\ D^2+3 & -(D+1) \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} -t & -D \\ e^{2t} & -(D+1) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D^3 - D^2 + D - 1}[(D+1)t + De^{2t}]$$

$$= \frac{1}{-1 + D - D^2 + D^3}\cdot(1+t) + \frac{1}{D^3 - D^2 + D - 1}2e^{2t}$$

$$= -(1+D)(1+t) + \frac{1}{2^3 - 2^2 + 2 - 1}2e^{2t}$$

$$= -2 - t + \frac{2}{5}e^{2t}$$ (用3.2.3节中(3)中公式8°及5°).

$$y = \frac{1}{\begin{vmatrix} D+1 & -D \\ D^2+3 & -(D+1) \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} D+1 & -t \\ D^2+3 & e^{2t} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D^3 - D^2 + D - 1}(3e^{2t} + 3t)$$

$$= \frac{3e^{2t}}{2^3 - 2^2 + 2 - 1} - (1+D)3t$$

$$= \frac{3}{5}e^{2t} - 3 - 3t.$$

---

① 这样做可避免逆算子运算的不唯一性可能造成的误差.例如对$\begin{cases} Dx - y = 0, \\ -x + Dy = e^t + e^{-t} \end{cases}$,单纯用克莱默法则求解 $x(t), y(t)$时,所得的结果就不满足方程组.

即

$$\begin{cases} x=\frac{2}{5}e^{2t}-t-2, \\ y=\frac{3}{5}e^{2t}-3t-3. \end{cases}$$

代人方程验算,所得确是方程组的一个特解.

4.3.4 拉氏变换法

拉氏变换法的思想与步骤基本同上一节(见4.2.3小节),只在求解过程中多用了一次克莱默法则.

例10 用拉氏变换法再解例7.

解 把方程组写成分量表达形式

$$\begin{cases} x_1'=3x_1+5x_2+e^{-t}, \\ x_2'=-5x_1+3x_2, \end{cases} \quad x_1(0)=0, x_2(0)=1.$$

令 $X_1(s)\equiv\mathscr{L}[x_1(t)], X_2(s)\equiv\mathscr{L}[x_2(t)]$,对方程组取拉氏变换,得

$$\begin{cases} sX_1(s)=3X_1(s)+5X_2(s)+\frac{1}{s+1}, \\ sX_2(s)-1=-5X_1(s)+3X_2(s), \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} (s-3)X_1(s)-5X_2(s)=\frac{1}{s+1}, \\ 5X_1(s)+(s-3)X_2(s)=1. \end{cases}$$

用克莱默法则解得

$$X_1(s)=\frac{1}{\begin{vmatrix} s-3 & -5 \\ 5 & s-3 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & -5 \\ 1 & s-3 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{41}\left[4\frac{s-3}{(s-3)^2+5^2}+46\frac{5}{(s-3)^2+5^2}-4\frac{1}{s+1}\right],$$
$$X_2(s)=\frac{1}{\begin{vmatrix} s-3 & -5 \\ 5 & s-3 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} s-3 & \frac{1}{s+1} \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{41}\left[46\frac{s-3}{(s-3)^2+5^2}-4\frac{5}{(s-3)^2+5^2}-5\frac{1}{s+1}\right],$$

反查拉氏变换表,得满足所给初始条件的解

$$\begin{cases} x_1(t)=\frac{1}{41}e^{3t}(4\cos5t+46\sin5t-4e^{-4t}), \\ x_2(t)=\frac{1}{41}e^{3t}(46\cos5t-4\sin5t-5e^{-4t}). \end{cases}$$

例 11 求$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, \\ x_2' = -x_1 + 4x_2, \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 1 \end{cases}$ 的解，并求出它的基本解矩阵.

解 为能同时解决提出的两项要求，先对一般的初始条件 $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$ 求解. 对方程组取拉氏变换，得

$$\begin{cases} sX_1(s) - \eta_1 = 2X_1(s) + X_2(s), \\ sX_2(s) - \eta_2 = -X_1(s) + 4X_2(s), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s-2)X_1(s) - X_2(s) = \eta_1, \\ X_1(s) + (s-4)X_2(s) = \eta_2, \end{cases}$$

解得

$$X_1(s) = \frac{(s-4)\eta_1 + \eta_2}{(s-3)^2}, \quad X_2(s) = \frac{(s-2)\eta_2 - \eta_1}{(s-3)^2}.$$

本例题要求的初值问题是 $\boldsymbol{\eta} = (0,1)^{\mathrm{T}}$，故对应

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{(s-3)^2}, \\ X_2(s) = \dfrac{s-2}{(s-3)^2} = \dfrac{1}{s-3} + \dfrac{1}{(s-3)^2}, \end{cases}$$

查拉氏变换表，得相应特解

$$\begin{cases} x_1(t) = \mathscr{L}^{-1}[X_1(s)] = te^{3t}, \\ x_2(t) = \mathscr{L}^{-1}[X_2(s)] = (1+t)e^{3t}. \end{cases}$$

为求出方程组的基本解矩阵，再求 $\boldsymbol{\eta} = (1,0)^{\mathrm{T}}$ 所决定的线性无关解，即将它代入 $X_i(s)(i=1,2)$ 表达式，有

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{s-4}{(s-3)^2} = \dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{(s-3)^2}, \\ X_2(s) = \dfrac{-1}{(s-3)^2}, \end{cases}$$

查表，得特解

$$\begin{cases} x_1(t) = (1-t)e^{3t}, \\ x_2(t) = -te^{3t}. \end{cases}$$

故方程组的基本解矩阵是

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix} e^{3t}.$$

5 非线性高阶微分方程和微分方程组的可积类型

非线性高阶微分方程的一般形式是

$$F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0, \tag{5-1}$$

其中 F 对某些 $x^{(k)}(k \in \{0,1,2,\cdots,n\})$ 是非线性的；规范形的非线性微分方程组，

是指

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=f_1(t,x_1,\cdots,x_n),\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=f_2(t,x_1,\cdots,x_n),\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=f_n(t,x_1,\cdots,x_n),\end{cases}\tag{5-2}$$

其中有的 f_i 对某些 $x_j(i,j\in\{1,2,\cdots,n\})$ 是非线性的.

对(5-1)式和(5-2)式没有一般的求解方法,但在某些特殊情况下,可以借助"引入新变量"、"引入参数"或寻求"首次积分"等办法,逐步降低方程(组)的阶(维)数,从而有可能求得它们的通解.

5.1 非线性高阶微分方程的几种可积类型

5.1.1 特殊情形的求解

对方程(5-1)的下列诸特殊情形:

$$F(t,x^{(n)})=0,$$
$$F(x^{(n-1)},x^{(n)})=0,$$
$$F(x^{(n-2)},x^{(n)})=0,$$
$$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0,$$
$$F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0,$$

均可借引入新变量或引入参数,达到求解或降阶的目的.

(1) $F(t,x^{(n)})=0$

分两种情形:

1° 若可解出 $x^{(n)}=f(t)$,则通过 n 次积分得通解

$$x=\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}f(s)\mathrm{d}s+\frac{C_1}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}(t-t_0)^{n-2}+\cdots+C_n.$$

2° 若不便解出 $x^{(n)}$ 时,有时可把方程写成参数形式

$$t=\varphi(\tau),\quad x^{(n)}=\psi(\tau),$$

并满足 $F(\varphi(\tau),\psi(\tau))\equiv0$. 这时由

$$\mathrm{d}x^{(n-1)}=x^{(n)}\mathrm{d}t=\psi(\tau)\varphi'(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

得

$$x^{(n-1)}=\int\psi(\tau)\varphi'(\tau)\mathrm{d}\tau+C_1\equiv\xi_1(\tau,C_1).$$

如此继续下去,最后可得参数形式的通解

$$\begin{cases}t=\varphi(\tau),\\ x=\xi_n(\tau,C_1,C_2,\cdots,C_n).\end{cases}$$

(2) $F(x^{(n-1)},x^{(n)})=0$

分两种情形:

1° 若可解出 $x^{(n)}=f(x^{(n-1)})$,则令 $z=x^{(n-1)}$,得

$$\frac{dz}{dt}=f(z),$$

这是变量已分离方程,设解得

$$z=\omega(t,C_1),$$

即

$$x^{(n-1)}=\omega(t,C_1),$$

化成了上述 $F(t,x^{(n)})=0$ 类型的第一种情形.

2° 若不便解出 $x^{(n)}$,则设法把方程写成参数形式

$$x^{(n-1)}=\varphi(\tau),\quad x^{(n)}=\psi(\tau),$$

有 $F(\varphi(\tau),\psi(\tau))\equiv 0$. 这时由

$$dx^{(n-1)}=x^{(n)}dt \quad 或 \quad \varphi'(\tau)d\tau=\psi(\tau)dt,$$

得

$$t=\int\frac{\varphi'(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau+C_1\equiv\xi_1(\tau,C_1),\quad x^{(n-1)}=\varphi(\tau),$$

这就是上述 $F(t,x^{(n)})=0$ 类型的第二种情形.

(3) $F(x^{(n-2)},x^{(n)})=0$

设方程可解出 $x^{(n)}$,即

$$x^{(n)}=f(x^{(n-2)}),$$

令 $z=x^{(n-2)}$,方程两边再乘以 $2dz=2z'dt$,化成

$$d(z'^2)=2f(z)dz,$$

积分后有

$$z'=\sqrt{2\int f(z)dz+C_1},$$

再用分离变量法求得

$$x^{(n-2)}=z=\omega(t,C_1,C_2),$$

再积分 $n-2$ 次,就得原方程通解.

(4) $F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0$

令新变量 $z=x^{(k)}$,把它降为 $n-k$ 阶方程

$$F(t,z,z',\cdots,z^{(n-k)})=0$$

后再求解.

(5) $F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0$

这类方程的特点是不显含自变量 t. 解法是,令 $x'=z$,且将 x 当作新自变量,方程可降低一阶.

$$x'=z,$$

$$x''=\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}=z\frac{dz}{dx},$$

$$x'''=\frac{d}{dt}\left(z\frac{dz}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(z\frac{dz}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dt}=z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+z^2\frac{d^2z}{dx^2}\equiv g_3\left(z,\frac{dz}{dx},\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

$$\vdots$$

将以上各式代入方程，得 z 对 x 的 $n-1$ 阶方程

$$F_1\left(x,z,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}z}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)=0.$$

例 1　求 $\mathrm{e}^{x''}+x''=t$ 的通解.

解　此方程无法解出 x''. 引入参数 s，令

$$x''=s,$$

则

$$t=\mathrm{e}^s+s.$$

由

$$\mathrm{d}x'=x''\mathrm{d}t=s(\mathrm{e}^s+1)\mathrm{d}s,$$

得

$$x'=\int s(\mathrm{e}^s+1)\mathrm{d}s=(s-1)\mathrm{e}^s+\frac{1}{2}s^2+C_1,$$

注意 $x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，所以

$$\mathrm{d}x=\left[(s-1)\mathrm{e}^s+\frac{1}{2}s^2+C_1\right]\mathrm{d}t=\left[(s-1)\mathrm{e}^s+\frac{1}{2}s^2+C_1\right][\mathrm{e}^s+1]\mathrm{d}s,$$

故得以参数 s 表达的通解

$$\begin{cases}t=\mathrm{e}^s+s,\\ x=\left(\frac{s}{2}-\frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{2s}+\left(\frac{s^2}{2}-1+C_1\right)\mathrm{e}^s+\frac{s^3}{6}+C_1s+C_2.\end{cases}$$

例 2　求 $ax''=(1+x'^2)^{3/2}$ 的通解.

解　引入参数求解. 令 $x'=s$，由方程得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=x''=\frac{1}{a}(1+s^2)^{3/2},$$

或

$$\mathrm{d}t=a(1+s^2)^{-3/2}\mathrm{d}s,$$

积分得

$$t=\frac{as}{\sqrt{1+s^2}}+C_1.$$

又由

$$\mathrm{d}x=x'\mathrm{d}t=\frac{as\mathrm{d}s}{(1+s^2)^{3/2}},$$

积分得

$$x=\frac{-a}{\sqrt{1+s^2}}+C_2.$$

故得通解的参数表达式

$$\begin{cases}t=\dfrac{as}{\sqrt{1+s^2}}+C_1,\\ x=-\dfrac{a}{\sqrt{1+s^2}}+C_2.\end{cases}$$

若消去 s，可得

$$(t-C_1)^2+(x-C_2)^2=a^2.$$

例 3　求解

$$x''-tx'''+x'''^3=0.$$

解　方程不显含 x，最低阶导数为 x''. 令 $x''=z$，代入方程得

$$z = tz' - z'^3,$$

这是克莱罗方程.它有通解

$$z = C_1 t - C_1^3,$$

再对 C_1 求导,得

$$0 = t - 3C_1^2,$$

从

$$\begin{cases} z = C_1 t - C_1^3, \\ 0 = t - 3C_1^2 \end{cases}$$

消去 C_1,又得奇解

$$z = \pm \frac{t^{3/2}}{\sqrt{3}} \mp \left(\frac{t}{3} \right)^{3/2}.$$

注意 $z = x''$,上面两个式子分别积分二次,得原方程的通解

$$x = \frac{C_1}{6} t^3 - \frac{C_1^3}{2} t^2 + C_2 t + C_3,$$

及特解

$$x = \pm \frac{4}{35\sqrt{3}} t^{7/2} \mp \frac{36}{35} \left(\frac{t}{3} \right)^{7/2} + C_1' t + C_2'.$$

例 4 求解 $xx'' - (x')^2 + (x')^3 = 0$.

解 此方程不显含自变量 t.令 $x' = z$,则

$$x'' = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} = z \frac{dz}{dx},$$

代入方程得

$$xz \frac{dz}{dx} - z^2 + z^3 = 0,$$

$$z \left(x \frac{dz}{dx} - z + z^2 \right) = 0.$$

由 $z = 0$ 得解 $x = C$;由 $x \frac{dz}{dx} - z + z^2 = 0$,对应有

$$\frac{dz}{z(1-z)} = \frac{dx}{x},$$

积分得

$$\frac{z}{1-z} = C_1 x,$$

即

$$\frac{dx}{dt} = z = \frac{C_1 x}{1 + C_1 x},$$

再积分得

$$x + C_1' \ln|x| = t + C_2',$$

它与 $x = C$ 一起,构成了原方程的一切解.

5.1.2 齐次型方程的降阶

(1) 第 1 类齐次型方程的降阶 设 F 是关于 $x, x', \cdots, x^{(n)}$ 的 k 次齐次函数,

即恒等式

$$F(t;sx,sx',\cdots,sx^{(n)})=s^kF(t;x,x',\cdots,x^{(n)})$$

对一切 s 成立时，可令 $x=e^u$，能将方程(5-1)化为不显含未知函数 u 的方程，即

$$F_1(t;u',u'',\cdots,u^{(n)})=0.$$

这时再令 $u'=z$，即可降低一阶。

(2) 第2类齐次型方程的降阶　若把 t,x 看作1次，x' 看作0次，x'' 看作 -1 次，$\cdots$，$x^{(n)}$ 看作 $-(n-1)$ 次时，函数 F 是关于全部变元的 k 次齐次函数，则可令

$$t=e^s,\quad x=ue^s,$$

代入(5-1)式后，总可使它降低一阶。

(3) 第3类齐次型方程的降阶　若把 t 看作1次，x 看作 m 次，x' 看作 $(m-1)$ 次，x'' 看作 $(m-2)$ 次，$\cdots$，$x^{(n)}$ 看作 $(m-n)$ 次时，函数 F 是关于全部变量的 k 次齐次函数，则可令

$$t=e^s,\qquad x=ue^{ms},$$

代入(5-1)式后，总可使它降低一阶。

例5　求 $t^2xx''=(x-tx')^2$ 的通解。

解　这个方程属于 F 关于 x,x',x'' 是二次齐次函数的第1类。令 $x=e^u$，则

$$x'=u'e^u,\quad x''=(u''+u'^2)e^u,$$

代入原方程，化简得

$$u''+\frac{2}{t}u'=\frac{1}{t^2},$$

这方程不显含 u，令 $u'=z$，对上式积分一次得

$$u'=z=\frac{1}{t}+\frac{C_1}{t^2},$$

再积分得

$$u=\ln|t|-\frac{C_1}{t}+\ln C_2,$$

回到原变量，得通解

$$x=C_2te^{-C_1/t}.$$

例6　求方程 $t^2xx''-3txx'+t^2x'^2+2x^2+t^2=0$ 的通解。

解　当把 t,x 看作1次，x' 看作0次，x'' 看作 -1 次时，F 显然是全部变量的二次齐次函数，属第2类。令

$$t=e^s,\quad x=ue^s,$$

则

$$\frac{ds}{dt}=e^{-s},$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{ds}(ue^s)\frac{ds}{dt}=\left(\frac{du}{ds}e^s+ue^s\right)e^{-s}=\frac{du}{ds}+u,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{ds}+u\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds}+u\right)\frac{ds}{dt}=\left(\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{du}{ds}\right)e^{-s},$$

将这些代入原方程，消去 e^{2s}，整理得

$$u\frac{d^2u}{ds^2}+(\frac{du}{ds})^2+1=0, \tag{5-3}$$

它不显含自变量 s. 再令$\frac{du}{ds}=z$,则

$$\frac{d^2u}{ds^2}=\frac{dz}{ds}=\frac{dz}{du}z,$$

代入(5-3)式,得

$$uz\frac{dz}{du}+z^2+1=0,\quad 或\quad \frac{dz^2}{du}+\frac{2}{u}z^2=-\frac{2}{u},$$

原方程降低了一阶. 它有解

$$\left(\frac{du}{ds}\right)^2=z^2=\frac{C_1}{u^2}-1,$$

或

$$\frac{udu}{\sqrt{C_1-u^2}}=\pm ds,$$

积分得

$$u^2=C_1-(C_2-s)^2,$$

回到原变量,得通解

$$x^2=t^2[C_1-(C_2-\ln|t|)^2].$$

例 7 求 $t^2x^2x''-3tx^2x'+4x^3+t^6=0$ 的通解.

解 把 t 看作 1 次, x 看作 $m=2$ 次, x' 看作 $m-1=1$ 次, x'' 看作 $m-2=0$ 次, 则左边的 F 显然是全部变量的六次齐次函数,属第 3 类. 令代换

$$t=e^s,\quad x=ue^{ms}=ue^{2s},$$

则有

$$x'=\frac{d}{ds}(ue^{2s})\frac{ds}{dt}=\left(\frac{du}{ds}+2u\right)e^s,$$

$$x''=\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{du}{ds}+2u\right)e^s\right]\frac{ds}{dt}=\frac{d^2u}{ds^2}+3\frac{du}{ds}+2u.$$

代入原方程,消去 e^{6s},经整理得

$$u^2\frac{d^2u}{ds^2}+1=0, \tag{5-4}$$

再令$\frac{du}{ds}=z$,则$\frac{d^2u}{ds^2}=\frac{dz}{ds}=z\frac{dz}{du}$,(5-4)式化为

$$u^2z\frac{dz}{du}+1=0,$$

原方程降低了一阶. 经两次积分,回到原变量,得通解

$$\frac{1}{C_1t^2}\sqrt{x(2t^2+C_1x)}-\frac{2}{C_1\sqrt{C_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{C_1}x+\sqrt{2t^2+C_1x}}{t}\right|=\ln|t|+C_2.$$

例 8 求解 $t^4(x'^2-2xx'')=4t^3xx'+1$.

解 把 t 看作 1 次, x 看作 $m=-1$ 次, x' 看作 $m-1=-2$ 次, x'' 看作 $m-2=-3$次,则方程对应的 F 是全部变量的零次齐次函数,也属第 3 类. 作代换

$$t=e^s,\qquad x=ue^{ms}=ue^{-s},$$

可将方程降为1阶方程.最终得通解

$$4C_2t^2x-(C_2t-C_1)^2+4=0.$$

5.1.3　高阶全微分方程

若方程(5-1)的左边函数 $F(t;x,x',\cdots,x^{(n)})$恰好是某一函数 $\Phi(t;x,x',\cdots,x^{(n-1)})$对 t 的全导数,则称(5-1)式为**全微分方程**.这时

$$\Phi(t;x,x',\cdots,x^{(n-1)})=C \tag{5-5}$$

是方程(5-1)的一个**首次积分**(其中 C 为任意常数),(5-1)式的求解问题化为 $n-1$ 阶方程(5-5)的求解问题了.

注意:函数 $\Phi(t;x,x',\cdots,x^{(n-1)})$本身不恒为常数,但沿方程(5-1)的任何解 $x=x(t)$(将 $x=x(t)$代入 Φ)它恒取相应的常数值,则称方程(5-5)为方程(5-1)的一个首次积分.

若存在函数 $\mu(t;x,x',\cdots,x^{(n-1)})$,使

$$\mu F(t;x,x',\cdots,x^{(n)})=0$$

成为全微分方程,则称 μ 为(5-1)式的**积分因子**.如果能找到 k 个积分因子 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k$,对应求得 k 个独立的首次积分

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(t;x,x',\cdots,x^{(n-1)})=C_1,\\
&\Phi_2(t;x,x',\cdots,x^{(n-1)})=C_2,\\
&\qquad\vdots\\
&\Phi_k(t;x,x',\cdots,x^{(n-1)})=C_k,
\end{aligned}$$

则一般可将方程(5-1)降低 k 阶.

例9　求解方程　$2x'x'''-3x''^2=0$.

解　此方程有积分因子 $\mu=-\dfrac{1}{x''^2}$.因为

$$-\frac{1}{x''^2}[2x'x'''-3x''^2]=-\frac{2x'x'''}{x''^2}+3=\frac{d}{dt}\left[\frac{2x'}{x''}+t\right],$$

所以得原方程的首次积分

$$t+\frac{2x'}{x''}=C_1,\qquad 或\frac{x''}{2x'}-\frac{1}{C_1-t}=0.$$

这恰好是个全微分方程,积分得

$$x'=\frac{C_2}{(C_1-t)^2},$$

故得通解

$$x=\frac{C_2}{C_1-t}+C_3.$$

例10　求解方程 $xx''-2x'^2=0$.

解　因为

$$\frac{1}{xx'}(xx''-2x'^2)=\frac{x''}{x'}-\frac{2x'}{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln|x'|-2\ln|x|),$$

$$\frac{t}{x^3}(xx''-2x'^2)=\frac{tx''}{x^2}-\frac{2tx'^2}{x^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{x}+\frac{tx'}{x^2}\right),$$

所以 $\mu_1=\frac{1}{xx'}$，$\mu_2=\frac{t}{x^3}$是方程的两个积分因子，它们是函数独立的，对应两个独立的首次积分

$$\frac{x'}{x^2}=C_1\quad 及\quad \frac{1}{x}+\frac{tx'}{x^2}=C_2,$$

它们联立，消去 x' 得到$\frac{1}{x}+C_1t=C_2$，故方程的通解为

$$x=\frac{1}{C_2-C_1t}.$$

5.2 非线性微分方程组求解的两种途径

对形如(5-2)式的规范形微分方程组，通常采用两种求解的途径：求首次积分法和化为高阶方程再求解，它们有时是可行的.

求首次积分法的理论依据：只要(5-2)式满足解的存在性条件，则它的首次积分是存在的；若求得它的一个首次积分，则可将它化为含 $n-1$ 个函数的 $n-1$ 个方程构成的(5-2)式的求解问题(相当于降了 1 阶)；若能获得它的 k 个独立的首次积分，则可将问题降低 k 阶；当 $k=n$ 时，就可直接得到通解.

首次积分的求法：关键是找"**可积组合**"，即将(5-2)式中一部分或全部方程进行重新组合，以获得可积分的一阶方程，积分之，就可得到首次积分. 有时先把(5-2)式写成**对称形式**

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(t,x_1,\cdots,x_n)}=\frac{\mathrm{d}x_2}{f_2(t,x_1,\cdots,x_n)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{f_n(t,x_1,\cdots,x_n)},$$

再利用熟知的有关比例的性质，使得比较容易找出"可积组合"来.

并不是一般可行的方法，它只在少数情况下使用. 具体见例子.

例 11 试解重刚体绕固定点运动的微分方程组(其中 A,B,C 是常数).

$$\begin{cases}A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=(B-C)qr,\\ B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=(C-A)rp,\\ C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=(A-B)pq.\end{cases}$$

解 以 p、q、r 分别乘原方程组的第一、二、三方程的两边，再相加，得

$$Ap\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Bq\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Cr\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0.$$

这就得到了一个可积组合

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)=0,$$

积分之,对应一个首次积分

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=C_1.$$

再以 Ap、Bq、Cr 分别乘原方程组的第一、二、三方程的两边,再相加得

$$A^2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+B^2q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+C^2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0,$$

显然,这又得一个可积组合,积分后对应另一个首次积分

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=C_2.$$

这两个首次积分除 $A=B=C$ 的特殊情况外,是相互独立的. 事实上,设 $A\neq B$ 时,可由它们联立解出

$$p^2=\frac{C(C-B)}{A(B-A)}r^2+\frac{C_1B-C_2}{A(B-A)}\equiv ar^2+h_1,$$

$$q^2=\frac{C(A-C)}{B(B-A)}r^2+\frac{C_2-C_1A}{B(B-A)}\equiv br^2+h_2,$$

其中 h_1,h_2 是任意常数. 将它们代入原方程组中第三个方程,得到一个可以积分的一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{A-B}{C}\sqrt{(ar^2+h_1)(br^2+h_2)}.$$

这说明二个首次积分起到了减少二个方程的作用,只剩下求一个方程的解的问题了(相当于问题降了二阶). 这个方程是分离变量型的,可直接积分,一般 r 表为 t 的椭圆函数,含 3 个任意常数.

例 12　求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{t-y}{y-x},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{x-t}{y-x}$ 的通解.

解　将方程组写成对称形式

$$\frac{\mathrm{d}t}{y-x}=\frac{\mathrm{d}x}{t-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x-t},$$

按比例的性质知:3 个分式的分子、分母分别相加,所得分式与原分式相等;第一、二、三个分式,分别在分子、分母上同时乘以 $2t$、$2x$、$2y$ 后,再分子相加、分母相加,所得分式与原分式也相等,即有

$$\frac{\mathrm{d}t}{y-x}=\frac{\mathrm{d}x}{t-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x-t}=\frac{\mathrm{d}(t+x+y)}{0}=\frac{\mathrm{d}(t^2+x^2+y^2)}{0}.$$

从而,找到了 2 个可积组合

$$\mathrm{d}(t+x+y)=0,\quad \mathrm{d}(t^2+x^2+y^2)=0,$$

再分别产生首次积分

$$t+x+y=C_1,\quad t^2+x^2+y^2=C_2,$$

联立起来,就是原方程组的隐式通解.

例 13　求 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y,xz\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-(x^2+y^2)$ 的通解.

解　第一个方程可以单独积分,得首次积分

$$\frac{y}{x} = C_1,$$

并代入第二个方程得

$$z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -x(1 + C_1^2),$$

再对上式积分得

$$\begin{aligned} z^2 &= -x^2(1 + C_1^2) + C_2 = -x^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + C_2 \\ &= -x^2 - y^2 + C_2. \end{aligned}$$

所以通解为

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = C_1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \end{cases}$$

例 14 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \dfrac{1}{z}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{y - x}$ 的通解.

解法一 写成对称形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{\mathrm{d}y}{1 - \dfrac{1}{z}} = \frac{\mathrm{d}z}{\dfrac{1}{y - x}},$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{z\mathrm{d}y}{z - 1} = \frac{(y - x)\mathrm{d}z}{1},$$

用比例的性质,有

$$\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{z\mathrm{d}x}{z} = \frac{z\mathrm{d}y}{z - 1} = \frac{z(\mathrm{d}y - \mathrm{d}x)}{-1} = \frac{(y - x)\mathrm{d}z}{1},$$

取可积组合

$$\frac{z\mathrm{d}(y - x)}{-1} = \frac{(y - x)\mathrm{d}z}{1},$$

积分,得首次积分

$$(y - x)z = C_1,$$

将它决定的 $z = \dfrac{C_1}{y - x}$ 代入原第一个方程,得

$$\frac{\mathrm{d}(y - x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{y - x}{C_1},$$

积分,得

$$(y - x)\mathrm{e}^{\frac{x}{C_1}} = C_2 \quad 或 \quad (y - x)\mathrm{e}^{\frac{x}{(y - x)z}} = C_2$$

它也是方程组的第二个首次积分.故通解是

$$\begin{cases} (y - x)z = C_1, \\ (y - x)\mathrm{e}^{\frac{x}{(y - x)z}} = C_2, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y = x + C_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{C_1}}, \\ z = \dfrac{C_1}{C_2}\mathrm{e}^{x/C_1}. \end{cases}$$

解法二(化为二阶方程求解)

将第二个方程对 x 求导数,得

$$z'' = -\frac{1}{(y-x)^2}(y'-1) = \frac{1}{z(y-x)^2} = \frac{z'^2}{z},$$

即

$$\frac{z''}{z'} = \frac{z'}{z}.$$

积分,得 $z' = C_1 z$,再积分,得

$$z = C_2 e^{C_1 x},$$

代入原第二个方程,得

$$y = x + \frac{1}{z'} = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x},$$

故通解为

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}, \\ z = C_2 e^{C_1 x}. \end{cases}$$

例 15　求 $x' = xy, y' = \dfrac{y^2}{x} + y^2$ 的通解.

解　化为二阶方程求解. 有

$$x'' = x'y + xy' = 2xy^2 + y^2 = (2x+1)\left(\frac{x'}{x}\right)^2,$$

这个方程不显含自变量 t,令 $x' = z$,则 $x'' = z\dfrac{dz}{dx}$,代入上式得

$$z\frac{dz}{dx} = \frac{2x+1}{x^2}z^2 \quad 或 \quad \frac{dz}{z} = \frac{2x+1}{x^2}dx,$$

积分,得$\dfrac{dx}{dt} = z = C_1 x^2 e^{-\frac{1}{x}}$,再积分,得

$$-e^{\frac{1}{x}} = C_1 t + C_2.$$

故得通解

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\ln|C_1 t + C_2|}, \\ y = -\dfrac{C_1}{(C_1 t + C_2)\ln|C_1 t + C_2|}. \end{cases}$$

6　常微分方程边值问题

当定解条件在多个点上给出时,称为边界条件. 微分方程与相应的边界条件一起构成了边值问题. 常微分方程边值问题是常微分方程中一个专门分支,它在工程技术中有广泛的应用. 因篇幅所限,这里仅以二阶线性方程的边值问题为例,介绍一点这方面的基础知识和基本解法.

6.1 边值问题基本概念

6.1.1 边值问题的提法

考虑微分方程

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \tag{6-1}$$

及对应的齐次方程

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{6-2}$$

其中 $p(t),q(t),f(t)$均是$[a,b]$上的连续函数.考虑边界条件的一般形式

$$U_i[x] \equiv \alpha_{i1}x(a) + \beta_{i1}x(b) + \alpha_{i2}x'(a) + \beta_{i2}x'(b) = \gamma_i \quad (i=1,2) \tag{6-3}$$

或对应的齐次边界条件

$$U_i[x] = 0 \quad (i=1,2), \tag{6-4}$$

其中 $\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_i(i,j=1,2)$均为已知常数.

称下列定解问题

$$\begin{cases}(6\text{-}2),\\(6\text{-}4),\end{cases}\quad \begin{cases}(6\text{-}1),\\(6\text{-}3),\end{cases}\quad \begin{cases}(6\text{-}2),\\(6\text{-}3),\end{cases}\quad \begin{cases}(6\text{-}1),\\(6\text{-}4),\end{cases}$$

分别为**齐次边值问题**,**非齐次边值问题**,**第一类半齐次边值问题**,**第二类半齐次边值问题**.

6.1.2 边值问题解的某些性质

(1) 齐次边值问题解的性质

1° 它必有平凡解 $x(t) \equiv 0$.

2° 若 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$是它的 k 个解,则它们的线性组合

$$x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \cdots + C_Kx_K(t)$$

也是它的解.

3° 若它有非平凡解时,它的一切解或者可由一个非零解 $x_1(t)$线性表出,或者由两个线性无关解 $x_1(t),x_2(t)$线性表出.前者称该齐次边值问题为**一重可解**,后者称**二重可解**.

(2) 非齐次边值问题解的性质

1° 若 $x_1(t),x_2(t)$是它的两个不同的解,则 $x_1(t)-x_2(t)$是对应的齐次边值问题的非平凡解.

2° 若 $x_0(t)$是它的某个解,则它的任何解可表为

$$x(t) = x_0(t) + \tilde{x}(t),$$

其中 $\tilde{x}(t)$是它对应的齐次边值问题的解.

(3) 半齐次边值问题解的性质

若 $\bar{\bar{x}}(t)$是第一类半齐次边值问题

$$\begin{cases} x''+p(t)x'+q(t)x=0, \\ U_i[x]=\gamma_i \quad (i=1,2) \end{cases}$$

的解；$\bar{\bar{x}}(t)$是第二类半齐次边值问题

$$\begin{cases} x''+p(t)x'+q(t)x=f(t), \\ U_i[x]=0 \quad (i=1,2) \end{cases}$$

的解.则

$$x(t)=\bar{x}(t)+\bar{\bar{x}}(t)$$

是非齐次边值问题

$$\begin{cases} x''+p(t)x'+q(t)x=f(t), \\ U_i[x]=\gamma_i \quad (i=1,2) \end{cases}$$

的解.

6.1.3　边值问题可解性条件

考虑矩阵

$$U \xlongequal{\text{def}} \begin{bmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] \end{bmatrix},$$

其中元素 $U_i[x_j]$是解 $x_j(t)$在边界上 U_i 的值,它由(6-3)式所定义.

定理　设 $x_1(t),x_2(t)$是齐次方程(6-2)的基本解组,$\tilde{x}(t)$是相应的非齐次方程(6-1)的一个解.则有:

1° 若矩阵 U 的秩为 $l(l=0,1,2)$,则齐次边值问题是 $2-l$ 重可解的;$l=2$(即 $|U|\neq 0$)时,它只有平凡解.

2° 非齐次边值问题可解的充分必要条件是:矩阵 U 和矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] & \gamma_1-U_1[\tilde{x}] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] & \gamma_2-U_2[\tilde{x}] \end{bmatrix}$$

有相同的秩;当秩等于 2(即 $|U|\neq 0$)时,解是唯一的.

3° 第一类、第二类半齐次边值问题可解的充分必要条件、分别是

矩阵 U 和矩阵$\begin{bmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2]\gamma_1 \\ U_2[x_1] & U_2[x_2]\gamma_2 \end{bmatrix}$秩相同,

矩阵 U 和矩阵$\begin{bmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] & U_1[\tilde{x}] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] & U_2[\tilde{x}] \end{bmatrix}$秩相同;

当秩等于 2(即 $|U|\neq 0$)时,解是唯一的.

例 1　讨论齐次边值问题

$$\begin{cases} x''+\lambda x=0, \\ x(0)=0, x(\pi)=0 \end{cases}$$

的可解性问题.

解　注意这里的边界条件对应

$$U_1[x]\equiv x(0),\quad U_2[x]\equiv x(\pi).$$

以下分 $\lambda=0,\lambda<0,\lambda>0$ 三种情形进行讨论.

当 $\lambda=0$ 时.方程为

$$x''=0,$$

它有线性无关的解

$$x_1(t)=1,\qquad x_2(t)=t.$$

这时 $$U\equiv\begin{bmatrix}U_1[x_1] & U_1[x_2]\\ U_2[x_1] & U_2[x_2]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1(0) & x_2(0)\\ x_1(\pi) & x_2(\pi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & \pi\end{bmatrix},$$

所以有 $|U|=\pi\neq0$,按定理中 1°知,边值问题只有平凡解 $x(t)\equiv0$.

当 $\lambda<0$ 时.记 $\lambda=-a^2$,方程写为

$$x''-a^2x=0.$$

它显然有线性无关解

$$x_1(t)=e^{at},\quad x_2(t)=e^{-at}.$$

这时 $$|U|=\begin{vmatrix}x_1(0) & x_2(0)\\ x_1(\pi) & x_2(\pi)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{a\pi} & e^{-a\pi}\end{vmatrix}=e^{-a\pi}-e^{a\pi}\neq0,$$

故这时边值问题也只有平凡解 $x(t)\equiv0$.

当 $\lambda>0$ 时.记 $\lambda=a^2$,方程写为

$$x''+a^2x=0.$$

它有两个线性无关解

$$x_1(t)=\cos at,\quad x_2(t)=\sin at.$$

这时 $$|U|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \cos a\pi & \sin a\pi\end{vmatrix}=\sin a\pi.$$

当 $a\neq\pm n$(整数)时,$|U|\neq0$,边值问题只有平凡解;当 $a=\pm n$ 或 $\lambda=n^2,n=1,2,\cdots$ 时,$|U|=0$,U 的秩 $l=1$,这时这个边值问题一重可解.事实上,这时边值问题有非平凡解

$$x=C\sin nt,$$

其中 $C\neq0$ 为任意常数,它代表满足 $x(0)=x(\pi)=0$ 的一切解.

例 2 讨论非齐次边值问题

$$\begin{cases}x''=t,\\ x(0)-x(1)=1,\\ x'(0)+x'(1)=0\end{cases}$$

的可解性.

解 显然非齐次方程 $x''=t$ 有特解 $\tilde{x}=\frac{1}{6}t^3$,它对应的齐次方程 $x''=0$ 有基本解组 $x_1(t)=1,x_2(t)=t$.这里的边界条件对应

$$U_1[x]\equiv x(0)-x(1),\qquad U_2[x]\equiv x'(0)+x'(1).$$

因此,矩阵

$$U\equiv\begin{bmatrix}U_1[x_1] & U_1[x_2]\\ U_2[x_1] & U_2[x_2]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] & \gamma_1 - U_1[\tilde{x}] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] & \gamma_2 - U_2[\tilde{x}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{7}{6} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

它们的秩显然不等，按定理中2°知，所给的非齐次边值问题无解. 这是因为边界条件给的不适当所致.

例3　讨论$\begin{cases} x''=0, \\ x(0)+x'(0)=x(1), \\ x'(0)=x'(1) \end{cases}$的可解性及求解.

解　这时边界条件写成标准形式是

$$U_1[x] \equiv x(0)-x(1)+x'(0)=0,$$

$$U_2[x] \equiv x'(0)-x'(1)=0,$$

因此所讨论的是齐次边值问题. 方程 $x''=0$ 本身有线性无关解 $x_1(t)=1, x_2(t)=t$，所以

$$\boldsymbol{U} \equiv \begin{bmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

它的秩 $l=0$，按定理中1°知，所给边值问题为二重可解的. 事实上，它有解

$$x = C_1 t + C_2.$$

6.2　边值问题的解法

边值问题的解法通常采用两种方法：待定常数法和借助格林函数的求解法. 当边值问题中的微分方程可求出通解时——齐次边值问题和第一类半齐次边值问题，采用待定常数法是方便的；对第二类半齐次边值问题和非齐次边值问题，当其中微分方程的通解不易求出时，常借助格林函数来求解.

6.2.1　待定常数法

求出边值问题中微分方程的通解，再利用边界条件确定其中的任意常数，而得边值问题的解.

例4　求解边值问题：

$$\begin{cases} x''+x=1, \\ x(0)+x'(0)=0, \\ x(\pi)=0. \end{cases}$$

解　微分方程 $x''+x=1$ 的通解是

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + 1.$$

对上式求导有　　$x'(t) = -C_1\sin t + C_2\cos t.$

代入边值条件，分别得

$$C_1+1+C_2=0, \quad -C_1+1=0,$$

求得 $C_1=1, C_2=-2$. 故边值问题的解是

$$x = \cos t - 2\sin t + 1$$

6.2.2 借助格林函数的求解法

借助格林函数求解的步骤如下:

1° 求出对应的齐次边值问题唯一的格林函数 $G(t,s)$;

2° 第二类半齐次边值问题(6-1)及(6-4)的解是

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\mathrm{d}s;$$

3° 非齐次边值问题(6-1)及(6-3)的解等于对应的第一类半齐次边值问题的解(一般用待定常数法)加上对应的第二类半齐次边值问题的解.

定义 齐次边值问题(6-2)及(6-4)的,定义在正方形 $D: a \leqslant t \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b$ 上的函数 $G(t,s)$,若满足下列条件,则称为此边值问题的格林函数:

1° $G(t,s)$对一切$(t,s) \in D$有定义且连续;

2° $\dfrac{\partial G}{\partial t}$除 $t = s$ 外在 D 上连续,在 $t = s$ 处有跃度 1,即

$$\frac{\partial G(s+0,s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s-0,s)}{\partial t} = 1;$$

3° 对每个固定的$s \in (a,b)$, $G(t,s)$在每个区间$[a,s)$和$(s,b]$上,作为 t 的函数,满足方程(6-2)及边界条件(6-4).

引理 若方程(6-2)的基本解组 $x_1(t), x_2(t)$对应的$|U| \neq 0$,则齐次边值问题(6-2)及(6-4)的格林函数可唯一确定.具体求法是

1° 令
$$G(t,s) = \begin{cases} a_1(s)x_1(t) + a_2(s)x_2(t) & (a \leqslant t \leqslant s), \\ b_1(s)x_1(t) + b_2(s)x_2(t) & (s \leqslant t \leqslant b). \end{cases} \tag{6-5}$$

由 $G(t,s)$在 $t = s$ 上的连续性,$\dfrac{\partial G}{\partial t}$在$t = s$ 上的跃度,分别得

$$\begin{aligned} &[b_1(s)x_1(s) + b_2(s)x_2(s)] - [a_1(s)x_1(s) + a_2(s)x_2(s)] \\ &\equiv c_1(s)x_1(s) + c_2(s)x_2(s) = 0, \\ &[b_1(s)x_1'(s) + b_2(s)x_2'(s)] - [a_1(s)x_1'(s) + a_2(s)x_2'(s)] \\ &\equiv c_1(s)x_1'(s) + c_2(s)x_2'(s) = 1, \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{cases} b_1(s) - a_1(s) \equiv c_1(s) = -\dfrac{x_2(s)}{W(s)}, \\ b_2(s) - a_2(s) \equiv c_2(s) = \dfrac{x_1(s)}{W(s)}, \end{cases} \tag{6-6}$$

这里 $W(s) \equiv W[x_1(s), x_2(s)] \neq 0$ 是朗斯基行列式.

2° 由 $G(t,s)$应满足边界条件(6-4),得

$$U_i[G] = 0 \qquad (i = 1,2). \tag{6-7}$$

这样,由方程(6-6),(6-7)可唯一确定 $a_1(s), a_2(s), b_1(s), b_2(s)$,并代入(6-5)式就可得到齐次边值问题的格林函数了.

例5　试求齐次边值问题

$$\begin{cases} x'' + k^2 x = 0, \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

的格林函数.

解　方程显然有基本解组 $\cos kt, \sin kt$. 作

$$G(t,s) = \begin{cases} a_1(s)\cos kt + a_2(s)\sin kt & (0 \leqslant t \leqslant s), \\ b_1(s)\cos kt + b_2(s)\sin kt & (s \leqslant t \leqslant 1). \end{cases}$$

由引理中(6-6)式,知

$$b_1(s) - a_1(s) \equiv c_1(s) = -\frac{\sin ks}{k},$$

$$b_2(s) - a_2(s) \equiv c_2(s) = \frac{\cos ks}{k},$$

再由边界条件,得

$$G(0,s) \equiv [a_1(s)\cos kt + a_2(s)\sin kt]_{t=0} \equiv a_1(s) = 0,$$

$$G(1,s) \equiv [b_1(s)\cos kt + b_2(s)\sin kt]_{t=1} \equiv b_1(s)\cos k + b_2(s)\sin k = 0.$$

从以上4式解得

$$a_1(s) = 0, \quad a_2(s) = \frac{1}{k\sin k}\sin k(s-1),$$

$$b_1(s) = -\frac{1}{k}\sin ks, \quad b_2(s) = \frac{\cos k}{k\sin k}\sin ks.$$

代入 $G(t,s)$表达式,得格林函数

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{k\sin k}\sin kt\sin k(s-1) & (0 \leqslant t \leqslant s), \\ \dfrac{1}{k\sin k}\sin ks\sin k(t-1) & (s \leqslant t \leqslant 1). \end{cases}$$

例6　求解第二类半齐次边值问题

$$\begin{cases} x'' - x = 1, \\ x(0) - x(1) = 0, \\ x'(0) - x'(1) = 0. \end{cases}$$

解　求齐次边值问题

$$\begin{cases} x'' - x = 0, \\ x(0) - x(1) = 0, \\ x'(0) - x'(1) = 0. \end{cases}$$

的格林函数.

上述方程显然有基本解组 e^t, e^{-t},其对应的朗斯基行列式

$$W(t) \equiv W[e^t, e^{-t}] = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2.$$

作

$$G(t,s) = \begin{cases} a_1(s)e^t + a_2(s)e^{-t} & (0 \leqslant t \leqslant s), \\ b_1(s)e^t + b_2(s)e^{-t} & (s \leqslant t \leqslant 1). \end{cases}$$

由引理中(6-6)式，知

$$b_1(s)-a_1(s)=\frac{-e^{-s}}{W(s)}=\frac{1}{2}e^{-s},$$

$$b_2(s)-a_2(s)=\frac{e^s}{W(s)}=-\frac{1}{2}e^s.$$

再由 $G(t,s)$满足边界条件，得

$$G(0,s)-G(1,s)\equiv a_1(s)+a_2(s)-b_1(s)e-b_2(s)e^{-1}=0,$$

$$G'(0,s)-G'(1,s)\equiv a_1(s)-a_2(s)-b_1(s)e+b_2(s)e^{-1}=0.$$

从以上 4 个方程解出 $a_1(s),a_2(s),b_1(s),b_2(s)$，代入 $G(t,s)$表达式，得

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-e)}(e^{t-s+1}+e^{s-t}) & (0\leqslant t\leqslant s),\\ \dfrac{1}{2(1-e)}(e^{t-s}+e^{s-t+1}) & (s\leqslant t\leqslant 1).\end{cases}$$

半齐次边值问题的解是(这里 $f(s)\equiv 1$)

$$\begin{aligned}x(t)&=\int_0^1 G(t,s)ds\\&=\int_0^t\frac{e^{s-t+1}+e^{t-s}}{2(1-e)}ds+\int_t^1\frac{e^{s-t}+e^{t-s+1}}{2(1-e)}ds\\&=-1,\end{aligned}$$

即 $x=-1$ 是所给第二类半齐次边值问题的唯一解.

例 7 求解非齐次边值问题

$$\begin{cases}x''=f(t),\\x(0)=1,\\x'(1)=2,\end{cases}$$

其中 $f(t)$为 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的连续函数.

解 先用待定常数法求第一类半齐次边值问题

$$x''=0,\quad x(0)=1,\quad x'(1)=2$$

的解. 方程有基本解组 $1,t$，通解为

$$x=C_1+C_2t,$$

上式代入边界条件，得 $C_1=1,C_2=2$. 故上述第一类半齐次边值问题的解是

$$x=1+2t.$$

再求第二类半齐次边值问题

$$x''=f(t),\quad x(0)=0,\quad x'(1)=0$$

的解. 求 $x''=0,x(0)=x'(1)=0$ 对应的格林函数. $x''=0$ 的基本解组为 $1,t$，

$$W(t)=W[1,t]=\begin{vmatrix}1&t\\0&1\end{vmatrix}=1.$$

作

$$G(t,s)=\begin{cases}a_1(s)+a_2(s)t & (0\leqslant t\leqslant s),\\ b_1(s)+b_2(s)t & (s\leqslant t\leqslant 1),\end{cases}$$

由引理中(6-6)式，知

$$b_1(s)-a_1(s)=\frac{-s}{W(s)}=-s,$$

$$b_2(s)-a_2(s)=\frac{1}{W(s)}=1,$$

再由 $G(t,s)$满足齐次边界条件,得

$$a_1(s)=0,\qquad b_2(s)=0.$$

以上4式决定了

$$a_1(s)=0,\quad a_2(s)=-1,\quad b_1(s)=-s,b_2(s)=0.$$

代入 $G(t,s)$的形式,得

$$G(t,s)=\begin{cases}-t & (0\leqslant t\leqslant s),\\ -s & (s\leqslant t\leqslant 1).\end{cases}$$

则所给第二类半齐次边值问题解为

$$x=-\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s-\int_t^1 tf(s)\mathrm{d}s.$$

故原非齐次边值问题的解为

$$x=1+2t-\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s-\int_t^1 tf(s)\mathrm{d}s.$$

参 考 文 献

1 Kamke E.常微分方程手册.北京:科学出版社,1977.
2 贺建勋,王志成.常微分方程:上册.长沙:湖南科技出版社,1979.
3 贺建勋,王志成.常微分方程:中册.长沙:湖南科技出版社,1980.
4 钱祥征.常微分方程解题方法.长沙:湖南科技出版社,1985.
5 王高雄等.常微分方程.北京:高等教育出版社,1995.
6 王柔怀,伍卓群.常微分方程讲义.北京:人民教育出版社,1963.
7 Braun M.微分方程及其应用.张鸿林译.北京:人民教育出版社,1980.

·经典数学卷·

第11篇

差分方程

编　者　梁法驯
审校者　张炳根

目　录

引　言

差分方程早期是作为有限差分学的一个部分出现的，并与有限差分学同时成长起来. 17 世纪 ~ 18 世纪，伯努利（Bernoulli）、欧拉（Euler）、斯特林（Stirling）、牛顿（Newton）等分别在研究函数插补法和组合计数问题的同时，建立了差分方程理论. 此后，随着对数值分析、离散数学以及各种数学物理问题的深入研究，差分方程理论进一步得到发展.

离散与连续是客观世界物质运动对立统一的两种形式. 在现代数学中，差分方程理论主要是描述、处理离散变量的变化过程. 它与描述、处理连续变量的变化过程的微分方程理论之间显示出某种相似性，但也存在着差异. 从本质上来说，凡是变量的离散值存在某种递推关系的所有现象，都涉及到差分方程.

本篇主要内容是介绍常差分方程理论的一些基本问题、求解差分方程的常用方法，以及差分方程稳定性的基本定理.

近年来，由于电子计算机的迅速发展，信息科学、工程控制、医学、生物数学、现代物理、社会经济等自然科学和边缘学科所研究处理的很多重要问题，都是由差分方程来描述的数学模型. 因此，差分方程已成为当今科技工作者必不可少的数学工具.

1　差分方程的基本概念

1.1　差分的概念

定义 1　设 $y = f(x)$ 是一个函数，且 x 和 $x + \Delta x$ 在 $f(x)$ 的定义域内，则函数改变量

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $f(x)$ 在 x 的**一阶差分**，记为 $\Delta f(x)$.

在本篇中，为简单起见，总假定 $\Delta x = 1$，否则作自变量的代换 $x = t\Delta x$，即可使新自变量的差分 $\Delta t = 1$. 这样，上面函数 $f(x)$ 在 x 的一阶差分便可写成

$$\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x). \tag{1-1}$$

显然，$\Delta f(x)$ 仍为 x 的一个函数，它的差分，即 $\Delta(\Delta f(x))$，称为函数 $f(x)$ 在 x 的**二阶差分**，记为 $\Delta^2 f(x)$. 因此有

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta f(x + 1) - \Delta f(x)\\ &= f(x + 2) - 2f(x + 1) + f(x).\end{aligned} \tag{1-2}$$

类似地，可以定义函数 $f(x)$ 的 **n 阶差分**：

$$
\begin{aligned}
\Delta^n f(x) &= \Delta(\Delta^{n-1} f(x)) \\
&= f(x+n) - \binom{n}{1} f(x+n-1) + \binom{n}{2} f(x+n-2) + \\
&\quad \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} f(x+1) + (-1)^n f(x).
\end{aligned} \tag{1-3}
$$

其中$\binom{n}{i}$表示从n个元素中取i个元素的组合数.

反过来,由(1-1)、(1-2)和(1-3)式,函数$f(x)$的相继值$f(x+1),f(x+2),\cdots,f(x+n)$可以用函数$f(x)$以及它的各阶差分来表示,即

$$
\begin{cases}
f(x+1) = f(x) + \Delta f(x), \\
f(x+2) = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x), \\
\qquad \vdots \\
f(x+n) = f(x) + \binom{n}{1}\Delta f(x) + \binom{n}{2}\Delta^2 f(x) + \\
\qquad \cdots + \binom{n}{n-1}\Delta^{n-1} f(x) + \Delta^n f(x).
\end{cases} \tag{1-4}
$$

1.2 差分的运算法则与差分公式

1.2.1 差分的运算法则

在上述差分的定义$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$中,$\Delta$称为**差分算子**.也就是说,将$\Delta$作用于函数$f(x)$,就得出$f(x+1) - f(x)$.

差分运算法则:

1° $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

2° $\Delta[Cf(x)] = C\Delta f(x)$ (C为常数或以1为周期的函数);

由1°,2°可知,差分算子Δ是线性算子.

3° $\Delta[f(x)g(x)] = f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x)$;

4° $\Delta\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+1)}$;

5° $\Delta^n[f(x)g(x)] = \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\Delta^{n-i} f(x)\Delta^i g(x+n-i)$.

1.2.2 差分公式

由差分的定义,直接得到一些基本初等函数的差分公式:

1° 若C为常数或以1为周期的函数,则$\Delta C = 0$;

2° $\Delta x^n = \sum\limits_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}$ (n为正整数),

$\Delta \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x(x+1)}$,

$$\Delta\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}};$$

3° $\Delta a^x = a^x(a-1)$ （a 为常数）；

4° $\Delta \sin ax = 2\sin\frac{a}{2}\cos a(x+\frac{1}{2})$，

$\Delta \cos ax = -2\sin\frac{a}{2}\sin a(x+\frac{1}{2})$，

$\Delta \tan ax = \frac{\sin a}{\cos ax \cos a(1+x)}$；

5° $\Delta \sinh ax = 2\sinh\frac{a}{2}\ \cosh a(x+\frac{1}{2})$，

$\Delta \cosh ax = 2\sinh\frac{a}{2}\ \sinh a(x+\frac{1}{2})$，

这里 a 为常数；

6° $\Delta \ln x = \ln(1+\frac{1}{x})$；

7° $\Delta \arctan x = \arctan\frac{1}{1+x+x^2}$；

8° $\Delta\binom{x}{r} = \binom{x}{r-1}$ （$r \neq 1$）.

1.3 阶乘函数

由 1.2.2 节的 2° 看出，幂函数 x^n 的差分运算结果与微分运算结果大不相同，显然较复杂. 本节引进一种函数，即阶乘函数，它在差分学中的地位与幂函数在微分学中的地位相似.

定义 2 n 个因子的连乘积（n 为正整数）

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \tag{1-5}$$

称为 x 的 **n 次阶乘函数**，记为 $x^{(n)}$.

特别地，当 $x = n$ 时，有 $n^{(n)} = n!$，即为通常的阶乘.

规定 $x^{(0)} = 1$.

类似地，可以定义

$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \quad (n\text{ 为正整数}).$$

即

$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+n)^{(n)}}.$$

容易证明，n 次阶乘函数 $x^{(n)}$ 有下述重要性质：

$$\Delta x^{(n)} = n\,x^{(n-1)}, \tag{1-6}$$

其中 n 为整数. 这个公式类似微分学中幂函数的微分公式.

定义 3 如果 n 是正整数，$b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}, b_n$ 为常数，且 $b_0 \neq 0$，则

$$b_0x^{(n)} + b_1x^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}x^{(1)} + b_n$$

称为 **n 次阶乘多项式**.

由阶乘函数的定义容易看出,n 次阶乘多项式也是通常的 n 次多项式的一种写法.同时,由(1-6)式知道,n 次阶乘多项式在差分学中的地位与 n 次多项式在微分学中的地位相似.

例1
$$f(x) = 3x^{(2)} + 7x^{(1)} - 9 = 3x(x-1) + 7x - 9 = 3x^2 + 4x - 9.$$

在差分学中,为方便起见,常常将已知多项式用阶乘多项式来表示.这时,可用下述定理(类似微分学中的麦克劳林(Maclaurin)展式).

定理1　若 $g(x)$ 为 x 的 n 次多项式,则
$$g(x) = g(0) + \frac{\Delta g(0)}{1!}x^{(1)} + \frac{\Delta^2 g(0)}{2!}x^{(2)} + \cdots + \frac{\Delta^n g(0)}{n!}x^{(n)}. \tag{1-7}$$

例2　将 $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ 表示成阶乘多项式.

解　容易计算出

x	$P(0)$	$\Delta P(0)$	$\Delta^2 P(0)$	$\Delta^3 P(0)$	$\Delta^4 P(0)$
0	-10	2	6	12	0
1	-8	8	18	12	0
2	0	26	30	12	
3	26	56	42		
4	82	98			
5	180				

因此
$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = -10 + 2x^{(1)} + 3x^{(2)} + 2x^{(3)}.$$

如果用待定系数法来把多项式表示成阶乘多项式,则可以避免计算各阶差分,这样往往比较简便.

在上例中,设
$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = Ax^{(3)} + Bx^{(2)} + Cx^{(1)} + D.$$
即
$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = Ax(x-1)(x-2) + Bx(x-1) + Cx + D.$$
令 $x = 0$,得 $D = -10$,代入上式并化简得
$$2x^2 - 3x + 3 = A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C,$$
令 $x = 1$,得 $C = 2$,代入上式并化简得
$$2x - 1 = A(x-2) + B,$$
令 $x = 2$,得 $B = 3$,再代入上式并化简得
$$2(x-2) = A(x-2),$$
所以
$$A = 2,$$
因此
$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = 2x^{(3)} + 3x^{(2)} + 2x^{(1)} - 10.$$

反过来,若将一个阶乘多项式化为通常的多项式,可如上面例1的做法,直接代入阶乘函数定义的(1-5)式,将乘积因子乘开、化简即得.

1.4 差分方程的概念

1.4.1 差分方程的几种表示形式

定义 4 表示自变量 x、未知函数 $f(x)$ 以及它的各阶差分的关系式

$$F(x, f(x), \Delta f(x), \cdots, \Delta^n f(x)) = 0 \tag{1-8}$$

称为**差分方程**,其中 F 是已知的函数.例如

$$\Delta^3 f(x) + \Delta^2 f(x) - \Delta f(x) - f(x) = 0, \tag{1-9}$$

$$2f(x) + 3\Delta f(x) - \Delta^3 f(x) = x. \tag{1-10}$$

利用公式(1-1)、(1-2) 和(1-3),可以把差分方程表示成未知函数 $f(x)$ 的**相继值**的形式

$$\Phi(x, f(x), f(x+1), \cdots, f(x+n)) = 0. \tag{1-11}$$

以下为简便起见,也记 $y_x = f(x), y_{x+1} = f(x+1), \cdots, y_{x+n} = f(x+n)$,于是,(1-11) 式又可写成

$$\Phi(x, y_x, y_{x+1}, \cdots, y_{x+n}) = 0. \tag{1-12}$$

(1-11) 式或(1-12) 式又称**递推关系式**.

在差分方程的两种主要形式(1-8)式和(1-11)式中,由于以未知函数的相继值来表示的形式(1-12) 式或(1-11) 式在解差分方程时较为方便.所以这种表示法最常用.

例如,差分方程(1-9) 和(1-10) 又分别可以写成

$$y_{x+3} - 2y_{x+2} = 0,$$

和

$$y_{x+3} - 3y_{x+2} = -x.$$

反过来,利用公式(1-4),形如(1-11) 式或(1-12) 式的差分方程也可以写成(1-8) 式的形式.

1.4.2 差分方程的阶、解、通解与特解

一个差分方程,如果把它化为以未知函数的相继值来表示的形式(1-12) 式后,未知函数 y 的下标的最大值与最小值之差 n,就称为这个**差分方程的阶**.

例如,$y_{x+2} = y_{x+1} + y_x$ 是二阶差分方程.又如,$y_{x+3} - 3y_{x+2} = -x$ 是一阶差分方程.事实上,作自变量的代换,以 x 代替 $x+2$ 时,就得到 $y_{x+1} - 3y_x = 2 - x$.这是差分方程与微分方程之间的显著区别之一,在微分方程中,自变量的变换不会改变方程的阶数.

定义 5 对于任意 x,满足差分方程(1-8) 或(1-12) 的函数 $y_x = f(x)$,称为差分方程(1-8) 或(1-12) 的解.

例如,可以直接验证,函数 $y_x = C_x 2^x$(其中 C_x 是常数或以 1 为周期的函数) 是差分方程

$$y_{x+1} = 2y_x$$

的解.

又如，函数 $y_x = A_x 3^x + B_x 4^x$（其中 A_x, B_x 是常数或以 1 为周期的函数）是差分方程

$$y_{x+2} - 7y_{x+1} + 12y_x = 0$$

的解.

定义 6　n 阶差分方程包含 n 个任意常数的解，称为这个**差分方程的通解**. 若在差分方程的通解中，将常数取为固定值，所得的解称为这个**差分方程的特解**，它是由定解条件确定的.

例如，函数 $y_x = 2^x$ 是差分方程 $y_{x+1} = 2y_x$ 满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解，这时通解中的常数 $C = y_0 = 1$.

又如，函数 $y_x = -3^x + 4^x$ 是差分方程

$$y_{x+2} - 7y_{x+1} + 12y_x = 0$$

满足初始条件 $y_0 = 0, y_1 = 1$ 的特解，这时 $A_x = -1, B_x = 1$.

1.5　函数的求和问题

定义 7　若函数 $F(x)$ 是差分方程

$$\Delta F(x) = \varphi(x) \tag{1-13}$$

的解. 显然，这时 $F(x) + C_x$ 也是方程的解，其中 C_x 为任意常数或以 1 为周期的函数. 我们称 $F(x) + C_x$ 为函数 $\varphi(x)$ 的**不定和**，记为 $\Delta^{-1}\varphi(x)$，即

$$\Delta^{-1}\varphi(x) = F(x) + C_x.$$

这里若把差分运算对应于导数运算，则求不定和，就类似于微分学中求不定积分；而函数的求和问题，就类似于求定积分问题.

已知一个函数 $\varphi(x)$，求它的不定和 $\Delta^{-1}\varphi(x)$，可以把 1.2 节的差分运算法则与差分公式反转过来. 例如，由 1.2.1 节的性质 1° 和 2° 分别得

$$\Delta^{-1}(f(x) + g(x)) = \Delta^{-1}f(x) + \Delta^{-1}g(x),$$
$$\Delta^{-1}(Cf(x)) = C\Delta^{-1}f(x).$$

而由性质 3° 得

$$\Delta^{-1}(f(x)\Delta g(x)) = f(x)g(x) - \Delta^{-1}(g(x+1)\Delta f(x)),$$

这就是分部求不定和公式.

又如，由 1.2.2 小节的差分公式可得

$$\Delta^{-1}a^x = \frac{a^x}{a-1} + C_x \quad (a \neq 1);$$

$$\Delta^{-1}x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C_x \quad (n \neq -1);$$

$$\Delta^{-1}\sin ax = -\frac{\cos a\left(x - \frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C_x \quad (a \neq 2n\pi);$$

$$\Delta^{-1}\cos ax = \frac{\sin a\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C_x \quad (a \neq 2n\pi);$$

$$\Delta^{-1}\binom{x}{r} = \binom{x}{r+1} + C_x;$$

$$\vdots$$

设函数 $\varphi(x)$ 定义在数集 $\{a, a+1, a+2, \cdots\}$ 上，a 是任意实数，k 为自然数，称 $\sum_{i=0}^{k-1}\varphi(a+i)$ 为函数 $\varphi(x)$ 的**有限和**. 显然，函数 $\varphi(x)$ 的有限和满足差分方程(1-13)，即有

$$\Delta\sum_{i=0}^{k-1}\varphi(a+i) = \varphi(a+k),$$

所以

$$\Delta^{-1}\varphi(a+k) = \sum_{i=0}^{k-1}\varphi(a+i) + C, \tag{1-14}$$

其中 C 为任意常数.

由此可得到如下定理.

定理 2 设函数 $\varphi(x)$ 定义在数集 $\{a, a+1, a+2, \cdots\}$ 上，a 是任意实数，若 $F(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的不定和，则

$$\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(a+i) = F(a+n) - F(a) = F(x)\Big|_a^{a+n}. \tag{1-15}$$

这就是函数**求和基本公式**，它类似于求定积分的牛顿 - 莱布尼兹(Newton-Leibniz)公式.

例 3 求和 $\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^i \quad (a \neq 1)$.

解 设 $\varphi(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$，则

$$\Delta^{-1}\varphi(x) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^x + C_x.$$

由(1-15)式，得

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^i = -3\left(\frac{2}{3}\right)^i\Big|_0^{n+1} = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 3.$$

例 4 求和 $\sum_{k=0}^{n}(2k^3 - 3k^2 + 3k - 10)$.

解 由阶乘函数定义，得

$$\sum_{k=0}^{n}(2k^3 - 3k^2 + 3k - 10) = \sum_{k=0}^{n}(-10 + 2k^{(1)} + 3k^{(2)} + 2k^{(3)}).$$

又 $$\Delta^{-1}(-10 + 2k^{(1)} + 3k^{(2)} + 2k^{(3)})$$

$$= \Delta^{-1}(-10) + 2\Delta^{-1}k^{(1)} + 3\Delta^{-1}k^{(2)} + 2\Delta^{-1}k^{(3)}$$

$$= -10k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} + \frac{1}{2}k^{(4)} + C.$$

所以,由(1-15)式得

$$\sum_{k=0}^{n}(2k^3 - 3k^2 + 3k - 10)$$

$$= \left(-10k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} + \frac{1}{2}k^{(4)}\right)\Big|_0^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^2 - 9n - 10.$$

对函数求和,需要掌握一定的技巧与方法,下面是分部求和法公式.

定理 3 1° 若 $m < n$,则

$$\sum_{k=m}^{n-1}a_kb_k = b_n\sum_{k=m}^{n-1}a_k - \sum_{k=m}^{n-1}\left(\sum_{i=m}^{k}a_i\right)\Delta b_k. \tag{1-16}$$

2° 若 $p \geqslant n$,则

$$\sum_{k=n}^{p}a_kb_k = b_{n-1}\sum_{k=n}^{p}a_k + \sum_{k=n}^{p}\left(\sum_{i=k}^{p}a_i\right)\Delta b_{k-1}. \tag{1-17}$$

公式(1-16)就是著名的阿贝尔(Abel)求和公式.

例 5 求和 $\sum_{k=1}^{n-1}k2^k$.

解 由公式(1-16),令 $a_k = 2^k$ 和 $b_k = k$ 得

$$\sum_{k=1}^{n-1}k2^k = n\sum_{k=1}^{n-1}2^k - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}2^i\right).$$

由(1-15)式得

$$\sum_{k=1}^{n-1}2^k = 2^n - 2.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n-1}k2^k = n(2^n - 2) - \sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1} - 2)$$

$$= n2^n - 2n - 2(2^n - 2) + 2(n - 1)$$

$$= n2^n - 2^{n+1} + 2.$$

值得指出的是,函数的求和就好像求定积分一样,大多数的和不能表示成初等函数,例如,和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

2 线性差分方程

若在差分方程(1-12)中的函数 Φ 关于 $y_x, y_{x+1}, \cdots, y_{x+n}$ 是线性的,即它可以写

成形式

$$p_0(x)y_{x+n}+p_1(x)y_{x+n-1}+\cdots+p_n(x)y_x=r(x),\tag{2-1}$$

则称其为 n 阶线性差分方程,其中 $r(x)$、$p_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 为给定的函数,称为系数,且 $p_0(x)\neq 0, p_n(x)\neq 0$.

若 $r(x)\equiv 0$,则称为 n **阶齐次线性差分方程**;若 $r(x)\neq 0$,则称为 n **阶非齐次线性差分方程**.

以下规定差分方程(2-1)中的自变量 x 取值于非负整数集 $\mathbf{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\}$,并记 x 为 k.

2.1 线性差分方程解的结构

求 n 阶线性差分方程(2-1)满足初值条件 $y(k_0)=a_0, y(k_1)=a_1,\cdots, y(k_{n-1})=a_{n-1}$ 的解 $y(k)$ 的问题,称为差分方程(2-1)的**初值问题**.其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为已知数,称为初值.

定理 1 (存在与唯一性定理)如果 n 阶线性差分方程(2-1)的初始条件为给定未知函数 y 的相继 n 个值

$y(k_0)=a_0, y(k_0+1)=a_1,\cdots,y(k_0+n-1)=a_{n-1}$,则它的初值问题的解存在且唯一.

例 1 讨论二阶线性差分方程

$$y_{k+2}-ky_{k+1}-y_k=0\tag{2-2}$$

满足下列初始条件的解的存在唯一性:

1° 已知 $y_0=0, y_2=1$;

2° 已知 $y_0=y_2=1$.

解 1° 当 $k=0$ 时,方程(2-2)变为 $y_2-y_0=0$,于是 $y_2=y_0=0$.这与给定的 $y_2=1$ 矛盾.故差分方程(2-2)满足初始条件 1° 的解不存在.

2° 当 $k=0$ 时,方程(2-2)变为 $y_2-y_0=0$,即 $y_2=y_0$,而 y_1 可以取任意值.因此,差分方程(2-2)满足初始条件 $y_0=y_2=1$ 的解存在,但不唯一.

这与定理 1 并不矛盾.因为定理 1 要求预先给定未知函数 y 的两个相继值.

显然,若函数 $f_1(k)$,$f_2(k)$ 是线性差分方程(2-1)的两个解,则函数 $C_1f_1(k)+C_2f_2(k)$ 也是这个差分方程的解,其中 C_1,C_2 为常数.

由此可知,线性差分方程(2-1)若有解,则必有无穷多个解.

定义 1 对于函数组 $f_1(k),f_2(k),\cdots,f_n(k)$,若存在 n 个不全为零的常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,使得

$$C_1f_1(k)+C_2f_2(k)+\cdots+C_nf_n(k)\equiv 0\quad(k\in\mathbf{Z}^+),$$

则称这 n 个函数是**线性相关的**;否则称为**线性无关的**.

定义 2 对于函数组 $f_1(k),f_2(k),\cdots,f_n(k)$,行列式

$$w(k) = \begin{vmatrix} f_1(k) & f_2(k) & \cdots & f_n(k) \\ f_1(k+1) & f_2(k+1) & \cdots & f_n(k+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(k+n+1) & f_2(k+n+1) & \cdots & f_n(k+n+1) \end{vmatrix},$$

称为这个函数组的**卡索拉蒂(Casorati)行列式**.

易知,它满足

$$w(k) = \begin{vmatrix} f_1(k) & f_2(k) & \cdots & f_n(k) \\ \Delta f_1(k) & \Delta f_2(k) & \cdots & \Delta f_n(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta^{n-1} f_1(k) & \Delta^{n-1} f_2(k) & \cdots & \Delta^{n-1} f_n(k) \end{vmatrix}.$$

卡索拉蒂行列式在差分方程中的作用,与朗斯基(Wronsky)行列式在微分方程中的作用类似.

定理 2　若函数组 $f_1(k), f_2(k), \cdots, f_n(k)$ 是差分方程(2-1)所对应的齐次差分方程

$$p_0(k)y_{n+k} + p_1(k)y_{n+k-1} + \cdots + p_n(k)y_k = 0 \tag{2-3}$$

的 n 个解,则下述 3 个命题等价:

1° 这 n 个解线性无关,

2° 对所有 $k \in \mathbf{Z}^+$,它们的卡索拉蒂行列式 $w(k) \neq 0$,

3° 对某一 $k_0 \in \mathbf{Z}^+$, $w(k_0) \neq 0$.

定义 3　如果 $f_1(k), f_2(k), \cdots, f_n(k)$ 是 n 阶齐次线性差分方程(2-3)的 n 个解,且它们的卡索拉蒂行列式 $w(k) \neq 0$,则这 n 个解称为这个 n 阶齐次线性差分方程的**基本解组**.

定理 3　如果 $f_1(k), f_2(k), \cdots, f_n(k)$ 是 n 阶齐次线性差分方程(2-3)的基本解组,则这个方程的通解为

$$\varphi(k) = C_1 f_1(k) + C_2 f_2(k) + \cdots + C_n f_n(k),$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是任意常数.

定理 4　n 阶非齐次线性差分方程(2-1)的通解 $f(k)$,可以表示成它的一个特解 $f^*(k)$ 与对应的齐次线性方程(2-3)的通解之和.也就是

$$f(k) = C_1 f_1(k) + C_2 f_2(k) + \cdots + C_n f_n(k) + f^*(k),$$

其中 $f_1(k), f_2(k), \cdots, f_n(k)$ 为对应齐次方程(2-3)的基本解组, $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数.

齐次线性差分方程(2-3)的解与方程的系数有如下关系:

定理 5　若 $f_1(k), f_2(k), \cdots, f_n(k)$ 是差分方程(2-3)的解,并且它们的卡索拉蒂行列式为 $w(k)$,则 $w(k)$ 满足方程

$$w(k+1) = (-1)^n \frac{p_n(k)}{p_0(k)} w(k).$$

现在假设 $f_1(k)$ 是二阶方程

$$p_0(k)f(k+2) + p_1(k)f(k+1) + p_2(k)f(k) = 0$$

的一个非零解,并且记 $f_2(k)$ 是另一个线性无关的解.注意到

$$\Delta\frac{f_2(k)}{f_1(k)}=\frac{f_1(k)\Delta f_2(k)-f_2(k)\Delta f_1(k)}{f_1(k)f_1(k+1)}$$
$$=\frac{w(k)}{f_1(k)f_2(k+1)}.$$

因此

$$f_2(k)=f_1(k)\Delta^{-1}\frac{w(k)}{f_1(k)f_1(k+1)}.$$

由此可以得到二阶线性差分方程的一个降阶解法.

例 2 解差分方程

$$y_{k+2}-y_{k+1}-\frac{1}{k+1}y_k=0.$$

解 由观察知 $f_1(k)=k+1$ 是方程的一个非零解.设 $f_2(k)$ 是方程的另一个线性无关的解.这时,它们的卡索拉蒂行列式满足方程

$$w(k+1)=-\frac{1}{k+1}w(k).$$

我们选择它的一个解

$$w(k)=\frac{(-1)^k}{k!}.$$

因此

$$f_2(k)=(k+1)\Delta^{-1}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)(k+2)}$$
$$=(k+1)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(-1)^i}{(i+2)!}.$$

于是,原方程的通解为

$$y_k=C_1(k+1)+C_2(k+1)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(-1)^i}{(i+2)!},$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

2.2 求非齐次线性差分方程特解的常数变易法

如果已知非齐次线性差分方程(2-1)的一个特解,以及它对应的齐次方程(2-3)的通解,那么由定理4就可以构成这个非齐次线性差分方程的通解.现在假定已经知道对应的齐次方程(2-3)的通解,那么,就可以用**常数变易法**来求出这个非齐次线性差分方程的一个特解.常数变易法的步骤如下:

1° 设已知齐次线性差分方程(2-3)的通解为

$$\varphi(k)=C_1f_1(k)+C_2f_2(k)+\cdots+C_nf_n(k),$$

其中 $C_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为任意常数.

2° 把 C_i 看作 k 的函数 $C_i(k)(i=1,2,\cdots,n)$,并设

$$f^*(k) = C_1(k)f_1(k) + C_2(k)f_2(k) + \cdots + C_n(k)f_n(k) \tag{2-4}$$

为非齐次线性差分方程(2-1)的一个特解.将它代入(2-1)式并化简,就得到函数 $C_i(k)(i = 1,2,\cdots,n)$ 满足方程组

$$\begin{cases} \Delta C_1(k)\cdot f_1(k+1) + \cdots + \Delta C_n(k)\cdot f_n(k+1) = 0, \\ \Delta C_1(k)\cdot f_1(k+2) + \cdots + \Delta C_n(k)\cdot f_n(k+2) = 0, \\ \quad\vdots \\ \Delta C_1(k)\cdot f_1(k+n) + \cdots + \Delta C_n(k)\cdot f_n(k+n) = r(k), \end{cases} \tag{2-5}$$

其中 $\Delta C_i(k) = C_i(k+1) - C_i(k)\ (i = 1,2,\cdots,n)$.

3° 从方程组(2-5)中解出 $\Delta C_i(k)$,从而再解出 $C_i(k)$.最后将它们代入(2-4)式就得到非齐次线性差分方程(2-1)的一个特解 $f^*(k)$.于是就得到非齐次线性差分方程(2-1)的通解.

例3 求解一阶线性差分方程

$$y_{k+1} - p(k)y_k = r(k). \tag{2-6}$$

解 差分方程(2-6)对应的齐次方程为

$$y_{k+1} - p(k)y_k = 0. \tag{2-7}$$

首先求差分方程(2-7)的通解.取 y_0 为任意常数 C.由(2-7)式得

$$\begin{aligned} y_1 &= p(0)C, \\ y_2 &= p(1)y_1, \\ &\vdots \\ y_k &= p(k-1)y_{k-1}, \end{aligned}$$

逐项相乘起来,并化简得

$$y_k = C\prod_{i=0}^{k-1}p(i).$$

由常数变易法,令

$$y_k^* = C(k)\prod_{i=0}^{k-1}p(i) \tag{2-8}$$

为非齐次线性差分方程(2-6)的一个特解,代入方程(2-6)得

$$C(k+1)\prod_{i=0}^{k}p(i) - p(k)\cdot C(k)\prod_{i=0}^{k-1}p(i) = r(k)$$

或

$$\Delta C(k) = \frac{r(k)}{\prod_{i=0}^{k}p(i)}.$$

于是由(1-14)式得

$$C(k) = \sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{r(\nu)}{\prod_{i=0}^{\nu}p(i)},$$

因此,差分方程(2-6)的通解为

$$y_k = C\prod_{i=0}^{k-1}p(i) + \left[\prod_{i=0}^{k-1}p(i)\right]\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{r(\nu)}{\prod_{i=0}^{\nu}p(i)}, \tag{2-9}$$

其中 C 为任意常数.

例 4 求解二阶差分方程

$$\Delta^2 y_k = r(k), \quad 或 \quad y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = r(k). \tag{2-10}$$

解 方程(2-10)对应的齐次方程

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 0 \tag{2-11}$$

的基本解组为 $1, k$. 因此,齐次线性差分方程(2-11)的通解为

$$y_k = C_1 + C_2 k,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

现设

$$y_k^* = C_1(k) + C_2(k)\cdot k \tag{2-12}$$

为非齐次线性差分方程(2-10)的一个特解.由(2-5)式选择函数 $C_1(k)$、$C_2(k)$,使它们满足方程组

$$\begin{cases}\Delta C_1(k) + \Delta C_2(k)\cdot(k+1) = 0, \\ \Delta C_1(k) + \Delta C_2(k)\cdot(k+2) = r(k),\end{cases}$$

其中 $\Delta C_i(k) = C_i(k+1) - C_i(k)\ (i = 1,2)$.

解这个方程组得

$$\Delta C_1(k) = -(k+1)\cdot r(k),$$

$$\Delta C_2(k) = r(k),$$

于是

$$C_1(k) = -\sum_{i=1}^{k-1}(i+1)r(i),$$

$$C_2(k) = \sum_{i=0}^{k-1}r(i),$$

代入(2-12)式就得到非齐次线性差分方程(2-10)的一个特解

$$y_k^* = -\sum_{i=0}^{k-1}(i+1)r(i) + k\sum_{i=0}^{k-1}r(i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}(k-1-i)r(i).$$

所以,原方程(2-10)的通解为

$$y_k = C_1 + C_2 k + \sum_{i=0}^{k-1}(k-1-i)r(i).$$

2.3 n 阶常系数齐次线性差分方程

考虑 n 阶常系数齐次线性差分方程

$$a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_n y_k = 0, \tag{2-13}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为常数,且 $a_0\neq 0,a_n\neq 0$.

令

$$y_k=\lambda^k$$

为差分方程(2-13)的解,并代入差分方程(2-13),就得到

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0,\tag{2-14}$$

称(2-14)式为差分方程(2-13)的**特征方程**,特征方程的根,称为**特征根**.

以下分3种情形:

(1) 如果特征方程有 n 个相异的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则差分方程(2-13)的通解为

$$y_k=C_1\lambda_1^k+C_2\lambda_2^k+\cdots+C_n\lambda_n^k.\tag{2-15}$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为任意常数.

例5　求差分方程

$$y_{k+2}=y_{k+1}+y_k$$

满足初始条件 $y_0=0,y_1=1$ 的特解.

解　特征方程为 $\lambda^2-\lambda-1=0$,其特征根为

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

因此,差分方程的通解为

$$y_k=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

再由初始条件 $y_0=0$ 和 $y_1=1$,得

$$C_1=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad C_2=\frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

所以,差分方程满足初始条件的特解为

$$y_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

这就是著名的**斐波那契(Fibonacci)数列**.

(2) 如果特征方程有一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=r(\cos\theta\pm \mathrm{i}\sin\theta)$,其余为相异实根 $\lambda_3,\lambda_4,\cdots,\lambda_n$.则差分方程(2-13)的通解为

$$y_k=C_1r^k\cos k\theta+C_2r^k\sin k\theta+C_3\lambda_3^k+\cdots+C_n\lambda_n^k.\tag{2-16}$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为任意常数.

例6　解差分方程

$$y_{k+2}-2\beta y_{k+1}+\beta y_k=0,$$

其中 $\beta(0<\beta<1)$ 为常数.

解　特征方程为

$$\lambda^2-2\beta\lambda+\beta=0,$$

特征根为

$$\lambda_{1,2}=\beta\pm \mathrm{i}\sqrt{\beta(1-\beta)}=\sqrt{\beta}(\cos\theta\pm \mathrm{i}\sin\theta),$$

其中 $$\theta = \arctan\frac{\sqrt{\beta(1-\beta)}}{\beta} = \arcsin\sqrt{1-\beta}.$$
所以,差分方程的通解为
$$y_k = (\sqrt{\beta})^k[C_1\cos k(\arcsin\sqrt{1-\beta}) + C_2\sin k(\arcsin\sqrt{1-\beta})].$$
其中 C_1, C_2 为任意常数.

(3) 如果特征方程有 m 重根$(1 < m \leqslant n)\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m$,而其余为相异实根 $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \cdots, \lambda_n$,则差分方程(2-13)的通解为
$$y_k = (C_1 + C_2k + \cdots + C_mk^{m-1})\lambda_1^k + C_{m+1}\lambda_{m+1}^k + \cdots + C_n\lambda_n^k. \qquad (2\text{-}17)$$
其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数.

例 7 解差分方程 $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = 0.$

解 特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$,其特征根为 $\lambda_{1,2} = 1$.

差分方程的通解为 $y_k = C_1 + C_2k.$

其中 C_1、C_2 为任意常数.

特征方程有多对共轭复根、或多个重根的情形类似处理.

2.4 n 阶常系数非齐次线性差分方程

考虑 n 阶常系数非齐次线性差分方程
$$a_0y_{k+n} + a_1y_{k+n-1} + \cdots + a_ny_k = r(k), \qquad (2\text{-}18)$$
其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为常数,且 $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$.

由定理5,可以先求出它对应的齐次线性差分方程的通解,然后再求出这个非齐次线性差分方程的一个特解,从而就得到它的通解.求它的特解固然可以采用上面所讲的常数变易法,但往往较繁.当方程(2-18)的右边 $r(k)$ 是某些特定形式时,用下面叙述的待定系数法、算子运算法,母函数法等来求出它的特解较为简便.

2.4.1 待定系数法

叠加原理 设有非齐次线性差分方程
$$a_0y_{k+n} + a_1y_{k+n-1} + \cdots + a_ny_k = r_1(k) + r_2(k), \qquad (2\text{-}19)$$
且 $f_i(k)$ $(i = 1,2)$ 分别是下列方程
$$a_0y_{k+n} + a_1y_{k+n-1} + \cdots + a_ny_k = r_i(k)(i = 1,2)$$
的解.则函数 $f_1(k) + f_2(k)$ 是方程(2-19)的解.

当非齐次方程(2-18)的右边函数 $r(k)$ 为下列各种特定形式时,差分方程(2-18)分别有相应的特解的形式.其中的待定系数可以通过代入原差分方程来确定.

1° $r(k) = b^kp(k)$,$p(k)$ 为 k 的多项式.

如果 b 为 m 重特征根,则特解的形式为
$$y_k = k^m \cdot Q(k) \cdot b^k,$$
其中待定多项式 $Q(k)$ 与已知多项式 $p(k)$ 的次数相同.

2° $r(k) = b^k\sin\alpha k$ 或 $r(k) = b^k\cos\alpha k$.

如果 $be^{\pm\alpha i}$ 是 m 重特征根,则特解的形式为

$$y_k = k^m \cdot b^k \cdot (A\cos\alpha k + B\sin\alpha k),$$

其中 A, B 为待定系数.

例 8　解差分方程

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 3k + 2^k. \tag{2-20}$$

解　特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$,其特征根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

由于 1 不是特征根,所以方程

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 3k \tag{2-21}$$

的特解 $f_1(k)$ 有形式 $f_1(k) = A_0 + A_1k$.代入方程(2-21)并化简得

$$A_0 - 2A_1 + A_1k = 3k.$$

比较等式两边 k 的同次幂的系数,得到

$$A_0 - 2A_1 = 0,\quad A_1 = 3,$$

因此,$A_0 = 6, A_1 = 3$.

又 2 是 2 重特征根,所以方程

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 2^k \tag{2-22}$$

的特解 $f_2(k)$ 有形式 $f_2(k) = A_3k^2 \cdot 2^k$.代入方程(2-22)并化简得

$$8A_3 \cdot 2^k = 2^k.$$

因此,$A_3 = \frac{1}{8}$.

由迭加原理知

$$y_k^* = f_1(k) + f_2(k) = 6 + 3k + \frac{1}{8}k^2 \cdot 2^k$$

为方程(2-20)的一个特解.所以,方程(2-20)的通解为

$$y_k = (C_1 + C_2k)2^k + 6 + 3k + \frac{1}{8}k^2 \cdot 2^k,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 9　解差分方程

$$y_{k+1} + \beta y_k + y_{k-1} = r\sin\alpha k, \tag{2-23}$$

其中 α, β, r 为常数,且 $\beta = -2\cos\alpha$.

解　特征方程为

$\lambda^2 + \beta\lambda + 1 = 0$,或 $\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$,

特征根为　　$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\alpha}$.

这时差分方程(2-23)的特解有形式

$$y_k^* = Ak\sin\alpha k + Bk\cos\alpha k.$$

代入原方程(2-23),注意到 $\beta = -2\cos\alpha$,化简得

$$2A\sin\alpha\cos\alpha k - 2B\sin\alpha\sin\alpha k = r\sin\alpha k,$$

由此得 $A=0, B=-\frac{r}{2\sin\alpha}$，因此，方程的特解为

$$y_k^*=-\frac{rk\cos\alpha k}{2\sin\alpha}.$$

所以，方程(2-23)的通解为

$$y_k=C_1\sin\alpha k+C_2\cos\alpha k-\frac{rk\cos\alpha k}{2\sin\alpha}.$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

2.4.2 算子运算法

记 $\mathrm{E}y_k=y_{k+1}$，E 称为**位移算子**，它表明将 E 作用于 y_k，就得出 y_{k+1}.

位移算子 E 与 1.2 节的差分算子 Δ 有下述性质：

1° $\mathrm{E}\equiv 1+\Delta$ 或 $\Delta=\mathrm{E}-1$；

2° $\mathrm{E}^n=(1+\Delta)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\Delta^i, \binom{n}{0}=\Delta^0=1$；

3° 若 $f(\mathrm{E})$ 是 E 所成的多项式，则

$$f(\mathrm{E})a^k=a^k\cdot f(a);$$

4° 若 $F(k)$ 是 k 的函数，则

$$f(\mathrm{E})a^kF(k)=a^kf(a\mathrm{E})F(k);$$

5° $(\mathrm{E}-a)^na^kF(k)=a^ka^n(\mathrm{E}-1)^nF(k)=a^ka^n\Delta^nF(k)$；

若定义 $\frac{1}{f(\mathrm{E})}z(k)$ 表示经算子 $f(\mathrm{E})$ 作用后成为 $z(k)$ 的式子，则有

6° $\frac{1}{f(\mathrm{E})}a^k=\frac{1}{f(a)}a^k \quad (f(a)\neq 0)$；

7° 若 $\varphi(k)$ 表示 k 的多项式，则

$$\frac{1}{f(\mathrm{E})}a^k\varphi(k)=a^k\frac{1}{f(a\mathrm{E})}\varphi(k)\ (f(a\mathrm{E})\neq 0);$$

8° $\frac{1}{(\mathrm{E}-a)^n}a^k=\frac{k^{(n)}a^{k-n}}{n!}$；

9° 若 $f(\Delta)$ 是 Δ 所成的多项式，则

$$f(\Delta)a^k=a^kf(a-1).$$

现在把常系数非齐次线性差分方程(2-18)写成

$$f(\mathrm{E})y_k=r(k),$$

其中 $f(\mathrm{E})=a_0\mathrm{E}^n+a_1\mathrm{E}^{n-1}+\cdots+a_n$. 利用算子的运算方法，就可求得非齐次线性差分方程(2-18)的特解

$$y_k=\frac{1}{f(\mathrm{E})}r(k),$$

从而就得到方程(2-18)的通解.

例 10 解差分方程

$$(\mathrm{E}^2-5\mathrm{E}+6)y_k=3^k.$$

解　特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$,其特征根为

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=2.$$

由上面的性质 6° 和 8°,得原方程的特解为

$$y_k^*=\frac{1}{E^2-5E+6}3^k=\frac{1}{E-3}\cdot\frac{1}{E-2}3^k$$

$$=\frac{1}{E-3}\cdot3^k=k3^{k-1}.$$

所以,原方程的通解为

$$y_k=C_13^k+C_22^k+k3^{k-1},$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

例 11　解差分方程

$$y_{k+2}-7y_{k+1}-8y_k=k^{(2)}2^k. \tag{2-24}$$

解　特征方程为 $\lambda^2-7\lambda-8=0$,其特征根为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=8.$$

由上面性质 7°,方程(2-24)的特解为

$$y_k^*=\frac{1}{E^2-7E-8}2^k\cdot k^{(2)}=2^k\frac{1}{4E^2-14E-8}k^{(2)}$$

$$=2^k\frac{1}{-18-6\Delta+4\Delta^2}\cdot k^{(2)}\qquad(E=1+\Delta)$$

$$=2^k\left(-\frac{1}{18}+\frac{1}{54}\Delta-\frac{1}{54}\Delta^2-\cdots\right)k^{(2)}=-\frac{2^k}{54}(k^2-5k+2).$$

所以,方程(2-24)的通解为

$$y_k=C_1(-1)^k+C_28^k-\frac{2^k}{54}(k^2-5k+2).$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

2.4.3　母函数法

母函数法是解差分方程初值问题的一种很有效方法.适用于解常系数差分方程,也适用于解某些变系数差分方程和非线性方程.

定义 4　设 $\{a_k\}=\{a_0,a_1,\cdots,a_k,\cdots\}$ 为一个无限数列,则称函数

$$G(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k \tag{2-25}$$

为数列 $\{a_n\}$ 的**母函数**,其中变数 t 属于 0 点的某个开区间.

母函数有下列性质:

1° 若数列 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 的母函数分别为 $G_1(t)$ 和 $G_2(t)$,则数列 $\{a_k\pm b_k\}$ 的母函数为 $G_1(t)\pm G_2(t)$.

2° 若数列 $\{a_k\}$ 的母函数为 $G(t)$,则数列 $\{Ca_k\}$ 的母函数为 $CG(t)$,其中 C 为常数.

3° 若数列 $\{a_k\}$ 的母函数为 $G(t)$,则

数列$\{a_{k+1}\}$的母函数为$\dfrac{G(t)-a_0}{t}$,

数列$\{a_{k+2}\}$的母函数为$\dfrac{G(t)-a_0-a_1t}{t^2}$,

⋮

数列$\{a_{k+n}\}$的母函数为$\dfrac{G(t)-\sum_{i=0}^{n-1}a_it^i}{t^n}$.

数列的母函数的公式表,可以由 2.6.2 节介绍的方法相应得出.

利用母函数方法解差分方程的初值问题的步骤是

1° 以差分方程的解数列$\{y_k\}$作母函数

$$G(t)=\sum_{k=0}^{\infty}y_kt^k;$$

2° 利用所给的差分方程和初始条件,建立 $G(t)$ 所满足的关系式;

3° 解出 $G(t)$;

4° 求出函数 $G(t)$ 的展开式的系数,就得到所给的差分方程初值问题的解.

例 12 求差分方程

$$y_{k+2}-5y_{k+1}+6y_k=0 \tag{2-26}$$

满足初始条件 $y_0=0$ 和 $y_1=1$ 的解.

解 设 $G(t)=\sum_{k=0}^{\infty}y_kt^k$,由母函数的性质 3° 及初始条件得

$$\sum_{k=0}^{\infty}y_{k+1}t^k=\frac{G(t)}{t},$$

及

$$\sum_{k=0}^{\infty}y_{k+2}t^k=\frac{G(t)-t}{t^2}.$$

方程(2-26)两边乘以 t^k,然后 k 从 0 到 $+\infty$ 求和得

$$\sum_{k=0}^{\infty}y_{k+2}t^k-5\sum_{k=0}^{\infty}y_{k+1}t^k+6\sum_{k=0}^{\infty}y_kt^k=0,$$

即

$$\frac{G(t)-t}{t^2}-5\frac{G(t)}{t}+6G(t)=0.$$

解出 $G(t)$,得

$$G(t)=\frac{t}{1-5t+6t^2}=\frac{1}{1-3t}-\frac{1}{1-2t}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(3t)^k-\sum_{k=0}^{\infty}(2t)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(3^k-2^k)t^k.$$

所以,差分方程(2-26)的初值问题的解为

$$y_k=3^k-2^k.$$

2.5 变系数线性差分方程及非线性差分方程

对于二阶或高阶的变系数差分方程，以及非线性差分方程，没有一般的方法求出其精确解，只有当方程的系数有着一定的限制，或者方程是某些特定形式时，才可以利用特殊的技巧与方法来求出它的解.

一般可考虑采用下述方法来求变系数线性差分方程及非线性差分方程的解.

2.5.1 化变系数方程为常系数方程

某些变系数差分方程，可以通过变量代换化为常系数方程.

(1) 对方程

$$a f_{k+2} y_{k+2} + b f_{k+1} y_{k+1} + c f_k y_k = r_k,$$

作变量代换 $z_k = f_k y_k$，即可将方程化为关于 z_k 的常系数方程.

(2) 对方程

$$a f_k f_{k+1} y_{k+2} + b f_k f_{k+2} y_{k+1} + c f_{k+1} f_{k+2} y_k = r_k,$$

作变量代换 $y_k = f_k z_k$，即可将方程化为关于 z_k 的常系数方程

$$a z_{k+2} + b z_{k+1} + c z_k = \frac{r_k}{f_{k+2} f_{k+1} f_k}.$$

(3) 对方程

$$a_0 y_{k+n} + a_1 f_k y_{k+n-1} + a_2 f_k f_{k-1} y_{k+n-2} + \cdots + a_n f_k f_{k-1} \cdots f_{k-n+1} y_k = r_k,$$

(其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数) 作变量代换

$$y_k = f_{k-n} f_{k-n-1} \cdots f_j z_k (k \geqslant n + j),$$

代入原方程，并在方程两边除以 $f_k f_{k-1} \cdots f_j$，即可将方程化为关于 z_k 的常系数方程

$$a_0 z_{k+n} + a_1 z_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} z_{k+1} + a_n z_k = \frac{r_k}{f_k f_{k-1} \cdots f_j}.$$

2.5.2 二阶或高阶方程的降阶

对于变系数线性差分方程，若知道它对应的齐次方程的一个非零解 φ_k，则作变量代换 $y_k = \varphi_k z_k$ 可以降阶. 此外，某些特殊形式的方程也可以通过变量代换实现降阶.

例 13 解差分方程

$$y_{k+2} - \frac{2k+1}{k} y_{k+1} + \frac{k}{k-1} y_k = (k+1)k. \tag{2-27}$$

解 由观察知，对应齐次方程有一特解 $\varphi_k = k - 1$. 作变量代换 $y_k = (k - 1) z_k$，则

$$y_{k+1} = k z_{k+1} = k(z_k + \Delta z_k),$$

$$y_{k+2} = (k+1) z_{k+2} = (k+1)(z_k + 2\Delta z_k + \Delta^2 z_k).$$

代入方程(2-27)，注意到 $\varphi_k = k-1$ 是对应齐次方程的解，化简就得到关于 $k\Delta z_k$ 的一阶差分方程

$$(k+1)\Delta z_{k+1} - k\Delta z_k = (k+1)k,$$

解之得

$$k\Delta z_k = \Delta^{-1}[(k+1)k] = \Delta^{-1}[k^{(2)} + 2k^{(1)}]$$
$$= \frac{k^{(3)}}{3} + k^{(2)} + C_1,$$

因此，
$$\Delta z_k = \frac{k^2-1}{3} + \frac{C_1}{k} = \frac{1}{3}(k^{(2)} + k^{(1)} - 1) + \frac{C_1}{k}$$

于是
$$z_k = \frac{1}{3}\Delta^{-1}(k^{(2)} + k^{(1)} - 1) + C_2 + \Delta^{-1}\frac{C_1}{k}$$
$$= \frac{(k+1)k(2k-5)}{18} + C_2 + C_1\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i},$$

所以，方程(2-27)的通解为

$$y_k = \frac{(k+1)k(k-1)(2k-5)}{18} + C_2(k-1) + C_1(k-1)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}.$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

例 14　解差分方程

$$[y_{k+2} - (k+1)y_{k+1}] - k[y_{k+1} - ky_k] = 0. \tag{2-28}$$

解　设 $z_k = y_{k+1} - ky_k (k \geqslant 1)$. 那么，方程(2-28)化为

$$z_{k+1} - kz_k = 0,$$

它的解为 $z_k = C_1(k-1)!$，其中 C_1 为任意常数. 因此

$$y_{k+1} - ky_k = C_1(k-1)!,$$

两边除以 $k!$，可得

$$\Delta\left[\frac{y_k}{(k-1)!}\right] = \frac{y_{k+1}}{k!} - \frac{y_k}{(k-1)!} = \frac{C_1}{k},$$

所以，方程(2-28)的通解为

$$y_k = C_1(k-1)!\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i} + C_2(k-1)!$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

2.5.3　算子的因式分解

如果能把算子多项式 $f(E)$ 因式分解为

$$f(E) = (E - a_k)\cdot(E - b_k)\cdots(E - g_l),$$

那么，方程 $f(E)y_k = r_k$ 就等价于方程

$$(E - a_k)(E - b_k)\cdots(E - g_k)y_k = r_k,$$

这样，就可以通过降阶求出差分方程的解.

例 15　解差分方程

$$y_{k+2} - (k+2)y_{k+1} + ky_k = k.$$

解　差分方程可改写为

$$[\mathrm{E}^2-(k+2)\mathrm{E}+k]y_k=k.$$

将左边的算子多项式因式分解，得

$$(\mathrm{E}-1)(\mathrm{E}-k)y_k=k.$$

先设 $z_k=(\mathrm{E}-k)y_k$，上式变为 $(\mathrm{E}-1)z_k=k$. 注意到 $\Delta=\mathrm{E}-1$，

于是

$$z_k=\Delta^{-1}k=\frac{k^{(2)}}{2}+C_1.$$

再解方程

$$(\mathrm{E}-k)y_k=\frac{k^{(2)}}{2}+C_1,$$

即

$$y_{k+1}-ky_k=\frac{1}{2}k(k-1)+C_1.$$

由本章例 3 的(2-9) 式，就得到差分方程的通解

$$y_k=C_2(k-1)!+(k-1)!\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\frac{1}{2}i(i-1)+C_1}{i!},$$

其中 C_1,C_2 是任意常数.

2.5.4　母函数法

下面举例说明如何用母函数法来解变系数线性差分方程和非线性差分方程.

例 16　求差分方程

$$(k+2)(k+1)y_{k+2}-2(k+1)y_{k+1}-3y_k=0 \tag{2-29}$$

满足初始条件 $y_0=2$ 和 $y_1=2$ 的解.

解　设 $G(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}y_kt^k$，对 t 求导数得

$$G'(t)=\sum_{k=0}^{\infty}ky_kt^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)y_{k+1}t^k,$$

$$G''(t)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)y_kt^{k-2}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)y_{k+2}t^k.$$

方程(2-29) 两边乘以 t^k，然后 k 从 0 到 $+\infty$ 求和得

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)y_{k+2}t^k-2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)y_{k+1}t^k-3\sum_{k=0}^{\infty}y_kt^k=0$$

或

$$G''(t)-2G'(t)-3G(t)=0.$$

解之得

$$G(t)=C_1\mathrm{e}^{3t}+C_2\mathrm{e}^{-t}.$$

由初值条件 $y_0=2,y_1=2$ 得

$$G(0)=2,\quad G'(0)=2,$$

从而 $C_1=1,C_2=1$. 因此

$$G(t)=e^{3t}+e^{2t},$$

所以,方程(2-29)的初值问题的解为

$$y_k=\frac{1}{k!}\left.\frac{\mathrm{d}^kG(t)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0}=\frac{1}{k!}[3^k+(-1)^k].$$

例 17 把式子

$$w_1+w_2+\cdots+w_{n-1}+w_n \tag{2-30}$$

添上括号使得一次只有两项相加,例如,$w_1+w_2+w_3+w_4$ 可以添上括号成为 $(w_1+w_2)+(w_3+w_4)$,或 $w_1+(w_2+w_3)+w_4$,⋯.求加括号的方法的个数.

解 用 y_k 表示对一个具有 k 项的式子添上括号的方法的个数.考虑两个部分式子

$$w_1+w_2+\cdots+w_{n-r},\qquad w_{n-r+1}+w_{n-r+2}+\cdots+w_n, \tag{2-31}$$

则有 y_{n-r} 种方法对第一个式子添上括号,有 y_r 种方法对第二个式子添上括号.由此知道有 $y_{n-r}\cdot y_r$ 种方法对整个式子(2-30)添上括号,而它是由(2-31)式的两部分添上括号连接起来而成.让 r 从 1 到 $n-1$ 取值就得到差分方程

$$y_n=y_{n-1}y_1+y_{n-2}y_2+\cdots+y_2y_{n-2}+y_1y_{n-1}, \tag{2-32}$$

其中 $n\geqslant 2$.

注意到 $y_1=1,y_0=0$,可以把差分方程(2-32)改写为

$$y_n=y_ny_0+y_{n-1}y_1+\cdots+y_1y_{n-1}+y_0y_n. \tag{2-33}$$

设

$$G(t)=\sum_{n=0}^{\infty}y_nt^n.$$

方程(2-33)两边乘以 t^n,然后 n 从 2 到 $+\infty$ 求和得

$$\sum_{n=2}^{\infty}y_nt^n=\sum_{n=2}^{\infty}(y_ny_0+y_{n-1}y_1+\cdots+y_1y_{n-1}+y_0y_n)t^n,$$

因此,

$$G(t)-y_1t-y_0=G^2(t)-y_0^2-(y_1y_0+y_0y_1)t$$

解出 $G(t)$,得

$$G(t)=\frac{1\pm\sqrt{1-4t}}{2}.$$

注意到 $\frac{1+\sqrt{1-4t}}{2}$ 产生负数数列,舍去.取

$$G(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4t}.$$

函数 $G(t)$ 的展开式为

$$\begin{aligned}G(t)&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4t)^n\right]\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times1\times3\times5\cdots\times(2n-3)}{n!}2^nt^n\right]\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} t^n. \tag{2-34}$$

于是，由(2-34)式得

$$y_n = \begin{cases} 0 & (n=0), \\ \dfrac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1} & (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

2.5.5 化非线性方程为线性方程

某些特殊形式的非线性差分方程，可以通过变量代换化为线性方程。

例如，关于 y_{k+1}, y_k 的齐次方程

$$f\left(\frac{y_{k+1}}{y_k}, k\right) = 0, \tag{2-35}$$

可通过作变量代换 $z = \dfrac{y_{k+1}}{y_k}$，化为线性方程. 其中 f 是关于 y_{k+1}, y_k 的齐次函数.

例 18 解差分方程

$$y_{k+1}^2 - 5y_{k+1}y_k + 6y_k^2 = 0.$$

解 作变量代换 $z = \dfrac{y_{k+1}}{y_k}$，代入方程化简得

$$z_k^2 - 5z_k + 6 = 0$$

解之得
$$z_k = 3, \quad 或 \quad z_k = 2,$$
即
$$y_{k+1} = 3y_k, \quad 或 \quad y_{k+1} = 2y_k,$$
所以，差分方程的解为

$$y_k = C_1 3^k, \quad 或 \quad y_k = C_2 2^k.$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 19 考虑差分方程

$$y_k = \frac{cy_{k-1} + d}{ay_{k-1} + b} \ (a \neq 0). \tag{2-36}$$

对方程
$$\lambda = \frac{c\lambda + d}{a\lambda + b}, 或 \lambda^2 + (b-c)\lambda - d = 0$$
的根分两种情形讨论：

1° 有相异根 α, β. 这时，差分方程(2-36)可化为

$$\frac{y_k - \alpha}{y_k - \beta} = \frac{a\beta + b}{a\alpha + b}\left(\frac{y_{k-1} - \alpha}{y_{k-1} - \beta}\right).$$

作变量代换 $z_k = \dfrac{y_k - \alpha}{y_k - \beta}$，上述方程就化为线性方程

$$z_k = \frac{a\beta + b}{a\alpha + b} z_{k-1}.$$

2° 有相等实根 α. 这时，差分方程(2-36)可化为

$$\frac{1}{y_k - \alpha} = \frac{a\alpha + b}{c - a\alpha} \cdot \frac{1}{y_{k-1} - \alpha} + \frac{a}{c - a\alpha}.$$

作变量代换 $z_k = \frac{1}{y_k - \alpha}$，就化为线性方程

$$z_k = \frac{a\alpha + b}{c - a\alpha} \cdot z_{k-1} + \frac{a}{c - a\alpha}.$$

例 20　里卡蒂方程

$$y_{k+1}y_k + p_k y_{k+1} + q_k y_k + r_k = 0. \tag{2-37}$$

作变量代换 $y_k = \frac{z_{k+1}}{z_k} - p_k$，就化为二阶线性方程

$$z_{k+2} + (q_k - p_k)z_{k+1} + (r_k - p_k q_k)z_k = 0.$$

特别地，当 $r_k = 0$ 时，方程(2-37)两边除以 $y_{k+1}y_k$，就得到

$$1 + \frac{p_k}{y_k} + \frac{q_k}{y_{k+1}} = 0.$$

作变量代换 $z_k = \frac{1}{y_k}$，就化为一阶线性方程

$$q_k z_{k+1} + p_k z_k + 1 = 0.$$

例 21　解差分方程　$y_{k+1} = 2y_k(1 - y_k)$.

解　作变量代换 $y_k = \frac{1}{2} - e^{-z_k}$，代入原方程得

$$\frac{1}{2} - e^{-z_{k+1}} = 2\left(\frac{1}{2} - e^{-z_k}\right)\left(e^{-z_k} + \frac{1}{2}\right),$$

或
$$e^{-z_{k+1}} = 2e^{-2z_k},$$

由此得一阶线性差分方程　$z_{k+1} = 2z_k - \ln 2$，其解为

$$z_k = C2^k + \ln 2,$$

从而原方程的解为

$$y_k = \frac{1}{2}(1 - e^{-C2^k}),$$

其中 C 为任意常数.

2.5.6　利用函数恒等式解非线性方程

利用某些函数恒等式，可以求解某些特殊形式的非线性差分方程.

例 22　解差分方程

$$y_k y_{k+1} - p_k(y_{k+1} - y_k) + 1 = 0.$$

解　原方程可改写为

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{1 + y_{k+1}y_k} = \frac{1}{p_k}.$$

作变量代换 $y_k = \tan z_k$，上式变为

$$\frac{\tan z_{k+1} - \tan z_k}{1 + \tan z_{k+1} \cdot \tan z_k} = \frac{1}{p_k}.$$

利用函数恒等式

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}.$$

上式可以化为

$$\tan\Delta z_k=\frac{1}{p_k}\quad \text{或}\quad \Delta z_k=\arctan\frac{1}{p_k}.$$

解之得

$$z_k=\Delta^{-1}\arctan\frac{1}{p_k}=\sum_{i=1}^{k-1}\arctan\frac{1}{p_k}+C$$

其中 C 为任意常数.所以

$$y_k=\tan\left[\sum_{i=1}^{k-1}\arctan\frac{1}{p_k}+C\right].$$

例 23　解差分方程

$$y_{k+1}=ay_k^2+by_k+c,$$

其中 a,b,c 为常数,$c\neq 0$ 且 $b^2-4ac-2b=8$.

解　方程两边同乘以$\frac{a}{2}$,配平方得

$$\left(\frac{a}{2}y_{k+1}+\frac{b}{4}\right)=2\left(\frac{a}{2}y_k+\frac{b}{4}\right)^2-\frac{1}{8}(b^2-4ac-2b),$$

令 $z_k=\frac{a}{2}y_k+\frac{b}{4}$,由已知条件,上述方程化为

$$z_{k+1}=2z_k^2-1,\tag{2-38}$$

其中 $z_1=\frac{a}{2}y_1+\frac{b}{4}$.

注意到函数 $\cos x$ 和 $\cosh x$ 都满足函数恒等式

$$f(2x)=2f^2(x)-1,$$

作变量代换

$$z_k=\begin{cases}\cos u_k & (|z_1|\leqslant 1),\\ \cosh u_k & (|z_1|>1).\end{cases}$$

由(2-38)式分别得到

$$\cos u_{k+1}=2\cos^2u_k-1=\cos 2u_k$$

或

$$\cosh u_{k+1}=\cosh 2u_k.$$

于是 $u_{k+1}=2u_k$,从而 $u_k=2^{k-1}u_1$,因此

$$z_k=\begin{cases}\cos(2^{k-1}\operatorname{arccos}z_1) & (|z_1|\leqslant 1),\\ \cosh(2^{k-1}\operatorname{arccosh}z_1) & (|z_1|>1).\end{cases}$$

所以

$$y_k=\begin{cases}\frac{2}{a}\cos\left[2^{k-1}\arccos\left(\frac{a}{2}y_1+\frac{b}{4}\right)-\frac{b}{2a}\right. & \left(\text{当}\left|\frac{a}{2}y_1+\frac{b}{4}\right|\leqslant 1\right),\\ \frac{2}{a}\cosh\left[2^{k-1}\operatorname{arccosh}\left(\frac{a}{2}y_1+\frac{b}{4}\right)-\frac{b}{2a}\right. & \left(\text{当}\left|\frac{a}{2}y_1+\frac{b}{4}\right|>1\right).\end{cases}$$

2.6 Z 变换

Z 变换是一种类似母函数的方法，它适用于解线性差分方程，以及某些非线性的求和差分方程．同时，它在分析和设计数字控制系统中起十分重要的作用．它在差分方程中的作用相当于常微分方程中的拉普拉斯(Laplace) 变换．

定义 5 设有数列$\{y_k\}$，则由下式定义的复变函数

$$Y(z) = Z(\{y_k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} \tag{2-39}$$

称为数列$\{y_k\}$的 **Z 变换**．其中函数 $y(z)$ 的定义域是使得(2-39) 式右边级数收敛的所有复数．以下将 $Z(\{y_k\})$ 简记为 $Z(y_k)$．

由(2-39) 式可知，从数列$\{y_k\}$的 Z 变换作代换$z = \frac{1}{t}$，就可以得到数列$\{y_k\}$的母函数．

2.6.1 Z 变换性质

1° $Z(u_k + v_k) = Z(u_k) + Z(v_k)$，
其中 z 在函数 $U(z)$ 与 $V(z)$ 的公共定义域内．

2° $Z(cy_k) = cZ(y_k)$，
其中 c 为常数．

3° 如果$Y(z) = Z(y_k)$，$|z| > r$，则

$$Z((k+n-1)^{(n)} y_k) = (-1)^n z^n \frac{\mathrm{d}^n Y(z)}{\mathrm{d}z^n}, \quad \text{其中 } |z| > r.$$

当 $n = 1$ 时，$Z(ky_k) = -zY'(z)$．

4° 若 n 为正整数，则

$$Z(y_{k+n}) = z^n Z(y_k) - \sum_{i=0}^{n-1} y_i z^{n-i}$$

5° 如果 $Z(y_k) = Y(z)$ $(|z| > r)$，则对于常数 $a \neq 0$，有

$$Z(a^k y_k) = Y\left(\frac{z}{a}\right) \quad (|z| > r|a|).$$

6° 卷积定理　如果当 $|z| > a$ 时 $U(z)$ 存在，且当 $|z| > b$ 时 $V(z)$ 存在，则

$$Z(u_k * v_k) = U(z)V(z) \quad (|z| > \max\{a, b\}),$$

其中 $u_k * v_k = \sum_{i=0}^{k} u_{k-i} v_i$．特别地，当 $u_k \equiv 1$ 时，有

$$Z\left(\sum_{i=0}^{k} v_i\right) = Z(1)Z(v_k) = \frac{z}{1-z} V(z).$$

2.6.2 Z 变换基本公式

1° $Z(1) = \frac{z}{z-1}$；

2° $Z(a^k)=\dfrac{z}{z-a}$;

3° $Z(k)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$;

4° $Z(k^2)=\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$;

5° $Z(k^{(n)})=\dfrac{n!z}{(z-1)^{n+1}}$;

6° $Z(\sin ak)=\dfrac{z\sin a}{z^2-2z\cos a+1}$;

7° $Z(\cos ak)=\dfrac{z^2-z\cos a}{z^2-2z\cos a+1}$;

8° $Z(\sinh ak)=\dfrac{z\sinh a}{z^2-2z\cosh a+1}$;

9° $Z(\cosh ak)=\dfrac{z^2-z\cosh a}{z^2-2z\cosh a+1}$;

10° $Z\left(\binom{n}{k}\right)=\left(\dfrac{z+1}{z}\right)^n$.

注:由上述基本公式作代换 $z=\dfrac{1}{t}$,就得到相应数列的母函数.

2.6.3　用 Z 变换求解差分方程(组)的初值问题

用 Z 变换求解差分方程(组)的初值问题的步骤如下:

1° 差分方程的两边作 Z 变换;

2° 求出 Z 变换;

3° 由 Z 变换公式表查找出差分方程的解.

例 24　解差分方程的初值问题

$$\begin{cases}y_{k+2}+y_k=10\cdot 3^k,\\ y_0=0,y_1=0.\end{cases}$$

解　对差分方程的两边作 Z 变换,并由 Z 变换的性质 4° 得

$$z^2Z(y_k)-y_0z^2-y_1z+Z(y_k)=\frac{10z}{z-3},$$

即

$$(z^2+1)Z(y_k)=\frac{10z}{z-3}.$$

于是

$$Z(y_k)=\frac{10z}{(z-3)(z^2+1)}=z\left(\frac{1}{z-3}-\frac{z+3}{z^2+1}\right)$$

$$=\frac{z}{z-3}-\frac{z^2}{z^2+1}-3\frac{z}{z^2+1}$$

$$= \frac{z}{z-3} - \frac{z^2 - z\cos\frac{\pi}{2}}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{2} + 1} - 3\frac{z\sin\frac{\pi}{2}}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{2} + 1}.$$

因此

$$y_k = 3^k - \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right).$$

例 25　解差分方程的初值问题

$$\begin{cases} (k+1)y_{k+1} - (50-k)y_k = 0, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

解　对差分方程两边作 Z 变换得

$$zZ(ky_k) - 50Y(z) - zY'(z) = 0$$

或

$$-z^2Y'(z) - zY'(z) = 50Y(z).$$

由此得

$$\frac{Y'(z)}{Y(z)} = \frac{-50}{z(z+1)} = -\frac{50}{z} + \frac{50}{z+1}.$$

两边积分得

$$\ln Y(z) = -50\ln z + 50\ln(z+1) + C,$$

$$Y(z) = \left(\frac{z+1}{z}\right)^{50}.$$

因此

$$y_k = \binom{50}{k}.$$

例 26　求解沃尔泰拉(Volterra)方程

$$y_{k+1} = 1 + 16\sum_{i=0}^{k}(k-i)y_i \quad (k \geqslant 1).$$

解　原方程可以写为

$$y_{k+1} = 1 + 16k * y_k,$$

并对其两边作 Z 变换得

$$zY(z) - z = \frac{z}{z-1} + 16\frac{z}{(z-1)^2}Y(z),$$

$$\frac{z^2 - 2z - 15}{(z-1)^2}Y(z) = \frac{z}{z-1},$$

$$Y(z) = \frac{z(z-1)}{(z-5)(z+3)} = z\left(\frac{\frac{1}{2}}{z-5} + \frac{\frac{1}{2}}{z+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z}{z-5} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+3}.$$

因此

$$y_k = \frac{1}{2}\cdot 5^k + \frac{1}{2}(-3)^k.$$

3 差分方程组

3.1 差分方程组的基本概念

含有 n 个未知函数的**一阶差分方程组**的一般形式为

$$\begin{cases} y_1(k+1) = f_1(k, y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)), \\ y_2(k+1) = f_2(k, y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)), \\ \quad\vdots \\ y_n(k+1) = f_n(k, y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)). \end{cases} \tag{3-1}$$

定义 1 对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，满足差分方程组(3-1)的函数组 $y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)$，称为**一阶差分方程组(3-1)的解**.

含有 n 个任意常数的解

$$\begin{cases} y_1(k) = \varphi_1(k, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ y_2(k) = \varphi_2(k, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ \quad\vdots \\ y_n(k) = \varphi_n(k, C_1, C_2, \cdots, C_n). \end{cases}$$

称为方程组的通解. 对通解中的 n 个常数赋予特定的值，此值由初始条件确定，由初始条件确定的解称为方程组的特解.

引入向量记法，方程组(3-1)可以写为

$$\boldsymbol{Y}(k+1) = \boldsymbol{F}(k, \boldsymbol{Y}(k)), \tag{3-2}$$

其中向量函数

$$\boldsymbol{Y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(k, \boldsymbol{Y}(k)) = \begin{bmatrix} f_1(k, y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)) \\ f_2(k, y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)) \\ \vdots \\ f_n(k, y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)) \end{bmatrix}.$$

定理 1 （存在与唯一性定理）如果函数 $\boldsymbol{F}(k, \boldsymbol{Y}(k))$ 对 $k = k_0, k_0+1, \cdots$ 及相应的 $\boldsymbol{Y}(k)$ 都有定义，则方程(3-2)存在唯一的解 $\boldsymbol{Y}(k)$，满足初值条件 $\boldsymbol{Y}(k_0) = \boldsymbol{Y}_0$. 其中

$$\boldsymbol{Y}_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ 为已知常数}).$$

定义 2 如果差分方程组(3-1)中的函数

$$f_i(k, y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

关于未知函数 $y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)$ 是线性的，即方程组可以写成

$$Y(k+1)=A(k)Y(k)+R(k),\tag{3-3}$$

其中

$$Y(k)=\begin{bmatrix}y_1(k)\\y_2(k)\\\vdots\\y_n(k)\end{bmatrix},\quad A(k)=\begin{bmatrix}a_{11}(k)&\cdots&a_{1n}(k)\\a_{21}(k)&\cdots&a_{2n}(k)\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}(k)&\cdots&a_{nn}(k)\end{bmatrix},\quad R(k)=\begin{bmatrix}r_1(k)\\r_2(k)\\\vdots\\r_n(k)\end{bmatrix},$$

且对所有 $k\in\mathbf{Z}^+$, $\det A(k)\neq 0$. 则称(3-3)式为线性差分方程组.

如果在方程组(3-3)中 $R(k)\equiv 0$, 即

$$Y(k+1)=A(k)Y(k)\tag{3-4}$$

则(3-4)式称为齐次线性差分方程组;如果 $R(k)\not\equiv 0$, 则(3-3)式称为非齐次线性差分方程组.

第2章中的 n 阶线性差分方程(2-1)可以化为线性差分方程组,为此引入新变量

$$u_1(k)=y_k,\ u_2(k)=u_1(k+1),\cdots,u_n(k)=u_{n-1}(k+1),$$

(2-1)式就化为线性差分方程组

$$\begin{cases}u_1(k+1)=u_2(k),\\u_2(k+1)=u_3(k),\\\qquad\vdots\\u_{n-1}(k+1)=u_n(k),\\u_n(k+1)=-\dfrac{1}{p_0(k)}(p_n(k)u_1(k)+p_{n-1}(k)u_2(k)+\\\qquad\cdots+p_1(k)u_n(k))+r(k).\end{cases}\tag{3-5}$$

3.2 线性差分方程组解的结构

显然,如果向量函数 $Y_1(k)$ 与 $Y_2(k)$ 是齐次线性差分方程组(3-4)的解,则向量函数 $C_1Y_1(k)+C_2Y_2(k)$ 也是这个方程组的解.

定义 3 对于 n 维向量函数 $F_1(k),F_2(k),\cdots,F_n(k)$, 其中 $F_i(k)=(f_{1i}(k),f_{2i}(k),\cdots,f_{ni}(k))^{\mathrm T}(i=1,2,\cdots,n)$. 如果存在 n 个不全为零的常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}C_iF_i(k)\equiv 0\quad(k\in\mathbf{Z}^+),$$

则称这 n 个向量函数是线性相关的;否则,称它们是线性无关的.

定义 4 对于 n 维向量函数组

$$F_i(k)=(f_{1i}(k),f_{2i}(k),\cdots,f_{ni}(k))^{\mathrm T}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

行列式

$$w(k)=\begin{vmatrix} f_{11}(k) & \cdots & f_{1n}(k) \\ f_{21}(k) & \cdots & f_{2n}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(k) & \cdots & f_{nn}(k) \end{vmatrix}$$

称为这个向量函数组的卡索拉蒂行列式.

卡索拉蒂行列式在差分方程组中的作用与朗斯基行列式在微分方程组中的作用相似.

定理2 若向量函数组 $\boldsymbol{F}_1(k),\boldsymbol{F}_2(k),\cdots,\boldsymbol{F}_n(k)$ 是齐次线性方程组(3-4)的 n 个解,则下述3个命题等价:

1° 这 n 个解线性无关;

2° 对所有的 $k\in\mathbf{Z}^+$,它们的卡索拉蒂行列式 $w(k)\neq 0$;

3° 对某一 $k_0\in\mathbf{Z}^+$, $w(k_0)\neq 0$.

线性差分方程组解的结构与线性常微分方程组解的结构相似.

定理3 齐次线性差分方程组(3-4)的通解,可以表示成它的 n 个线性无关的解的线性组合.

定理4 非齐次线性差分方程组(3-3)的通解,可以表示成它对应的齐次线性差分方程组(3-4)的通解与这个非齐次线性差分方程组的一个特解之和.

3.3 求解线性差分方程组的方法

含 $n(\geqslant 2)$ 个未知函数的线性差分方程组,通常用消去法,迭代法,Z 变换法,代数法,常数变易法等方法求解.

3.3.1 消去法

通过消去方程组中 $n-1$ 个未知函数,将线性差分方程组化为一个未知函数的差分方程,从而求出方程组的解,这种方法称为**消去法**.

下面以两个未知函数的线性差分方程组为例,具体说明其解法步骤.

例1 求解差分方程组

$$\begin{cases} y_1(k+1)=a(k)y_1(k)+b(k)y_2(k), \\ y_2(k+1)=c(k)y_1(k)+d(k)y_2(k). \end{cases} \tag{3-6}$$

解 由方程组中的第一个方程得

$$y_1(k+2)=a(k+1)y_1(k+1)+b(k+1)y_2(k+1),$$

将方程组中的第二个方程代入上式,得

$$y_1(k+2)=a(k+1)y_1(k+1)+b(k+1)\cdot[c(k)y_1(k)+d(k)y_2(k)]. \tag{3-7}$$

如果 $b(k)\neq 0$,则由方程组中的第一个方程得

$$y_2(k)=\frac{1}{b(k)}y_1(k+1)-\frac{a(k)}{b(k)}y_1(k).$$

将它代入(3-7)式,并化简,就得到一个未知函数的差分方程

$$b(k)y_1(k+2) = [a(k+1)b(k)+b(k+1)d(k)]y_1(k+1) + b(k+1)[b(k)c(k)-a(k)d(k)]y_1(k).$$

由此求 $y_1(k)$,从而求出 $y_2(k)$.

如果 $b(k)\equiv 0$,这时,(3-6)式成为

$$\begin{cases} y_1(k+1) = a(k)y_1(k), \\ y_2(k+1) = c(k)y_1(k) + d(k)y_2(k). \end{cases}$$

由其中第一个方程解出 $y_1(k)$,而第二个方程可以看作关于 $y_2(k)$ 的一个一阶非齐次线性差分方程,从而可以解出 $y_2(k)$.

如果 $b(k)\equiv 0, c(k)\equiv 0$,这时(3-6)式成为

$$\begin{cases} y_1(k+1) = a(k)y_1(k), \\ y_2(k+1) = d(k)y_2(k). \end{cases}$$

从这两个方程分别可以解出 $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$.

3.3.2　迭代法

非齐次线性差分方程组的特解,可以用逐步迭代法求出.

例如,求解线性差分方程组(3-3)的初值问题:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{Y}(k) + \boldsymbol{R}(k); \\ \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{\beta}, \end{cases} \tag{3-8}$$

其中 $\boldsymbol{\beta}$ 是已知常向量.

用迭代法建立解序列:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}(1) &= \boldsymbol{A}(0)\boldsymbol{Y}(0) + \boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{A}(0)\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{R}(0), \\ \boldsymbol{Y}(2) &= \boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{Y}(1) + \boldsymbol{R}(1) \\ &= \boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{A}(0)\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{R}(0) + \boldsymbol{R}(1), \\ &\vdots \end{aligned}$$

一般地,可以归纳得到

$$\boldsymbol{Y}(k) = \prod_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}(k-i)\boldsymbol{\beta} + \sum_{j=0}^{k-2}\prod_{i=1}^{k-1-j}\boldsymbol{A}(k-i)\boldsymbol{R}(j) + \boldsymbol{R}(k-1), \tag{3-9}$$

这就是线性差分方程组初值问题(3-8)的解.

由(3-9)式容易看出,方程组的解 $\boldsymbol{Y}(k)$ 由初值向量 $\boldsymbol{\beta}$ 唯一确定.

当线性差分方程组(3-3)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}(k)$ 为实常数矩阵时,(3-3)式称为常系数线性差分方程组,即

$$\boldsymbol{Y}(k+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Y}(k) + \boldsymbol{R}(k). \tag{3-10}$$

由(3-9)式,它满足初值条件 $\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{\beta}$ 的解为

$$\boldsymbol{Y}(k) = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\beta} + \sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1-j}\boldsymbol{R}(j). \tag{3-11}$$

由(3-9)式可看出,用迭代法实际求方程组的特解时,主要的困难是计算矩阵的乘积,即使是对于常系数方程组的情形,当(3-11)式的 k 很大时,直接计算 $\boldsymbol{A}^k$ 的

运算量也很大.假若矩阵 A 可化为对角阵,或某些特殊情形,则可以容易地计算 A^k.

例如,若矩阵 $A = PJP^{-1}$,其中 J 是对角阵,则有

$$A^2 = (PJP^{-1})(PJP^{-1}) = PJ^2P^{-1},$$
$$A^3 = (PJP^{-1})(PJ^2P^{-1}) = PJ^3P^{-1},$$
$$\vdots$$

一般地,$A^k = PJ^kP^{-1}$.

而对角阵 J 的幂 J^k 是容易计算的.这时,(3-11) 式可以写成

$$Y(k) = PJ^kP^{-1}\beta + P\Big(\sum_{j=0}^{k-1} J^{k-1-j}P^{-1}R(j)\Big).$$

例 2　求解差分方程组的初值问题

$$\begin{cases} Y(k+1) = AY(k) + R(k), \\ Y(0) = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}, \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad R(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

解　矩阵 A 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0,$$

特征根为 1,1,2.它们对应的特征向量分别为

$$(1,0,1)^{\mathrm{T}},(1,1,0)^{\mathrm{T}} \text{和} (1,1,-1)^{\mathrm{T}},$$

因此,

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

因为 $R(k) = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是常向量,所以对所有 $k \in \mathbf{Z}^+$

$$P^{-1}R(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

又

$$J^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix},$$

及

$$J^kP^{-1}R(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

于是,初值问题的解为

$$Y(k) = PJ^kP^{-1}Y(0) + P\Big[\sum_{j=0}^{k-1}J^{k-1-j}P^{-1}R(j)\Big]$$

$$= P\begin{bmatrix}0\\0\\2^{k+1}\end{bmatrix} + P\begin{bmatrix}0\\k\\0\end{bmatrix} = 2^{k+1}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

例 3 计算矩阵 $A = \begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$ 的幂.

解 将 A 改写为 $A = 2I + \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$,于是

$$A^k = \left(2I + \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\right)^k.$$

注意到 $\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$ 是幂零矩阵,由二项式定理得

$$A^k = 2^kI + k2^{k-1}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2^k & 0\\k2^{k-1} & 2^k\end{bmatrix}.$$

3.3.3 Z 变换法

线性差分方程组的初值问题,也可以用 Z 变换的方法求解.

例 4 解差分方程组的初值问题

$$\begin{cases}u_{k+1} - v_k = 3k3^k,\\ u_k + v_{k+1} - 3v_k = k3^k,\\ u_0 = 0, v_0 = 3.\end{cases}$$

解 对方程组的每个方程的两边作 Z 变换,并由 Z 变换的性质 4° 得

$$\begin{cases}zU(z) - zu_0 - V(z) = \dfrac{9z}{(z-3)^2},\\ U(z) + zV(z) - zv_0 - 3V(z) = \dfrac{3z}{(z-3)^2},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}zU(z) - V(z) = \dfrac{9z}{(z-3)^2},\\ U(z) + (z-3)V(z) = 3z + \dfrac{3z}{(z-3)^2}.\end{cases}$$

将这个方程组的第一个方程乘以 $(z-3)$ 并与第二个方程相加得

$$(z^2 - 3z + 1)U(z) = 3z + \frac{3z}{(z-3)^2} + \frac{9z^2 - 27z}{(z-3)^2}$$

$$= \frac{3z(z^2 - 3z + 1)}{(z-3)^2},$$

$$U(z) = \frac{3z}{(z-3)^2}.$$

由此可得 $u_k = k3^k$. 进一步又可得

$$v_k = u_{k+1} - 3k3^k = (k+1)3^{k+1} - 3k3^k = 3^{k+1}.$$

3.3.4　代数法

对于常系数齐次线性差分方程组

$$Y(k+1) = AY(k), \tag{3-12}$$

其中 A 是 $n \times n$ 阶常数矩阵，且 $\det A \neq 0$，可以通过求矩阵 A 的特征根与特征向量的方法，求出这个差分方程组的解.

容易知道，差分方程组(3-12)有形如

$$Y(k) = \lambda^k \xi$$

的解的充要条件是

$$\lambda^{k+1}\xi = \lambda^k A\xi, \tag{3-13}$$

其中 λ 是常数，ξ 是一个非零向量.

显然，$Y(k) = 0$(零向量)是方程组(3-12)的平凡解，故可以假定 $\lambda \neq 0$. 因此，方程组(3-13)等价于

$$A\xi = \lambda\xi, \tag{3-14}$$

而这个方程的解是矩阵 A 的特征值及对应的特征向量.

因为差分方程组(3-12)总假定 $\det A \neq 0$，所以，当 λ 是矩阵 A 的特征根时，$\lambda \neq 0$.

下面分3种情况讨论：

(1) 矩阵 A 有 n 个相异的实特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

这时，由方程组(3-14)分别求出这些特征值对应的特征向量：$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$. 则差分方程组(3-12)的通解为

$$Y(k) = C_1\lambda_1^k\xi_1 + C_2\lambda_2^k\xi_2 + \cdots + C_n\lambda_n^k\xi_n, \tag{3-15}$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数.

例5　解方程组(3-12)，其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

解　特征方程为

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

特征根为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$.

由方程组(3-14)得到，对应 $\lambda_1 = -2$ 的特征向量为 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，对应 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量为 $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. 于是原差分方程组的通解为

$$Y(k) = C_1(-2)^k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + C_2(-1)^k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

(2) 矩阵 A 有复特征根.

设复特征根为 $\lambda_1 = a + \mathrm{i}b, \lambda_2 = a - \mathrm{i}b$，其余 $\lambda_3, \lambda_4, \cdots, \lambda_n$ 为相异实特征根. 由

方程组(3-14)分别求得它们对应的特征向量为

$$\xi_1=\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta},\quad \xi_2=\boldsymbol{\alpha}-\mathrm{i}\boldsymbol{\beta},\quad \xi_3,\cdots,\xi_n.$$

则差分方程组(3-12)的通解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}(k)=&C_1\rho^k(\boldsymbol{\alpha}\cos k\varphi-\boldsymbol{\beta}\sin k\varphi)+C_2\rho^k(\boldsymbol{\alpha}\sin k\varphi+\boldsymbol{\beta}\cos k\varphi)+\\&C_3\lambda_3^k\xi_3+\cdots+C_n\lambda_n^k\xi_n,\end{aligned}\tag{3-16}$$

其中 $\rho^2=a^2+b^2,\cos\varphi=\dfrac{a}{\rho}$,而 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为任意常数.

若有多个复特征根,可类似处理.

例 6 解差分方程组 $\boldsymbol{Y}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(k)$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-5&2&1\\-2&-2&1\end{bmatrix}.$$

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det\begin{bmatrix}-2-\lambda&1&0\\-5&2-\lambda&1\\-2&-2&1-\lambda\end{bmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2-3\lambda-5=0,$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm2\mathrm{i},\lambda_3=-1$.

设 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i}$ 是对应于特征根 $1+2\mathrm{i}$ 的复特征向量,通过解方程

$$\begin{bmatrix}-2&1&0\\-5&2&1\\-2&-2&1\end{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i})=(1+2\mathrm{i})(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i}),$$

得

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}+\mathrm{i}\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix},\quad 故\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}.$$

设 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 是对应于特征根 -1 的特征向量,通过解方程

$$\begin{bmatrix}-2&1&0\\-5&2&1\\-2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix},$$

求得对应于特征根 -1 的特征向量为

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

因此,差分方程组的通解为

$$\boldsymbol{Y}(k)=C_15^{\frac{k}{2}}\left((\cos k\varphi)\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}-(\sin k\varphi)\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}\right)+$$

$$C_2 5^{\frac{k}{2}}\left((\sin k\varphi)\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}+(\cos k\varphi)\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}\right)+C_3(-1)^k\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

(3) 矩阵 A 有重特征根.

凯莱-哈密顿(Cayley-Hamilton)定理:每一个 $n\times n$ 阶矩阵满足它的特征方程,即:

若 $f(\lambda)=0$ 是 $A_{n\times n}$ 的特征方程,则 $f(A)=0$.

由这个定理可知,A^n 可以表示成 $I,A,A^2,\cdots,A^{n-1}$ 的线性组合.因而 A 的任何次幂也可以表示成 $I,A,A^2,\cdots,A^{n-1}$ 的线性组合.

现在设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(不必相异)是矩阵 A 的特征根,其中每一个特征根重复的次数与它的重数相同.定义

$$\begin{aligned}&M_0=I,\\&M_i=(A-\lambda_i I)M_{i-1}\quad(1\leqslant i\leqslant n),\end{aligned}\tag{3-17}$$

由凯莱-哈密顿定理知 $M_n=0$.

(3-17)式意味着每一个 $A^i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 $M_0,M_1,\cdots,M_{n-1}$ 的线性组合,从而矩阵 A 的任何次幂 A^k 也是 $M_0,M_1,\cdots,M_{n-1}$ 的线性组合,即

$$A^k=\sum_{i=0}^{n-1}c_{i+1}(k)M_i,$$

其中 $k\in\mathbf{Z}^+$,而 $c_{i+1}(k)$ 为待定.因此,方程组(3-12)的解可以表示为

$$Y(k)=A^k\beta=\sum_{i=0}^{n-1}c_{i+1}(k)M\beta.$$

其中 β 是初值向量.代入方程组(3-12),确定 $c_{i+1}(k)$.于是就得到下面的定理5.

定理5　线性差分方程组(3-12)满足初值条件 $Y(0)=\beta$ 的解是

$$Y(k)=\sum_{i=0}^{n-1}c_{i+1}(k)M_i\beta,\tag{3-18}$$

其中 M_i 由(3-17)式给出,而 $c_i(k)$ 由下面的方程组确定:

$$\begin{bmatrix}c_1(k+1)\\c_2(k+1)\\\vdots\\c_n(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0&\cdots&0\\1&\lambda_2&0&\cdots&0\\0&1&\lambda_3&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&1&\lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1(k)\\c_2(k)\\\vdots\\c_n(k)\end{bmatrix},\tag{3-19}$$

和

$$\begin{bmatrix}c_1(0)\\c_2(0)\\\vdots\\c_n(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}.\tag{3-20}$$

例7　解差分方程组

$$Y(k+1)=\begin{bmatrix}1&1\\-1&3\end{bmatrix}Y(k),\quad Y(0)=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}.$$

解 特征方程为

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

或

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

特征根 $\lambda = 2$ 是二重根.

由(3-17)式,有

$$M_0 = I,\quad M_1 = A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

由方程组(3-19)和(3-20),有

$$c_1(k+1) = 2c_1(k),\quad c_1(0) = 1.$$

所以 $c_1(k) = 2^k$.因此

$$c_2(k+1) = 2c_2(k) + 2^k,\quad c_2(0) = 0,$$

解之得

$$c_2(k) = k \cdot 2^{k-1}.$$

由定理5中的(3-19)式,就得到原差分方程组的解

$$\begin{aligned} Y(k) &= (c_1(k)I + c_2(k)M_1)\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ &= \left(2^k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k \cdot 2^{k-1}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ &= 2^k\begin{bmatrix} 1-\dfrac{k}{2} & \dfrac{k}{2} \\ -\dfrac{k}{2} & 1+\dfrac{k}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.3.5 常数变易法

如果已经知道非齐次线性差分方程组(3-3)对应的齐次方程组(3-4)的通解,则可以用常数变易法来求出非齐次方程组的一个特解,从而就得到这个非齐次差分方程组的通解.

先将定理3写成矩阵形式,为此有如下的定义5.

定义5 若向量函数 $Y_1(k), Y_2(k), \cdots, Y_n(k)$ 为齐次线性差分方程组(3-4)的 n 个线性无关的解.则矩阵

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} y_{11}(k) & \cdots & y_{1n}(k) \\ y_{21}(k) & \cdots & y_{2n}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(k) & \cdots & y_{nn}(k) \end{bmatrix}$$

称为差分方程组(3-4)的**基本解矩阵**.其中 $Y_i(k) = (y_{1i}(k), y_{2i}(k), \cdots, y_{ni}(k))^{\mathrm{T}}(i = 1,2,\cdots,n)$.

这时定理3可以写成下面定理6的形式.

定理6 若 $\Phi(k)$ 是齐次线性差分方程组(3-4)的基本解矩阵,C 是各分量为任意常数的常向量,则齐次线性差分方程组(3-4)的通解为

$$Y(k) = \boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{C}. \tag{3-21}$$

用常数变易法来求解非齐次线性差分方程组(3-3)的特解的步骤如下：

1° 设对应齐次线性差分方程组(3-4)的通解为

$$Y(k) = \boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, \cdots, C_n)^{\mathrm{T}}$ 为任意常向量.

2° 把常向量 $\boldsymbol{C}$ 看作 k 的向量函数 $\boldsymbol{C}(k)$，并设

$$Y^*(k) = \boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{C}(k) \tag{3-22}$$

为非齐次差分方程组(3-3)的一个解.将(3-22)式代入(3-3)式得

$$\boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{C}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{C}(k) + \boldsymbol{R}(k),$$

由 $\boldsymbol{\Phi}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{\Phi}(k)$，得

$$\boldsymbol{\Phi}(k+1)\Delta\boldsymbol{C}(k) = \boldsymbol{R}(k) \tag{3-23}$$

或

$$\Delta\boldsymbol{C}(k) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(k+1)\boldsymbol{R}(k), \tag{3-24}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{C}(k) = \boldsymbol{C}(k+1) - \boldsymbol{C}(k)$.

3° 从方程组(3-23)或(3-24)中解出 $\boldsymbol{C}(k)$，即

$$\boldsymbol{C}(k) = \sum_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(i+1)\boldsymbol{R}(i),$$

再代入(3-22)式，就得到非齐次线性差分方程组(3-3)的一个特解 $Y^*(k)$.从而由定理4就得到非齐次线性差分方程组(3-3)的通解

$$Y(k) = \boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{C} + \sum_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(i+1)\boldsymbol{R}(i).$$

在具体应用上述常数变易法求非齐次线性差分方程组的特解时，往往将(3-23)式写成线性代数方程组的形式，解出 $\Delta\boldsymbol{C}(k)$，从而再求出 $\boldsymbol{C}(k)$ 来，这样可避免计算逆矩阵.

例8 解差分方程组

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k - 4z_k + 2^k, \\ z_{k+1} = -y_k + z_k + 3^k. \end{cases} \tag{3-25}$$

解 方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，其特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$，对应的特征向量分别为

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

因此，方程组(3-25)对应的齐次方程组的通解为

$$\begin{cases} y_k = 2(-1)^k C_1 - 2\cdot 3^k C_2, \\ z_k = (-1)^k C_1 + 3^k C_2. \end{cases}$$

将它写成(3-21)式的形式，有

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1)^k & -2\cdot 3^k \\ (-1)^k & 3^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

利用常数变易法，假定

$$\begin{bmatrix} y_k^* \\ z_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1)^k & -2\cdot 3^k \\ (-1)^k & 3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(k) \\ C_2(k) \end{bmatrix} \tag{3-26}$$

为原方程组(3-25)的一个特解,将它代入(3-25)式.这时,由方程组(3-23)得

$$\begin{bmatrix} 2(-1)^{k+1} & -2\cdot 3^k \\ (-1)^{k+1} & 3^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_1(k) \\ \Delta C_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k \\ 3^k \end{bmatrix}.$$

解之得

$$\Delta C_1(k) = -\frac{2^k + 2\cdot 3^k}{4(-1)^k},$$

$$\Delta C_2(k) = \frac{2\cdot 3^k - 2^k}{12\cdot 3^k}.$$

因此

$$C_1(k) = \frac{1}{12}(-2)^k + \frac{1}{8}(-3)^k,$$

$$C_2(k) = \frac{1}{6}k + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

所以原差分方程组(2-25)的通解为

$$\begin{cases} y_k = 2(-1)^k C_1 - 2\cdot 3^k C_2 + \frac{1}{6}\cdot 2^k + \frac{1}{4}\cdot 3^k - \frac{1}{3}\cdot k\cdot 3^k - 2^{k-1}, \\ z_k = (-1)^k C_1 + 3^k C_2 + \frac{1}{12} + \frac{1}{8}\cdot 3^k + \frac{1}{6}\cdot 3^k + \frac{1}{4}\cdot 2^k. \end{cases}$$

4　差分方程的稳定性

差分方程的初值问题虽然已给出解的一种迭代计算的方法,但在差分方程的很多应用中,往往需要首先弄清楚,当 k 很大时方程解 $\boldsymbol{Y}(k)$ 的变化性质.这就是差分方程稳定性理论的基本问题.

4.1　差分方程稳定性基本概念

4.1.1　化任意解的稳定性为零解的稳定性

考虑差分方程组

$$\boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{G}(k, \boldsymbol{X}(k)), \tag{4-1}$$

其中

$$\boldsymbol{X}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}(k, \boldsymbol{X}(k)) = \begin{bmatrix} g_1(k, x_1(k), \cdots, x_n(k)) \\ \vdots \\ g_n(k, x_1(k), \cdots, x_n(k)) \end{bmatrix},$$

函数 $\boldsymbol{G}(k, \boldsymbol{X}(k))$ 对 $k \in \mathbf{Z}^+$ 及相应的 $\boldsymbol{X}(k)$ 都有定义,保证方程组(4-1)的解存在唯一.

设 $\overline{X}(k)=\varphi(k)$ 是方程组(4-1)的一个解,作变量代换

$$Y(k)=X(k)-\varphi(k),$$

则方程组(4-1)就化为

$$\begin{aligned}Y(k+1)&=G(k,Y(k)+\varphi(k))-G(k,\varphi(k))\\&\triangleq F(k,Y(k)).\end{aligned}$$

所以方程组(4-1)的解 $\varphi(k)$ 的稳定性等价于

$$Y(k+1)=F(k,Y(k)) \tag{4-2}$$

零解的稳定性.

因此,不失一般性,总假设 $F(k,0)=0$,并只研究方程组(4-2)的零解稳定性就够了.

差分方程组(4-2)的解 $Y(k)$,在几何上可以表示为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的点列,用 $\|Y(k)\|$ 记 $Y(k)$ 的范数.

若方程组(4-2)右边函数不显含 k,即

$$Y(k+1)=F(Y(k)), \tag{4-3}$$

则(4-3)式称为**自治差分方程组**;否则,(4-2)式称为**非自治差分方程组**.

4.1.2 差分方程稳定性定义

将方程组(4-2)满足初值条件 $Y(k_0)=Y_0$ 的解记为 $Y(k;k_0,Y_0)$.

定义1 方程组(4-2)的零解称为稳定的,如果对于任意的 $\epsilon>0$,及任意的 $k_0\in\mathbf{Z}^+$,都存在 $\delta=\delta(k_0,\epsilon)>0$,使得当 $\|Y_0\|\leqslant\delta(\epsilon,k_0)$ 时,对一切 $k\geqslant k_0$ 都有

$$\|Y(k;k_0,Y_0)\|<\epsilon.$$

反之,称方程组(4-2)的零解为不稳定的,即存在 ϵ_0 及 k_0,使得对于任意的 $\delta>0$,总存在 Y_0,虽然 $\|Y_0\|<\delta$,但存在 $k_1\geqslant k_0$,使

$$\|Y(k_1;k_0,Y_0)\|\geqslant\epsilon_0.$$

定义2 方程组(4-2)的零解称为渐近稳定的,如果

1° 方程组(4-2)的零解是稳定的;

2° 存在正数 $\eta(k_0)>0$,使得当 $\|Y_0\|\leqslant\eta$ 时,都有

$$\lim_{k\to\infty}\|Y(k;k_0,Y_0)\|=0.$$

定义3 方程组(4-2)的零解称为全局渐近稳定的,如果

1° 方程组(4-2)的零解是稳定的;

2° 对方程组(4-2)的每一个解 $Y(k;k_0,Y_0)$,都有

$$\lim_{k\to\infty}\|Y(k;k_0,y_0)\|=0.$$

定义4 方程组(4-2)的零解称为一致稳定的.如果对于任意的 $\epsilon>0$ 及任意的 $k_0\in\mathbf{Z}^+$,都存在不依赖于 k_0 的 $\delta=\delta(\epsilon)>0$,使得当 $\|Y_0\|<\delta$ 时,对一切 $k\geqslant k_0$,都有

$$\|Y(k;k_0,Y_0)\|<\epsilon.$$

显然,对于自治差分方程组(4-3),它的零解的一致稳定与稳定是等价的.

定义5 方程组(4-2)的零解称为一致渐近稳定的.如果

1° 方程组(4-2)的零解是一致稳定的；

2° 存在$\eta_0 > 0$，对任意的$\varepsilon > 0$及任意的$k_0 \in \mathbf{Z}^+$，存在不依赖于k_0的$T(\varepsilon) > 0$，使得当$\| Y_0 \| < \eta_0$时，对一切$k \geqslant k_0 + T(\varepsilon)$，有

$$\| Y(k; k_0, Y_0) \| < \varepsilon.$$

定义 6 方程组(4-2)的零解称为全局一致渐近稳定的，如果

1° 方程组(4-2)的零解是一致稳定的；

2° 对任何$\eta > 0$，任意$\varepsilon > 0$及任意的$k_0 \in \mathbf{Z}^+$，存在不依赖于k_0的$T(\varepsilon, \eta) > 0$，使得当$\| Y_0 \| < \eta$时，对一切$k \geqslant k_0 + T(\varepsilon, \eta)$，有

$$\| Y(k; k_0, Y_0) \| < \varepsilon.$$

例 1 考虑差分方程

$$y(k+1) = a(k)y(k) \quad (k \in \mathbf{Z}^+). \tag{4-4}$$

因方程(4-4)满足初值条件$y(k_0) = y_0$的解为

$$y(k) = y_0 \prod_{j=0}^{k-1} a(j).$$

则有如下几种稳定性：

1° 当$\left| \prod_{j=0}^{k-1} a(j) \right| < M(k_0)$时，方程(4-4)的零解是稳定的；

2° 当$\left| \prod_{j=0}^{k-1} a(j) \right| < M$时，方程(4-4)的零解是一致稳定的；

3° 当$\left| \prod_{j=0}^{k-1} a(j) \right|$无界时，方程(4-4)的零解不稳定；

4° 当$\lim_{k \to \infty} \left| \prod_{j=0}^{k-1} a(j) \right| = 0$时，方程(4-4)的零解是渐近稳定的；

5° 当$\left| \prod_{j=0}^{k-1} a(j) \right| < \beta \eta^{k-k_0}$，$\beta, \eta$为常数，且$\beta > 0, 0 < \eta < 1$时，方程(4-4)的零解是一致渐近稳定的.

由定义知，几种稳定性有图 4-1 的蕴涵关系(用$\Rightarrow$表示)：

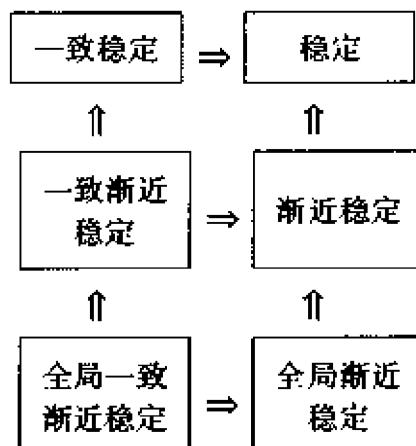


图 4-1

4.2 自治线性差分方程组的稳定性

考虑常系数线性差分方程组

$$Y(k+1)=AY(k), \tag{4-5}$$

其中 A 是 $n\times n$ 阶常数矩阵.

定义 7 设矩阵 A 的特征根为 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$r(A)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|$$

称为矩阵 A 的**谱半径**.

定理 1 差分方程组(4-5)的零解全局渐近稳定的充要条件是

$$r(A)<1.$$

例 2 $Y(k+1)=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 0.25 & -1\end{bmatrix}Y(k)$.

解 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 0.25 & -1\end{bmatrix}$的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{1}{4}=0,$$

特征根为
$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

谱半径为
$$r(A)=\frac{1}{2}.$$

所以,差分方程组的零解是渐近稳定的.

定理 2 差分方程组(4-5)的零解稳定的充要条件是 $r(A)\leqslant 1$,且 $|\lambda_i|=1$的特征根只对应简单的初等因子.

例 3 $Y(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}Y(k)$.

解 矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$的特征方程为

$$\lambda^2+1=0,$$

特征根为
$$\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}.$$

谱半径为 $r(A)=1$,且 $|\lambda_{1,2}|=1$是单根,因而只对应简单的初等因子.所以,差分方程组的零解是稳定的.

事实上,矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$是旋转矩阵,将它乘以 $Y(k)$所得到的向量,是由 $Y(k)$顺时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到的.因此,方程的每一个解都位于圆心在坐标原点、半径为 $\|Y(0)\|$ 的圆周上.所以,方程组的零解显然是稳定的.

定理 3 若 $r(A)>1$,则差分方程组(4-5)的零解是不稳定的.

在上述这些稳定性定理中,验证关于谱半径的不等式一般比较困难,因此人们在不断寻找较容易验证的充要条件或充分条件.下面是其中著名的**居利(Jury)判**

据.

设矩阵 A 的特征多项式为

$$P(\lambda) = \det[A - \lambda I] = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n, \tag{4-6}$$

其中 $a_0 = 1$.

按如下来构造数表(共 $2n-3$ 行):

$$\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\
b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & \\
c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & & \\
c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdots & c_0 & & \\
 & & & \cdots & & & \\
 & & s_0 & s_1 & s_2 & &
\end{array}$$

其中

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad b_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}, \quad c_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad c_{n-2} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} \end{vmatrix},$$

$\cdots$

这样继续下去,直到表中的同一行只有3个元素为止.由上述数表就得到居利判据(定理4):

定理 4 多项式 $P(\lambda)$ 的所有零点都在 λ 复平面的单位圆内的充要条件是

$$P(1) > 0, (-1)^n P(-1) > 0, |a_n| < 1,$$

$$|b_0| > |b_{n-1}|, |c_0| > |c_{n-2}|, \cdots, |s_0| > |s_2|.$$

例 4 $Y(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} Y(k)$.

解 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$ 的特征多项式为

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2, \quad a_0 = 1$$

构造的数表为

$$1 \quad a_1 \quad a_2$$

于是,由定理4知,方程组的零解渐近稳定的充要条件是

$$P(1) = 1 + a_1 + a_2 > 0,$$

$$(-1)^2 P(-1) = 1 - a_1 + a_2 > 0, \quad 1 > |a_2|,$$

即

$$|a_2| < 1, \quad a_2 > -1 - a_1, \quad a_2 > a_1 - 1.$$

4.3 自治非线性差分方程组的稳定性

考虑自治非线性差分方程组

$$Y(k+1)=F(Y(k)). \tag{4-7}$$

其中 $F(0)=0$,

$$Y(k)=\begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{bmatrix}, \quad F(Y(k))=\begin{bmatrix} f_1(y_1(k),\cdots,y_n(k)) \\ \vdots \\ f_n(y_1(k),\cdots,y_n(k)) \end{bmatrix}.$$

4.3.1 代数方法

定义 8 $n\times n$ 阶常数矩阵 $A(a_{ij})$ 称为**非负矩阵**,若 $a_{ij}\geqslant 0\ (i,j=1,2,\cdots,n)$.

定理 5 假设方程组(4-7) 右边的函数 F 在 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点的某个开球 B: $\|Y\|<H$ 内满足:对任意的 $X,Y\in B$,存在 $n\times n$ 阶非负矩阵 A,使得

$$\|F(X)-F(Y)\|\leqslant A\|X-Y\|,$$

则当

1° $r(A)<1$ 时,方程组(4-7) 的零解渐近稳定;

2° $r(A)=1$,且对应矩阵 A 的模为 1 的特征根只有简单的初等因子时,方程组(4-7) 的零解是稳定的.

特别地,若方程(4-7) 是纯量方程的情形

$$y(k+1)=f(y(k)), \tag{4-8}$$

其中 $y(k)\in\mathbf{R}^1,f(y)\in\mathbf{R}^1,f(0)=0$,则还有如下定理 6:

定理 6 假设函数 f 在包含原点的某个开区间内有一阶连续导数.则当

1° $|f'(y)|<1$ 时,方程(4-8) 的零解渐近稳定;

2° $|f'(y)|>1$ 时,方程(4-8) 的零解不稳定.

例 5 $y(k+1)=2y(k)(1-y(k)).$ (4-9)

解 设 $$f(u)=2u(1-u),$$

令 $f(u)=u$,解之得

$$u=0 \quad 和 \quad u=\frac{1}{2}.$$

因此,差分方程(4-9) 有常数解

$$y(k)=0 \quad 和 \quad y(k)=\frac{1}{2}.$$

由 $f'(0)=2>1$,知方程(4-9) 的零解不稳定.

下面把方程(4-9) 的解 $y(k)=\dfrac{1}{2}$ 的稳定性化为零解的稳定性来讨论. 为此作变量代换

$$x(k)=y(k)-\frac{1}{2},$$

方程(4-9) 化为

$$x(k+1) = -2x^2(k). \tag{4-10}$$

记 $\varphi(v) = -2v^2$，由 $\varphi'(0) = 0$，知方程(4-10)的零解是渐近稳定的，从而方程(4-9)的解 $y(k) = \frac{1}{2}$ 是渐近稳定的.

这个结果也可以直接从解的表达式得出. 事实上，由 2.5.5 节的例 21，知方程(4-9) 的通解为

$$y(k) = \frac{1}{2}(1 - e^{-C2^k}).$$

令 $k = 0$ 得，$e^{-C} = 1 - 2y_0$. 所以，方程(4-9) 满足初值 $y(0) = y_0$ 的解为

$$y(k) = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2y_0)^{2^k}].$$

如果 $0 < y_0 < 1$，那么 $-1 < 1 - 2y_0 < 1$，于是

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \frac{1}{2}.$$

因此方程(4-9) 的解 $y(k) = \frac{1}{2}$ 是渐近稳定的；而解 $y(k) = 0$ 是不稳定的.

4.3.2 按线性近似部分决定稳定性

在某些情况下，非线性差分方程的稳定性可以用它的线性近似部分来决定.

假设方程(4-7) 右边的向量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ 可以表示成

$$\boldsymbol{F}(Y) = \boldsymbol{A}Y + \boldsymbol{g}(Y), \tag{4-11}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 阶常数矩阵，而 $\boldsymbol{g}(Y)$ 满足

$$\lim_{u\to 0} \frac{|\boldsymbol{g}(Y)|}{|Y|} = 0. \tag{4-12}$$

条件(4-11) 和(4-12) 意味着函数 $\boldsymbol{F}(Y)$ 在 $Y = 0$ 是可微的. 同样，如果函数 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{Y} = 0$ 有一阶连续偏导数，(4-11) 和(4-12) 式也必然成立. 这时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是函数 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{Y} = 0$ 的雅可比(Jacobi) 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix},$$

其中 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的分量，并且所有的偏导数在原点取值.

定理 7 设函数 $\boldsymbol{F}$ 满足(4-11) 和(4-12) 式，则

1° 当 $r(A) < 1$ 时，方程组(4-7) 的零解是渐近稳定的；

2° 当 $r(A) > 1$ 时，方程组(4-7) 的零解是不稳定的.

例 6 $\begin{cases} y_1(k+1) = 0.5y_1(k) + \alpha y_1(k)y_2(k), \\ y_2(k+1) = -0.7y_2(k) + \beta y_1(k)y_2(k), \end{cases}$

其中 α,β 为任意常数.

解　方程组右边的函数在原点关于 y_1 和 y_2 有一阶连续偏导数,因此条件(4-11)和(4-12)式成立.而这个方程组的雅可比矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.7 \end{bmatrix}.$$

注意到 $r(A) = 0.7 < 1$.所以,方程组的零解是渐近稳定的.

4.4　李雅普诺夫直接方法

研究差分方程稳定性的强有力的方法是李雅普诺夫(Liapunov)直接方法.这一方法的核心思想是针对所研究的方程,构造出其相应的**李雅普诺夫函数**,利用它来判定方程的稳定性.下面介绍李雅普诺夫直接方法的有关概念及基本定理.

记 $\mathbf{R}^+$ 为非负实数集$[0,\infty)$,$B(h)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点的球 $\|Y\| < h$.

考虑差分方程组(4-2)

$$Y(k+1) = F(k, Y(k)).$$

定义 9　连续函数 $V(k,Y):\mathbf{Z}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$(或 $\mathbf{Z}^+\times B(h)\to\mathbf{R}$),对所有的 $k\in\mathbf{Z}^+$,$V(k,\mathbf{0}) = 0$.则称

$$\begin{aligned}\Delta V_{(4\text{-}2)}(k,Y) &= V(k+1,Y(k+1)) - V(k,Y(k)) \\ &= V(k+1,F(k,Y(k))) - V(k,Y(k))\end{aligned}$$

为函数 $V(k,Y)$ 沿方程(4-2)的差分.

现在给出 V 函数可能具有的几个性质.

定义 10　连续函数 $W(Y):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,如果

1° $W(\mathbf{0}) = 0$;

2° 对一切 $Y\neq\mathbf{0}$,$W(Y) > 0$ ($W(Y) < 0$).那么称函数 W 为**正定的**(**负定的**).

定义 11　连续函数 $W(Y):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,如果

1° $W(\mathbf{0}) = 0$;

2° 对所有的 $Y\in\mathbf{R}^n$,$W(Y)\geqslant 0$($W(Y)\leqslant 0$).那么称函数 W 为**半正定的**(**半负定的**).

定义 12　连续函数 $W(Y):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,如果

1° $W(\mathbf{0}) = 0$;

2° 对一切 $Y\neq 0$,$W(Y) > 0$;

3° 当 $\|Y\|\to\infty$ 时,$W(Y)\to\infty$.

那么称函数 W 为**径向无界的**.

例 7　$W(y_1,y_2) = 2y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2$ 为正定函数;

$W(y_1,y_2) = y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2$ 为半正定函数;

$W(y_1,y_2) = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_1y_2\cos(y_1+y_2)$ 为径向无界函数.

定义 13　连续函数 $V(k,Y):\mathbf{Z}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，如果存在正定函数 $W(Y):\mathbf{Z}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，使得

1° $V(k,0)=0$，对一切 $k\in\mathbf{Z}^+$；

2° 对一切 $k\in\mathbf{Z}^+$ 和 $Y\in\mathbf{R}^n$ 有 $V(k,Y)\geqslant W(Y)(-V(k,Y)\geqslant W(Y))$。

那么称函数 V 为正定的(负定的)。

定义 14　连续函数 $V(k,Y):\mathbf{Z}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，如果对一切 $k\in\mathbf{Z}^+$ 和 $Y\in\mathbf{R}^n$ 有 $V(k,Y)\geqslant 0(\leqslant 0)$。那么称函数 V 为半正定的(半负定的)。

定义 15　连续函数 $V(k,Y):\mathbf{Z}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，如果存在径向无界函数 $W(Y):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，使得

1° $V(k,0)=0$，对一切 $k\in\mathbf{Z}^+$；

2° 对一切 $k\in\mathbf{Z}^+$ 和 $Y\in\mathbf{R}^n$，$V(k,Y)\geqslant W(Y)$。那么称函数 V 为径向无界的。

定义 16　连续函数 $V(k,Y):\mathbf{Z}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，如果存在正定函数 $W(Y):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，使得对一切 $k\in\mathbf{Z}^+$ 和 $Y\in\mathbf{R}^n$ 有 $\|V(k,Y)\|\leqslant W(Y)$。那么称函数 V 为渐小的。

例 8　函数 $V(k,Y)=(1+\cos^2k)y_1^2+2y_2^2$ 是正定、渐小和径向无界的；

函数 $V(k,Y)=(y_1^2+y_2^2)\sin^2\dfrac{k\pi}{3}$ 是半正定和渐小的；

函数 $V(k,Y)=(1+k)(y_1^2+y_2^2)$ 是正定和径向无界的，但不是渐小的；

函数 $V(k,Y)=(y_2-y_1)^2(1+k)$ 是半正定的。

几个主要结果：

定理 8　如果存在正定函数 $V(k,Y)$，使得差分 $\Delta V_{(4\text{-}2)}(k,Y)$ 是半负定的。则方程组(4-2)的零解是稳定的。

定理 9　如果存在一个正定、且是渐小的函数 $V(k,Y)$，使得差分 $\Delta V_{(4\text{-}2)}(k,Y)$ 是半负定的。则方程组(4-2)的零解是一致稳定的。

定理 10　如果存在一个正定函数 $V(k,Y)$，使得差分 $\Delta V_{(4\text{-}2)}(k,Y)$ 是负定的。则方程组(4-2)的零解是渐近稳定的。

定理 11　如果存在一个正定、且是渐小的函数 $V(k,Y)$，使得差分 $\Delta V_{(4\text{-}2)}(k,Y)$ 是负定的。则方程组(4-2)的零解是一致渐近稳定的。

定理 12　如果存在一个正定、渐小且径向无界的函数 $V(k,Y)$，使得差分 $\Delta V_{(4\text{-}2)}(k,Y)$ 是负定的。则方程组(4-2)的零解是全局一致渐近稳定的。

对于自治差分方程组(4-3)，还有下面的定理 13。

定理 13　如果存在正定函数 $V(Y)$，使得差分 $\Delta V_{(4\text{-}3)}(Y)$ 是半负定的，且除零解外，方程组(4-3)的任何解 $Y(k,k_0,Y_0)$ 对充分大的 k，都不能使

$$\Delta V_{(4\text{-}3)}(Y(k,k_0,Y_0))=0$$

成立。则方程组(4-3)的零解是渐近稳定的。

例 9　考虑差分方程组

$$\begin{cases}y_1(k+1)=y_2(k),\\ y_2(k+1)=-f(k)y_1(k),\end{cases}\tag{4-13}$$

其中 $|f(k)|\leqslant a<1$。

取正定、渐小的函数 $V(y_1,y_2)=y_1^2+y_2^2$，则

$$
\begin{aligned}
&\Delta V_{(4\text{-}13)}(y_1(k),y_2(k))\\
&\quad = V(y_1(k+1),y_2(k+1)) - V(y_1(k),y_2(k))\\
&\quad = (y_1^2(k+1)+y_2^2(k+1)) - (y_1^2(k)+y_2^2(k))\\
&\quad = y_2^2(k)+f^2(k)y_1^2(k)-y_1^2(k)-y_2^2(k)\\
&\quad = -(1-f^2(k))y_1^2(k).
\end{aligned}
$$

因为 $|f(k)|\leqslant a<1$,所以差分 $\Delta V_{(4\text{-}13)}(y_1(k),y_2(k))$ 是半负定的.因此,由定理9知方程组(4-13)的零解是一致稳定的.

例10　考虑自治非线性差分方程组

$$
\begin{cases}
y_1(k+1) = \dfrac{y_2(k)}{2(1+y_1^2(k))},\\[2mm]
y_2(k+1) = \dfrac{y_1(k)}{3(1+y_2^2(k))}.
\end{cases} \tag{4-14}
$$

取正定、渐小且径向无界函数 $V(y_1,y_2)=y_1^2+y_2^2$,则

$$
\begin{aligned}
&\Delta V_{(4\text{-}14)}(y_1(k),y_2(k))\\
&\quad = V(y_1(k+1),y_2(k+1)) - V(y_1(k),y_2(k))\\
&\quad = y_1^2(k+1)+y_2^2(k+1)-y_1^2(k)-y_2^2(k)\\
&\quad = \frac{y_2^2(k)}{4(1+y_1^2(k))^2}+\frac{y_1^2(k)}{9(1+y_2^2(k))^2}-y_1^2(k)-y_2^2(k)\\
&\quad \leqslant \left(\frac{1}{4}-1\right)y_2^2(k)+\left(\frac{1}{9}-1\right)y_1^2(k)\\
&\quad = -\frac{4}{3}y_2^2(k)-\frac{8}{9}y_1^2(k),
\end{aligned}
$$

即差分 $\Delta V_{(4\text{-}14)}(y_1(k),y_2(k))$ 是负定的.因此,由定理11知方程组(4-14)的零解是全局渐近稳定的.

例11　考虑自治非线性差分方程组

$$
\begin{cases}
y_1(k+1) = y_2(k)(1-y_1^2(k)),\\[2mm]
y_2(k+1) = y_1(k)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}y_2^2(k)\right).
\end{cases} \tag{4-15}
$$

取正定函数 $V(y_1,y_2)=|y_1|+|y_2|$,不失一般性,仅在 $|y_1|+|y_2|<1$ 的范围内讨论就够了.事实上,当 $|y_1(k)|+|y_2(k)|<1$ 时,由方程组(4-15)就有

$$
\begin{aligned}
|y_1(k+1)|+|y_2(k+1)| &= |y_2(k)(1-y_1^2(k))|+\left|y_1(k)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}y_2^2(k)\right)\right|\\
&\leqslant |y_2(k)|(1-y_1^2(k))+|y_1(k)|\frac{4-y_2^2(k)}{8}\\
&\leqslant |y_2(k)|+\frac{1}{2}|y_1(k)|\\
&\leqslant |y_1(k)|+|y_2(k)|<1.
\end{aligned}
$$

这时

$$
\begin{aligned}
&\Delta V_{(4\text{-}15)}(y_1(k),y_2(k))\\
&\quad = V(y_1(k+1),y_2(k+1)) - V(y_1(k),y_2(k))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= |y_1(k+1)| + |y_2(k+1)| - |y_1(k)| - |y_2(k)| \\
&= |y_2(k)(1 - y_1^2(k))| + \left| y_1(k)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}y_2^2(k)\right)\right| - \\
&\quad |y_1(k)| - |y_2(k)| \\
&= -y_1^2(k)|y_2(k)| - \frac{1}{8}y_2^2(k)|y_1(k)| - \frac{1}{2}|y_1(k)| \\
&= -|y_1(k)|\left(\frac{1}{2} + |y_1(k)y_2(k)| + \frac{1}{8}y_2^2(k)\right) \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

即差分 $\Delta V_{(4\text{-}15)}(y_1(k), y_2(k))$ 是半负定的，并且当且仅当 $y_1(k) = 0$ 时，$\Delta V_{(4\text{-}15)}(y_1(k), y_2(k)) = 0$，这时在范围 $|y_1| + |y_2| < 1$ 内，由方程组(4-15)看出，只要 $y_2(k) \neq 0$，就有 $y_1(k+1) \neq 0$. 所以，除零解以外，不包含方程组(4-15)的任何非零解，使

$$\Delta V_{(4\text{-}15)}(y_1(k), y_2(k)) = 0$$

成立. 因此，由定理 13 知方程组(4-15)的零解是渐近稳定的.

通常称满足本节任何一个定理结论的函数 V 为**李雅普诺夫函数**. 值得指出的是，针对所研究的方程构造出适当的李雅普诺夫函数，技巧性很强，没有一般规律可循，这是这一方法的缺陷. 但一旦能构造出适当的李雅普诺夫函数，不必预先知道方程的解，就可以判定方程解的稳定性.

参 考 文 献

1 Milne-Thomson L M. The calculus of finite differences. New York: The Macmillan Company, 1951.

2 Laksmikanthan V, Trigiante D. Theory of difference equations: numerical methods and applications. New York: Academic Press, 1988.

3 沈以淡. 差分方程. 见: 现代工程数学手册编委会. 现代工程数学手册: 第 Ⅲ 卷. 武汉: 华中工学院出版社, 1988.

4 廖晓昕, 李立鹏. 离散动力系统稳定性的代数判据. 数学物理学报, 1986(4): 375

5 盖尔芳德 A O. 有限差计算: 下册. 北京: 高等教育出版社, 1955.

6 王联, 王慕秋. 常差分方程. 乌鲁木齐: 新疆大学出版社, 1991.

·经典数学卷·

第 12 篇

积分方程

编　者　杜金元
审校者　路见可

目　录

引　言

积分方程是近代数学的一个重要分支.数学、自然科学和工程技术领域中的许多问题都可以归结为积分方程问题.正是由于这种双向联系和深入的特点,积分方程论得到了迅速的发展,成为包括众多研究方向的数学分支.

积分方程理论的发展,始终与数学物理问题的研究紧密相联,它在工程、力学等方面有着极其广泛的应用.通常认为,最早自觉应用积分方程并求出解的是阿贝尔(Abel),他在1823年研究质点力学问题时引出阿贝尔方程.此前,拉普拉斯(Laplace)于1782年在数学物理中研究拉普拉斯变换的逆变换以及傅里叶(Fourier)于1811年研究傅里叶变换的反演问题实际上都是解一类积分方程.随着计算技术的发展,作为工程计算的重要基础之一,积分方程进一步得到了广泛而有效的应用.如今,“物理问题变得越来越复杂,积分方程变得越来越有用”.

积分方程与数学的其他分支,例如,微分方程、泛函分析、复分析、计算数学、位势理论和随机分析等都有着紧密而重要的联系.甚至它的形成和发展是很多重要数学思想和概念的最初来源和模型.例如,对泛函分析中平方可积函数、平均收敛、算子等的形成,对一般线性算子理论的创立,以至于对整个泛函分析的形成都起着重要的推动作用.积分方程论中许多思想和方法,例如,关于第二种弗雷德霍姆(Fredholm)积分方程的弗雷德霍姆理论和奇异积分方程的诺特(Noether)理论以及逐次逼近方法,本身就是数学中经典而优美的理论和方法之一.

因此,积分方程论对于现代数学工作者和科技工作者已成为必须的基础知识.本篇仅介绍积分方程论中最基本的内容.

1　绪　论

1.1　积分方程的概念和分类

1.1.1　积分方程的概念

在积分符号下含有未知函数的方程称为**积分方程**.下面的方程都是积分方程:

$$\int_a^b k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \tag{1-1}$$

$$\varphi(t) - \lambda\int_a^b k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \tag{1-2}$$

$$\int_a^t k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \tag{1-3}$$

$$\varphi(t) - \lambda\int_a^t k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \tag{1-4}$$

$$\varphi(t) = \int_a^b k(t,\tau)g(\tau,\varphi(\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{1-5}$$

$$\varphi(t) = \int_a^b k(t,\tau,\varphi(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{1-6}$$

在上述各方程中，a,b 为有限或无限，本篇仅考察有限 $a<b$ 的情形；λ 为复参数，它的引入形式上不一定必要，但在讨论中却相当有益；$\varphi(\tau)$是未知函数，其余均为已知的函数；(1-5)式和(1-6)式中的函数 $g(\tau,x)$ 和 $k(t,\tau,x)$分别是关于变元 x 的非线性函数，否则它们成为(1-2)式的情形.

1.1.2　积分方程的分类

以上几例实际上给出了积分方程最为常见的分类.(1-5)式和(1-6)式由于它们关于未知函数是非线性的，故称为**非线性积分方程**.(1-5)式通常称为哈墨斯坦(Hammerstein)方程，(1-6)式称为乌雷松(Urysohn)方程.(1-1)～(1-4)式由于其左端可看成关于未知函数的线性算子，故称为**线性积分方程**.形如(1-1)式和(1-3)式的线性积分方程，由于未知函数仅在积分号下出现，故称为**第一种线性积分方程**.形如(1-2)式和(1-4)式的线性积分方程，由于未知函数还出现在其他地方，故称为**第二种线性积分方程**.

在线性积分方程和哈墨斯坦方程中函数 k 称为**积分方程的核**.第二种线性积分方程中的已知函数 f 称为**积分方程的自由项**.当自由项 $f=0$ 时，称方程

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1-7}$$

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^t k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-8}$$

为**第二种齐次线性积分方程**，或者相伴于(1-2)式和(1-4)式的齐次方程.

1.1.3　核的分类

线性积分方程的特征实质上是由它的核决定的.核的分类方式很多，常见的有下面几种类型的核.

(1) 若 $k(t,\tau)$在$[a,b]\times[a,b]$上连续，并且带模

$$\|k\| = (b-a)\max\{|k(t,\tau)|, a\leqslant t,\tau\leqslant b\}, \tag{1-9}$$

那么称 k 为**连续核**.

(2) 若 $k(t,\tau)$在$[a,b]\times[a,b]$上平方可积，并且带模

$$\|k\| = \left(\int_a^b\int_a^b |k(t,\tau)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1-10}$$

则称 k 为 L_2 核.

带连续核或 L_2 核的线性积分方程(1-1)和(1-2)分别称为**第一种弗雷德霍姆积分方程和第二种弗雷德霍姆积分方程**，它们由瑞典几何学家弗雷德霍姆首先提

出并加以系统研究. 如果弗雷德霍姆积分方程中的核具有这样的特征:当 $a\leqslant t<\tau\leqslant b$ 时 $k(t,\tau)=0$,那么 k 称为**沃尔泰拉**(Volterra)**核**. 此时,(1-1)式和(1-2)式成为(1-3)式和(1-4)式,它们分别称为**第一种沃尔泰拉积分方程**和**第二种沃尔泰拉积分方程**. 尽管沃尔泰拉积分方程是弗雷德霍姆积分方程的特例,但它们有其个性,一般加以单独讨论,它们由意大利数学家沃尔泰拉首先提出并加以研究.

(3) 若核具有如下形式:

$$k(t,\tau)=\frac{h(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1, h\text{ 是有界可测函数}, \tag{1-11}$$

则称 k 为**弱奇性核**,此时的线性积分方程称为**带弱奇性的线性积分方程**.

(4) 若核为下面形式:

$$k(t,\tau)=\frac{h(t,\tau)}{t-\tau}, \tag{1-12}$$

其中 h 为赫尔德(Hölder)连续函数,则称 k 为**柯西**(Cauchy)**核**.

1.2 导出积分方程两例

数学理论的发展和工程问题的需要都是产生积分方程的丰富源泉. 下面通过两例,扼要阐明如何导出积分方程.

1.2.1 两点边值问题

考察两点边界条件的二阶微分方程

$$\begin{cases} y''(x)=f(x,y), \\ y(0)=\alpha, \\ y(1)=\beta, \end{cases} \tag{1-13}$$

其中 f 是连续函数,α 和 β 是已知的常数.

对(1-13)式中的微分方程积分二次并注意到边界条件,得到下面等价的积分方程

$$y(x)=h(x)-\int_0^1 k(x,\tau)f(\tau,y(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

其中

$$h(x)=\alpha+(\beta-\alpha)x, k(x,\tau)=\begin{cases}\tau(1-x), & 0\leqslant\tau\leqslant x, \\ x(1-\tau), & x\leqslant\tau\leqslant 1,\end{cases}$$

如果(1-13)式中的微分方程是线性的,例如

$$\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=f(x), \\ y(0)=y(1)=0, \end{cases}$$

那么与之等价的是一个第二种弗雷德霍姆积分方程

$$y(x)-\lambda\int_0^1 k(x,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau = F(x),$$

其中

$$F(x) = -\int_0^1 k(x,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

在一定条件下积分算子比微分算子在某些方面具有更好的特性,因此不少微分方程的问题往往化为积分方程处理更为有利.

1.2.2　质点力学问题

1823年,阿贝尔研究过这样一个力学问题:一质点沿铅直平面上之一光滑曲线自由下落,试求这样的曲线,使得质点达到最低点所需的时间为其所经之高的已知函数 $f(h)$.

首先取一垂直线为 y 轴,通过最低点之水平线为 x 轴.命该质点之原位置为 $P(\xi,h)$,经过 t 秒后降至 $Q(\eta,y)$点,如图1-1所示,s 表示 P 和 Q 两点间所求曲线的弧长.$v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 表质点在 Q 点的速度,由熟知的力学定理知

$$v=\sqrt{2g(h-y)},$$

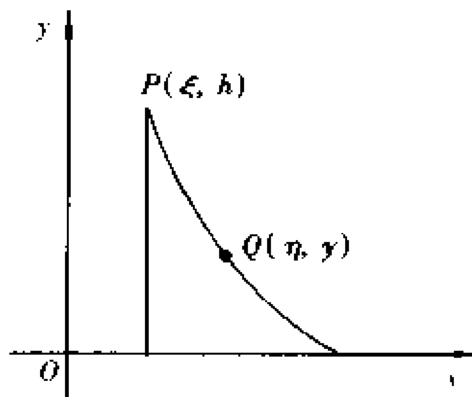


图1-1

其中 g 为重力加速度.于是

$$\int_0^h \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=\int_0^h \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=f(h),$$

故

$$\int_0^h \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2g(h-y)}}=f(h).$$

设所求曲线的方程为 $x=F(y)$,则 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+[F'(y)]^2}\mathrm{d}y$,由此即导出**阿贝尔积分方程**

$$\int_0^h \frac{\varphi(y)}{\sqrt{h-y}}\mathrm{d}y=\sqrt{2g}\,f(h),$$

其中

$$\varphi(y)=\sqrt{1+[F'(y)]^2}.$$

阿贝尔方程是一种特殊的第一种沃尔泰拉积分方程.它是历史上最早被提出和讨论的积分方程之一.

1.3　线性积分算子

1.3.1　$C[a,b]$上的线性积分算子

$C[a,b]$表示$[a,b]$上连续函数空间,其上装配范数

$$\|f\|=\max\{|f(t)|,\quad a\leqslant t\leqslant b\}. \tag{1-14}$$

因此 $C[a,b]$是一个巴拿赫(Banach)空间.设 $k(t,\tau)$是连续核,$f\in C[a,b]$,定义

$$\varphi(t)=\int_a^b k(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1-15}$$

那么 φ 也是$[a,b]$上的连续函数,事实上

$$\omega(\varphi,h)\leqslant(b-a)\|f\|\,\omega(k,h), \tag{1-16}$$

此处 $\omega(\varphi,\cdot)$表示函数的连续模.利用(1-15)式引入算子 K:

$$(\mathrm{K}f)(t)=\int_a^b k(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1-17}$$

那么 K 是从 $C[a,b]$到 $C[a,b]$的算子,显然它是线性的,而且是有界的:

$$\|\mathrm{K}\|\leqslant\|k\|. \tag{1-18}$$

K 称为 $C[a,b]$上的**线性积分算子**.从(1-16)式和(1-18)式,由阿尔最拉(Arzelà)引理知道 K 是一个紧算子.

(1-15)式中的 φ 的连续性并非来自 f 的连续性,它完全源于核 k 的连续性.若用 $L_2[a,b]$记$[a,b]$上平方可积函数空间,其上装配的内积和诱导范数分别为

$$(f,g)=\int_a^b f(\tau)\overline{g(\tau)}\mathrm{d}\tau,\quad \|f\|=\left(\int_a^b |f(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1-19}$$

则 $L_2[a,b]$是一个希尔伯特(Hilbert)空间.若 $f\in L_2[a,b]$,k 是一个连续核,那么由施瓦兹(Schwarz)不等式知(1-16)式成为

$$\omega(\varphi,h)\leqslant\sqrt{(b-a)}\,\|f\|\,\omega(k,h), \tag{1-20}$$

这表明也可以把 K 看成是从 $L_2[a,b]$到 $C[a,b]$的线性积分算子,并且有

$$\|\mathrm{K}\|\leqslant\frac{\|k\|}{\sqrt{b-a}}. \tag{1-21}$$

因而同前一样可知 $\mathrm{K}:L_2[a,b]\to C[a,b]$也是一个紧算子.

1.3.2 $L_2[a,b]$上的线性积分算子

设 $k(t,\tau)$是 L_2 核,$f\in L_2[a,b]$,那么由(1-15)式定义的 φ 在$[a,b]$上几乎处处有定义,并且由富比尼(Fubini)定理和施瓦兹不等式可知

$$\int_a^b|\varphi(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b\int_a^b|k(t,\tau)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\cdot\int_a^b|f(\tau)|^2\mathrm{d}\tau. \tag{1-22}$$

上式表明,(1-15)式定义了一个从 $L_2[a,b]$到 $L_2[a,b]$的线性算子,并且

$$\|\mathrm{K}\|\leqslant\|k\|. \tag{1-23}$$

此时,称 K 为 $L_2[a,b]$上的线性积分算子.可以证明 K 是一个紧算子,因为它可由一列连续核的线性积分算子 K_n 逼近,而 K_n 是 $L_2[a,b]$到 $C[a,b]$的紧算子,当然也是 $L_2[a,b]$到 $L_2[a,b]$的紧算子.有时也称 K_n 为 $L_2[a,b]$到 $L_2[a,b]$的**强紧算子**.

1.3.3 合成核

为方便,用 B 表示 $C[a,b]$空间和 $L_2[a,b]$空间之一.相应地,B 上的线性积分算子是指 $C[a,b]$上的和 $L_2[a,b]$上的线性积分算子之一.用 $\mathscr{B}(B)$表示全体从 B 到 B 的有界线性算子空间,$\mathscr{B}(B)$是一个巴拿赫代数.因此可以考虑两个线性积分算子的乘积,当然它仍然是一个有界线性算子,但我们关心它是否仍是一个线性积分算子.

设由核 $h(t,\tau)$定义的线性积分算子

$$(\mathrm{H}f)(t)=\int_a^b h(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-24}$$

是 B 上的一个线性积分算子,它与 B 上的线性积分算子 K 的乘积为

$$\begin{aligned}(\mathrm{HK}f)(t) &= \int_a^b h(t,s)\left[\int_a^b k(s,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b\left[\int_a^b h(t,s)k(s,\tau)\mathrm{d}s\right]f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_a^b l(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

其中

$$l(t,\tau) = \int_a^b h(t,s)k(s,\tau)\mathrm{d}s. \tag{1-25}$$

以上重积分交换积分次序的合理性在 h 和 k 为连续核时是显然的,在 h 和 k 为 L_2 核时用到了富比尼定理及其推广的托尼列-赫伯生(Toneli-Hobson)定理.(1-25)式表明 h 和 k 是连续核时 l 也是连续核,且

$$\| l \| \leqslant \| h \| \ \| k \|. \tag{1-26}$$

h 和 k 是 L_2 核时由施瓦兹不等式知 l 也是 L_2 核且仍有(1-26)式.

因此 L = HK 也是 B 上的线性积分算子,以 l 为核.核 l 称为核 h 和 k 的**合成核**.线性积分算子 K^n 的核称为 k 的第 n 次叠核,记为 k^n.显然

$$k^{p+q}(t,\tau) = \int_a^b k^p(t,s)k^q(s,\tau)\mathrm{d}s,\ \| k^n \| \leqslant \| k \|^n. \tag{1-27}$$

1.3.4 退化核

若核 $k(t,\tau)$具有下面的形式

$$k(t,\tau) = \sum_{j=1}^n a_j(t)\overline{b_j(\tau)}, \tag{1-28}$$

其中 a_j, b_j 是非零函数,则称 k 为**退化核**.把 k 表示成(1-28)式的最小正整数 n 称为 k 的**秩**.如果 k 的秩为 n,那么(1-28)式中的$\{a_j\}_1^n$ 和$\{b_j\}_1^n$ 分别是线性无关的.反之,若$\{a_j\}_1^n$ 和$\{b_j\}_1^n$ 都是线性无关的,则 k 的秩为 n.

若 k 是秩为 n 的退化核,如(1-28)式,那么以 k 为核的线性积分算子为

$$\mathrm{K}f = \sum_{j=1}^n (f, b_j)a_j, \tag{1-29}$$

故 K 称为有限秩的.又若 H 是以 h 为核的线性积分算子,那么

$$\mathrm{HK}f = \sum_{j=1}^n (f, b_j)\mathrm{H}a_j, \tag{1-30}$$

也就是说 h 和 k 的合成核仍然是一个退化核,即

$$l(t,\tau) = \sum_{j=1}^n (\mathrm{H}a_j)(t)\overline{b_j(\tau)}. \tag{1-31}$$

1.3.5 共轭线性积分算子

设 k 是 L_2 核,令

$$k^*(t,\tau) = \overline{k(\tau,t)}, \tag{1-32}$$

则 k^* 也是 L_2 核,称为 k 的**共轭核**.若 $k(t,\tau)=k^*(t,\tau)$,则 k 称为**埃尔米特(Hermite)核**,实值的埃尔米特核称为**对称核**.由共轭核的定义有

$$(k^*)^*=k,\ \|k^*\|=\|k\|,(\lambda k)^*=\bar{\lambda}k^*,(k+h)^*=k^*+h^*. \qquad (1\text{-}33)$$

又若记 K^* 为由共轭核 k^* 定义的线性积分算子,那么对于任何 $L_2[a,b]$ 的函数 f 和 g,有

$$\begin{aligned}(\mathrm{K}f,g)&=\int_a^b\overline{g(t)}\left[\int_a^b k(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\tau\\&=\int_a^b f(\tau)\left[\int_a^b\overline{k^*(\tau,t)g(t)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau\\&=(f,\mathrm{K}^*g),\end{aligned}$$

上式表明由共轭核 k^* 定义的线性积分算子 K^* 是由 k 定义的线性积分算子 K 的共轭算子,称为线性积分算子 K 的**共轭线性积分算子**.另由上式得知,积分算子 K 是自共轭的充要条件为 k 是埃尔米特核.

称积分方程

$$\phi=g+\bar{\lambda}\mathrm{K}^*\phi \qquad (1\text{-}34)$$

为积分方程

$$\varphi=f+\lambda\mathrm{K}\varphi \qquad (1\text{-}35)$$

的**共轭方程**.

关于线性积分算子的乘法有下面的共轭法则

$$(\mathrm{HK})^*=\mathrm{K}^*\mathrm{H}^*. \qquad (1\text{-}36)$$

1.3.6　特征值和特征函数

显然 $\varphi=0$ 是第二种齐次弗雷德霍姆方程

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (1\text{-}37)$$

的解,称为**平凡解**.如果(1-37)式只有平凡解,则称 λ 为**正则值**;若除平凡解外还有异于零的解 φ,则称 λ 为**特征值**,此解称为 K 或者方程(1-37)对应于 λ 的一个**特征函数**;对应于特征值 λ 的一切特征函数张成的线性子空间称为对应于 λ 的**特征子空间**.

2　第二种弗雷德霍姆积分方程·小参数情形

2.1　迭代解法

2.1.1　迭代解法的原理

考虑第二种弗雷德霍姆积分方程

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (2\text{-}1)$$

若 k 为连续核，$f\in C[a,b]$，在 $C[a,b]$ 上求解 φ，那么说(2-1)式是 $C[a,b]$ 上的积分方程．若 k 为 L_2 核，$f\in L_2[a,b]$，在 $L_2[a,b]$ 上求解 φ，那么说(2-1)式是 $L_2[a,b]$ 上的积分方程．如前，若这两种情况不需区分时，则说(2-1)式是 B 上的积分方程．

假定(2-1)式有解 φ，利用等式(2-1)逐次将 φ 代入右端积分号下，有

$$\varphi(t)=f(t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda^j\int_a^b k^j(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau+\lambda^{n+1}\int_a^b k^{n+1}(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad (2\text{-}2)$$

其中 k^j 为 k 的 j 次叠核．

引理1 若(2-1)式有解 φ 且

$$\lim_{n\to\infty}\lambda^{n+1}\int_a^b k^{n+1}(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=0, \qquad (2\text{-}3)$$

那么

$$\varphi(t)=f(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^j\int_a^b k^j(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (2\text{-}4)$$

极限(2-3)和级数(2-4)都是在空间 B 上的．具体地讲，若 k 为连续核，则 $B=C[a,b]$，极限(2-3)是一致收敛，级数(2-4)也是一致收敛；若 k 是 L_2 核，极限(2-3)和级数(2-4)均在平均收敛意义下理解．

引理2 若级数(2-4)在 B 上收敛，则它是(2-1)式的解．

2.1.2 小参数情形的迭代解法

将(2-1)式改写成算子的形式

$$(\mathrm{I}-\lambda\mathrm{K})\varphi=f, \qquad (2\text{-}5)$$

其中 I 为恒等算子，K 为核 k 定义的线性积分算子．

显然，当

$$\|\lambda\mathrm{K}\|<1 \qquad (2\text{-}6)$$

时，

$$\left\|\lambda^{n+1}\int_a^b k^{n+1}(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\right\|\leqslant\|\lambda\mathrm{K}\|^{n+1}\|\varphi\|\to 0, \qquad (2\text{-}7)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\lambda^j\int_a^b k^j(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\|\leqslant\|f\|\sum_{j=1}^{\infty}\|\lambda\mathrm{K}\|^j<+\infty. \qquad (2\text{-}8)$$

定理1 若 $|\lambda|\,\|\mathrm{K}\|<1$，那么 B 上的第二种弗雷德霍姆积分方程(2-1)有唯一解(2-4)．

这个结果用 $\mathscr{B}(B)$ 上算子级数的观点看相当明了：$\mathscr{B}(B)$ 是巴拿赫空间，因此在条件(2-6)下有算子展式

$$(\mathrm{I}-\lambda\mathrm{K})^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\mathrm{K}^j. \qquad (2\text{-}9)$$

定理2 若 $|\lambda|\,\|\mathrm{K}\|<1$，那么 B 上的第二种弗雷德霍姆积分方程(2-1)有唯一解

$$\varphi=(\mathrm{I}+\lambda\mathrm{R}_\lambda)f, \qquad (2\text{-}10)$$

其中

$$R_\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K^j. \tag{2-11}$$

推论 1 若$|\lambda| \|K\| < 1$,那么 λ 是 K 的正则值.

这个结果表明在 $\lambda = 0$ 充分小的邻域内的值都是正则值,因此说讨论的是小参数情形.

2.2 诺伊曼级数和预解核

2.2.1 诺伊曼级数

在小参数$|\lambda| \|K\| < 1$ 的情形下第二种弗雷德霍姆方程存在唯一解.进一步将讨论线性算子 R_λ 何时仍然是 B 上的一个线性积分算子.为此,最自然的条件是(2-4)式右端的级数与积分可交换顺序.这只需考察级数

$$r_\lambda(t,\tau) = r(t,\tau,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} k^j(t,\tau) \tag{2-12}$$

的收敛性.

引理 3 当$|\lambda| \|k\| < 1$ 时,若 k 是连续核,那么级数(2-12)在 $C([a,b] \times [a,b])$上收敛(一致收敛)于 $r(t,\tau,\lambda)$,从而 r_λ 也是连续核;若 k 是 L_2 核,那么级数(2-12)在 $L_2([a,b] \times [a,b])$上收敛(平均收敛)于 $r(t,\tau,\lambda)$,从而 r_λ 也是 L_2 核.

(2-12) 式右端的级数称为**诺伊曼**(Neumann) **级数**. 当 k 是连续核时 $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda^{j-1} k^j(t,\tau)|$ 在 $a \leqslant t,\tau \leqslant b$ 上一致收敛,称(2-12)式**正规收敛**.此时 $r(t,\tau,\lambda)$ 对于固定的(t,τ)是 λ 在$\lambda < 1/\|k\|$ 中的解析函数.当 k 是L_2 核时,$r(t,\tau,\lambda)$ 对于几乎所有固定的(t,τ)也是 λ 在$\lambda < 1/\|k\|$ 中的解析函数,因平均收敛的级数(2-12) 也是概收敛的.

引理 4 若 k 是L_2 核,$\|\lambda k\| < 1$,那么级数(2-12)概收敛于 $r(t,\tau,\lambda)$.

同样地,对于 $h \in L_2([a,b] \times [a,b])$时有$\int_a^b\int_a^b r(t,\tau,\lambda)h(t,\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$ 关于λ 的解析性和对于 $f \in L_2[a,b]$ 时有$\int_a^b r(t,\tau,\lambda)f(t)\mathrm{d}t$ 与$\int_a^b r(t,\tau,\lambda)f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 关于λ 的解析性.

定理 3 若$|\lambda| \|k\| < 1$,那么第二种弗雷德霍姆方程(2-1)在 B 上有唯一解

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b r(t,\tau,\lambda)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2-13}$$

其中 $r(t,\tau,\lambda)$为(2-12)式.

2.2.2 预解核

对照(2-13)式和(2-10)式,可知 R_λ 是以 r_λ 为核的线性积分算子.核 r_λ 称为**预解核**.显然,

$$\begin{cases} R_\lambda = K + \lambda K R_\lambda, \\ R_\lambda = K + \lambda R_\lambda K, \end{cases} \tag{2-14}$$

即,预解核满足下面的预解方程

$$\begin{cases} r(t,\tau,\lambda) = k(t,\tau) + \lambda \int_a^b k(t,s) r(s,\tau,\lambda) \mathrm{d}s, \\ r(t,\tau,\lambda) = k(t,\tau) + \lambda \int_a^b r(t,s,\lambda) k(s,\tau) \mathrm{d}s, \end{cases} \tag{2-15}$$

以上结果是在小范数 $\|\lambda k\| < 1$ 的情况下得到的,对一般情况可给出如下定义.

定义 若存在 L_2 核 r_λ,使得(2-15)式成立,那么称 r_λ 为预解核.

引理 5 若 r_λ 是连续核 k 的预解核,那么 r_λ 也是连续的.

定理 4 若对于给定的 λ,存在预解核 $r(t,\tau,\lambda)$,那么第二种弗雷德霍姆方程(2-1)在 B 上有唯一解,且这个解可由预解核表示成(2-13)式.反之,若(2-1)式对任何 f 存在唯一解,并且由核 $r(t,\tau,\lambda)$ $(r(t,\tau,0) = k(t,\tau))$ 表示成(2-13)式,那么 $r(t,\tau,\lambda)$ 是预解核.

推论 2 对于给定的 λ 值,核 k 的预解核是唯一的.

定理 5 若 $r(t,\tau,\lambda)$ 是 K 对应于 λ 的预解核,那么 $r^*(t,\tau,\lambda)$ 是 K^* 对应于 $\overline{\lambda}$ 的预解核.

3 沃尔泰拉积分方程

3.1 第二种沃尔泰拉积分方程

B 上的第二种沃尔泰拉积分方程

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^t k(t,\tau) \varphi(\tau) \mathrm{d}\tau = f(t) \tag{3-1}$$

是 B 上的第二种弗雷德霍姆积分方程的特殊情况,因而前面所述的方法和工具对此完全有效,而且在这种情况下,可以对诺伊曼级数进行更精细的估计.

3.1.1 沃尔泰拉核的合成

由沃尔泰拉核的定义知,两个沃尔泰拉核的合成核仍然是沃尔泰拉核.事实上,

$$l(t,\tau) = \int_a^b h(t,s) k(s,\tau) \mathrm{d}s. \tag{3-2}$$

当 $t < \tau$ 时,或者 $h(t,s) = 0$ 或者 $k(s,\tau) = 0$,从而 $l(t,\tau) = 0$,即 l 为沃尔泰拉核.显然

$$l(t,\tau) = \int_\tau^t h(t,s) k(s,\tau) \mathrm{d}s, \quad a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b. \tag{3-3}$$

特别,沃尔泰拉核的各次迭核都是沃尔泰拉核.且对于它们的范数有下面的估计.

若 k 为连续核,且

$$|k(t,\tau)|\leqslant M,$$

那么

$$|k^n(t,\tau)|\leqslant\frac{M^n}{(n-1)!}(t-a)^{n-1}.$$

特别

$$\| k^n \| \leqslant\frac{1}{(n-1)!}\| k\|^n. \tag{3-4}$$

若 k 是 L_2 核,且

$$\| k\| \leqslant M,$$

令

$$A(t)=\int_a^t|k(t,\tau)|^2\mathrm{d}\tau,\quad B(\tau)=\int_\tau^b|k(t,\tau)|^2\mathrm{d}t,\rho(t)=\int_a^t A(s)\mathrm{d}s,$$

那么

$$|k^n(t,\tau)|^2\leqslant\frac{1}{(n-2)!}A(t)B(\tau)\rho^{n-2}(t),\quad n\geqslant 2. \tag{3-5}$$

特别

$$\| k^n\| \leqslant\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}\| k\|^n. \tag{3-6}$$

3.1.2 沃尔泰拉核的诺伊曼级数

引理 1 对于任何给定 λ 值,第二种沃尔泰拉积分方程(3-1)的诺伊曼级数

$$r(t,\tau,\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}k^j(t,\tau) \tag{3-7}$$

是收敛的,并且 $r(t,\tau,\lambda)$ 仍然是沃尔泰拉核,特别在 k 为连续核时,r 也是连续核.

注意由(3-4)式或(3-6)式知范数级数 $\sum_{j=1}^{\infty}\|\lambda^{j-1}k^j\|$ 收敛,故(3-7)式收敛.此时称(3-7)式**绝对收敛**.

定理 1 B 上的第二种沃尔泰拉积分方程(3-1)有唯一解,且解可表为

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^t r(t,\tau,\lambda)f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

根据连续核的定义,沃尔泰拉核 k 当且仅当在对角线 $a\leqslant t=\tau\leqslant b$ 上 $k(t,t)=0$ 时是连续核.在实际中常见的沃尔泰拉核在三角形区域 $a\leqslant\tau\leqslant t\leqslant b$ 上连续,称为**连续的沃尔泰拉核**,它可能在对角线上 $a\leqslant t=\tau\leqslant b$ 有第一种不连续点.这时对于连续的沃尔泰拉核前面的结果仍然成立,因为它们定义的线性积分算子仍然是 $C[a,b]\to C[a,b]$ 的,它们的合成核甚至是连续核.

3.2　第一种沃尔泰拉积分方程

一般来讲,求解第一种沃尔泰拉积分方程

$$\int_a^t k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) \tag{3-8}$$

比求解第二种沃尔泰拉方程困难,常用方法是在一定条件下化(3-8)式为第二种沃尔泰拉积分方程求解.

3.2.1　微分法

假定 $k(t,\tau)$在$[a,b]\times[a,b]$上连续并且存在连续的偏导数 $k'_t(t,\tau)$,f在$[a,b]$上连续可导,且$f(a)=0$.微分(3-8)式得到

$$k(t,t)\varphi(t)+\int_a^t k'_t(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f'(t). \tag{3-9}$$

反之,积分(3-9)式自然得到(3-8)式.因此(3-8)式与(3-9)式等价.

若 $k(t,t)\neq 0(a\leqslant t\leqslant b)$,那么(3-9)式化为

$$\varphi(t)+\int_a^t \frac{k'_t(t,\tau)}{k(t,t)}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{f'(t)}{k(t,t)}, \tag{3-10}$$

这是一个 $C[a,b]$上的第二种沃尔泰拉积分方程,它有唯一的解.

定理2　若 $k(t,\tau)$在$[a,b]\times[a,b]$上连续并且存在连续的偏导数 $k'_t(t,\tau)$,$k(t,t)\neq 0(a\leqslant t\leqslant b)$,$f$在$[a,b]$上连续可导,且 $f(a)=0$,则方程(3-8)有唯一的连续解.

3.2.2　积分法

在定理2的条件下,如果还存在连续的偏导数 $k'_\tau(t,\tau)$,也可用分部积分法将(3-8)式化成一个第二种沃尔泰拉积分方程.

令

$$\phi(t) = \int_a^t \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

对(3-8)式分部积分,得

$$k(t,t)\phi(t) - \int_a^t k'_\tau(t,\tau)\phi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t),$$

若 $k(t,t)\neq 0(a\leqslant t\leqslant b)$,则

$$\phi(t) - \int_a^t \frac{k'_\tau(t,\tau)}{k(t,t)}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{f(t)}{k(t,t)}.$$

这是一个 $C[a,b]$上的第二种沃尔泰拉积分方程,它有唯一解.

如 $k(t,t)$在$[a,b]$上有零点,反复运用微分法或积分法,总能把方程简化成第二种沃尔泰拉积分方程.

3.3 阿贝尔积分方程

阿贝尔积分方程的一般形式为

$$\int_a^s \frac{\varphi(\tau)}{(s-\tau)^\alpha}\mathrm{d}\tau = f(s), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3-11}$$

3.3.1 解的唯一性

对(3-11)式两边乘以$(t-s)^{\alpha-1}$然后对s从a到t积分,得

$$\int_a^t \left[\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}}\int_a^s \frac{\varphi(\tau)}{(s-\tau)^\alpha}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s = \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s,$$

交换上式左边的积分顺序,便得

$$\int_a^t \varphi(\tau)\left[\int_\tau^t \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}(s-\tau)^\alpha}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}\tau = \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s,$$

作代换 $s=\tau+u(t-\tau)$,可算出上式右端内层积分

$$\int_\tau^t \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}(s-\tau)^\alpha}\mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{1}{(1-u)^{1-\alpha}u^\alpha}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

因此

$$\int_a^t \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau. \tag{3-12}$$

对上式两边求导(假定右端导数存在),即得

$$\varphi(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau. \tag{3-13}$$

由此还同时证明了解的唯一性.

3.3.2 解的存在性

(3-13)式确实是(3-11)式的解.记

$$F(t) = \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau, \tag{3-14}$$

$$g(s) = \int_a^s \frac{1}{(s-\tau)^\alpha}\,\frac{\sin\alpha\pi F'(\tau)}{\pi}\mathrm{d}\tau. \tag{3-15}$$

要证解的存在性,只需证明 $g(s)=f(s)$. 把(3-15)式看成未知函数 $\sin\alpha\pi F'(\tau)/\pi$ 的一个阿贝尔积分方程,重复由(3-11)式到(3-12)式的推导过程,得

$$F(t) = \int_a^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau. \tag{3-16}$$

对比(3-14)式和(3-16)式有

$$\int_a^t \frac{f(\tau)-g(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau = 0.$$

前面已经证明,阿贝尔积分方程的解唯一,故 $f(\tau)=g(\tau)$.

4 第二种弗雷德霍姆积分方程·退化核情形

4.1 相伴线代方程

如果 k 是退化核,形如(1-28)式,那么第二种弗雷德霍姆积分方程(2-1)成为

$$\varphi - \lambda \sum_{j=1}^{n} (\varphi, b_j) a_j = f. \tag{4-1}$$

求解(4-1)式可化成求解一个线代方程组.

4.1.1 相伴线代方程

用 E^n 表示复 n 维列向量组成的复欧几里德(Euclid)空间.引入算子 $\Gamma: L_2[a,b] \to E^n$ 和算子 $\mathrm{L}: E^n \to L_2[a,b]$ 如下:

$$\Gamma\varphi = ((\varphi, b_1), (\varphi, b_2), \cdots, (\varphi, b_n))^{\mathrm{T}}, \tag{4-2}$$

$$\mathrm{L}\boldsymbol{\delta}_n = f + \lambda \sum_{j=1}^{n} \delta_{nj} a_j, \tag{4-3}$$

其中 $$\boldsymbol{\delta}_n = (\delta_{n1}, \delta_{n2}, \cdots, \delta_{nn})^{\mathrm{T}}.$$

显然,若 φ 是(4-1)式的解,那么

$$\varphi = \mathrm{L}\Gamma\varphi, \tag{4-4}$$

并且用 Γ 作用(4-1)式知 $\boldsymbol{\delta}_n = \Gamma\varphi$ 是下面线代方程组

$$(\boldsymbol{I}_n - \lambda \boldsymbol{K}_n)\boldsymbol{\delta}_n = \Gamma f \tag{4-5}$$

的解,其中 $\boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位矩阵,$\boldsymbol{K}_n$ 为 n 阶方阵:

$$\boldsymbol{K}_n = [k_{rj}], \quad k_{rj} = (a_j, b_r).$$

反之,若 $\boldsymbol{\delta}_n$ 是(4-5)式的解,那么

$$\Gamma\mathrm{L}\boldsymbol{\delta}_n = \Gamma f + \lambda \boldsymbol{K}_n \boldsymbol{\delta}_n = \boldsymbol{\delta}_n. \tag{4-6}$$

于是(4-3)式成为

$$\mathrm{L}\boldsymbol{\delta}_n = f + \lambda \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{L}\boldsymbol{\delta}_n, b_j) a_j,$$

即 $\varphi = \mathrm{L}\boldsymbol{\delta}_n$ 为(4-1)式的解.

线代方程(4-5)称为积分方程(4-1)的**相伴线代方程**.用 E 表示(4-1)式的解集,F 表示(4-5)式的解集,由(4-4)式和(4-6)式有下面引理.

引理 1 $\Gamma: E \to F$ 和 $\mathrm{L}: F \to E$ 互为逆算子,并且理解 $E = \varnothing$ 等价于 $F = \varnothing$.

推论 1 (4-1)式的齐次方程与(4-5)式的齐次方程的解空间具有相同维数.

把已有的结果用于(4-1)式的齐次共轭方程

$$\phi - \lambda \sum_{j=1}^{n} (\phi, a_j) b_j = 0, \tag{4-7}$$

它的相伴线代方程是

$$(\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{K}_n^*)\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0},\tag{4-8}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_n^*=[k_{jr}^*],\quad k_{jr}^*=(b_j,a_r),\quad \boldsymbol{\beta}_n=(\beta_{n1},\beta_{n2},\cdots,\beta_{nn})^{\mathrm{T}}.$$

注意：$k_{jr}^*=(b_j,a_r)=\overline{(a_r,b_j)}=\overline{k_{rj}}$，故 $\boldsymbol{K}_n^*$ 是 $\boldsymbol{K}_n$ 的转置共轭矩阵.(4-8)式是(4-5)式的转置共轭方程.

引理 2 若 ϕ 是(4-7)式的解，$\boldsymbol{\beta}_n$ 是(4-8)式的解，那么$(f,\phi)=0\Leftrightarrow(\Gamma f,\beta)=0$.

4.1.2 弗雷德霍姆定理

把关于线代方程组的弗雷德霍姆定理转移到积分方程(4-1)上来.

定理 1 对于 B 上的第二类弗雷德霍姆积分方程(4-1)，

1° 当 λ 是正则值时，它有唯一解；

2° 当 λ 为特征值时，当且仅当 f 与齐次共轭方程(4-7)的任何解 ϕ 正交，即$(f,\phi)=0$ 时，它有解(不唯一)；

3° (4-1)的齐次方程与齐次共轭方程(4-7)的解空间的维数相同.

4.2 预解核的表示

4.2.1 预解核的表示

如果(4-5)式的系数行列式

$$d(\lambda)=\det(\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{K}_n)\neq 0,\tag{4-9}$$

则逆矩阵$(\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{K}_n)^{-1}$存在，且

$$(\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{K}_n)^{-1}=\frac{\boldsymbol{D}_\lambda}{d(\lambda)},\tag{4-10}$$

其中 $\boldsymbol{D}_\lambda=[d_{rj}(\lambda)]$表示 $\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{K}_n$ 的代数余子式的转置矩阵.此时，(4-5)式的唯一解为

$$\boldsymbol{\delta}_n=\frac{1}{d(\lambda)}\boldsymbol{D}_\lambda\Gamma f.\tag{4-11}$$

(4-1)式的唯一解为

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=(\mathrm{L}\boldsymbol{\delta}_n)(t)\\&=f(t)+\frac{\lambda}{d(\lambda)}\sum_{j,r=1}^{n}d_{jr}(\lambda)(f,b_r)a_j(t)\\&=f(t)+\lambda\int_a^b r(t,\tau,\lambda)f(\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{4-12}$$

其中

$$r(t,\tau,\lambda)=\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{j,r=1}^{n}d_{jr}(\lambda)a_j(t)\overline{b_r(\tau)}\tag{4-13}$$

是一个退化核.特别

$$r(t,\tau,0)=\sum_{j=1}^{n}a_j(t)\overline{b_j(\tau)}.$$

由定理3知 $r(t,\tau,\lambda)$为预解核.同时由于 $d(\lambda)$和 $d_{jr}(\lambda)$都是 λ 的多项式,于是 $r(t,\tau,\lambda)$是 λ 的一个有理函数.

4.2.2 特征值与正则值

定理2 对于第二种弗雷德霍姆积分方程(4-1),

1° λ 是特征值当且仅当它的相伴线代方程(4-5)的系数行列式 $d(\lambda)=0$,因而它只有有限个特征值;

2° 当 λ 是正则值时,其相应的预解核为(4-13)式,其唯一解为

$$\varphi(\tau)=f(\tau)+\lambda\int_a^b r(t,\tau,\lambda)f(\tau)\mathrm{d}\tau\ . \tag{4-14}$$

这个结果表明在 $\lambda=+\infty$ 的邻域内的值都是正则值,因此说讨论的是大参数情形.

5 第二种弗雷德霍姆积分方程·一般情形

5.1 核的 ω 分解

结合对具小参数和退化核的第二种弗雷德霍姆积分方程讨论时的两种方法,可以讨论 B 上一般核的第二种弗雷德霍姆积分方程

$$\varphi(t)-\lambda\int_a^b k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t). \tag{5-1}$$

5.1.1 ω 分解

引理1 设 k 是一个 L_2 核(或连续核),ω 是一个正数,那么存在 L_2 核(或连续核)s 和退化的 L_2 核(或连续核)p,使

$$k=s+p,\quad \|s\|<\omega,\quad p(t,\tau)=\sum_{j=1}^n a_j(t)\overline{b_j(\tau)}. \tag{5-2}$$

(5-2)称为核 k 的一个 ω 分解.取 k 的一个 ω 分解,使 $|\lambda|<1/\omega$,并且记K,S,P分别为核是 k,s,p 的线性积分算子.由于 $\|\lambda \mathrm{S}\|<1$,于是S相应于 λ 存在预解核 $h(t,\tau,\lambda)$.记 H_λ 是核 $h(t,\tau,\lambda)$ 的线性积分算子.

引理2 方程(5-1)与

$$(\mathrm{I}-\lambda\mathrm{G}_\lambda)\varphi=(\mathrm{I}+\lambda\mathrm{H}_\lambda)f \tag{5-3}$$

同解,其中

$$\mathrm{G}_\lambda=\mathrm{P}+\lambda\mathrm{H}_\lambda\mathrm{P} \tag{5-4}$$

为退化核 $g(t,\tau,\lambda)$ 的线性积分算子,且

$$g(t,\tau,\lambda)=\sum_{j=1}^n(a_j(t)+\lambda(\mathrm{H}_\lambda a_j)(t))\overline{b_j(\tau)}. \tag{5-5}$$

引理 3 方程

$$(\mathrm{I}-\lambda \mathrm{K}^{*})\phi=0 \tag{5-6}$$

和方程

$$(\mathrm{I}-\bar{\lambda}\mathrm{G}^{*})\tilde{\phi}=0 \tag{5-7}$$

的解空间在映射 $\mathrm{I}-\lambda \mathrm{S}^{*}$ 下线性同构.

引理 4 $(f,\phi)=((\mathrm{I}+\lambda \mathrm{H}_{\lambda})f,(\mathrm{I}-\bar{\lambda}\mathrm{S}^{*})\phi)$.

5.1.2 弗雷德霍姆择一原理

由引理 2～4 以及对于退化核方程(5-3)的结果(4.1.2 节定理 1)得到关于方程(5-1)的如下结果：

定理 1(弗雷德霍姆定理) 对于 B 上的第二类弗雷德霍姆积分方程(5-1),

1° 当 λ 是正则值时,对于任何 f 它有唯一解；

2° 当 λ 为特征值时,当且仅当 f 与齐次共轭方程(5-7)的任何解 ϕ 正交,即 $(f,\phi)=0$ 时,它有解(不唯一)；

3° (5-1)的齐次方程与齐次共轭方程(5-7)的解空间的维数相同.

定理 1 中 1°和 2°称为**弗雷德霍姆择一原理**.

5.2 预解核的半纯性质

5.2.1 预解核的局部表示

设方程(5-3)的相伴线代方程的系数矩阵为 $\boldsymbol{I}-\lambda \boldsymbol{G}_n$,其中 $\boldsymbol{G}_n=[g_{jr}(\lambda)]$,那么由(5-5)式,有

$$g_{jr}(\lambda)=(a_j+\lambda \mathrm{H}_{\lambda}a_j,b_r), \tag{5-8}$$

从而 $d(\lambda)=\det(\boldsymbol{I}-\lambda \boldsymbol{G}_n)\neq 0$ 时,方程(5-3)有唯一解：

$$\begin{aligned}\phi(t)&=f(t)+\lambda(\mathrm{H}_{\lambda}f)(t)+\frac{\lambda}{d(\lambda)}\sum_{j,r=1}^{n}d_{jr}(\lambda)(f+\lambda \mathrm{H}_{\lambda}f,b_r)(a_j(t)+\lambda(\mathrm{H}_{\lambda}a_j)(t))\\&=f(t)+\lambda(\mathrm{H}_{\lambda}f)(t)+\frac{\lambda}{d(\lambda)}\sum_{j,r=1}^{n}d_{jr}(\lambda)(f,b_r+\bar{\lambda}(\mathrm{H}_{\lambda})^{*}b_r)(a_j(t)+\lambda(\mathrm{H}_{\lambda}a_j)(t)),\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{D}_{\lambda}=[d_{jr}(\lambda)]$ 表示 $\boldsymbol{I}_n-\lambda \boldsymbol{G}_n$ 的代数余子式的转置矩阵.这个解也是方程(5-1)的唯一解,从而由 2.2.2 节定理 4 知,此时方程(5-1) 的预解核为

$$\begin{aligned}r(t,\tau,\lambda)=&\ h(t,\tau,\lambda)+\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{j,r=1}^{n}d_{jr}(\lambda)[a_j(t)+\lambda(\mathrm{H}_{\lambda}a_j)(t)]\\&\cdot\overline{[b_r(\tau)+\bar{\lambda}((\mathrm{H}_{\lambda})^{*}b_r)(\tau)]}.\end{aligned} \tag{5-9}$$

5.2.2 预解核的半纯性质

若记(5-1)式的预解核为 $r(t,\tau,\lambda)$,根据预解核的唯一性,知它的局部表达式为(5-9)式.又由 3.2 节的结果知 $(\mathrm{H}_{\lambda}a_j)(t)$ 和 $((\mathrm{H}_{\lambda})^{*}b_r)(\tau)$ 和 $h(t,\tau,\lambda)$ 都是 $|\lambda|$

$<1/\omega$ 中 λ 的解析函数,因而 $r(t,\tau,\lambda)$ 在 $|\lambda|<1/\omega$ 中至多有有限个极点.从而 $r(t,\tau,\lambda)$ 是一个半纯函数.

定理 2　对于 B 上第二种弗雷德霍姆方程(5-1),

1° 在任何有界区域内,至多只有有限个特征值;

2° 当 λ 是正则值时,其预解核存在.

5.3　弱奇性核的积分方程

5.3.1　弱奇性核的积分方程

讨论具弱奇性核的积分方程

$$\varphi(t)-\lambda\int_a^b k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \tag{5-10}$$

其中核 k 是弱奇性核,其形为

$$k(t,\tau)=\frac{h(t,\tau)}{|\tau-t|^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1. \tag{5-11}$$

若(5-11)式中 h 为 $[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数,$f\in C[a,b]$,在 $C[a,b]$ 上求解 φ,称(5-11)式是 $C[a,b]$ 上的具弱奇性核的积分方程.若 h 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上有界可测,$f\in L_2[a,b]$,在 $L_2[a,b]$ 上求解 φ,那么称(5-10)式是 $L_2[a,b]$ 上的具弱奇性核的积分方程.仿前,我们说(5-10)式是 B 上的具弱奇性核的积分方程是指这两种情况之一.

5.3.2　化为第二种弗雷德霍姆积分方程

B 上的具弱奇性核的积分方程(5-10)可以化为一个等价的 B 上的第二种弗雷德霍姆积分方程.这可由下列几个引理来完成.

引理 5　若 h 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续,那么积分算子

$$(\mathrm{K}f)(t)=\int_a^b k(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5-12}$$

是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的有界线性算子.若 h 在 $[a,b]\times[a,b]$ 有界可测,那么(5-12)式是 $L_2[a,b]$ 到 $L_2[a,b]$ 的有界线性算子.(5-12)式称为带弱奇性核 k 的线性积分算子.

实际上,当 h 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续,f 在 $[a,b]$ 上连续时,有下面估计式

$$\omega(\mathrm{K}f,\xi)\leqslant C\|f\|[\omega(h,\xi)+\xi^{1-\alpha}],\quad C\text{ 是常数}. \tag{5-13}$$

引理 6　设 $|k(t,\tau)|\leqslant C_1|t-\tau|^{-\alpha}$, $|l(t,\tau)|\leqslant C_2|t-\tau|^{-\beta}$,其中 C_1,C_2 是常数, $0<\alpha,\beta<1$.则对合成核 $m(t,\tau)=\int_a^b k(t,s)l(s,\tau)\mathrm{d}s$,下面估计式成立

$$|m(t,\tau)|\leqslant\begin{cases}C, & \alpha+\beta<1,\\ C(1+\ln|t-\tau|), & \alpha+\beta=1,\\ C|t-\tau|^{1-\alpha-\beta}, & \alpha+\beta>1,\end{cases}$$

其中 C 是常数. 因而合成核仍是弱奇性的.

引理 7　设 $n > 1/(1-\alpha)$, 若 h 连续, 那么叠核 k^n 也是连续的; 若 h 有界可测, 那么叠核 k^n 也是有界可测的.

设 $n > 1/(1-\alpha)$, $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$. 对于叠核 k^n, 显然有

$$(\mathrm{I}-\varepsilon\lambda\mathrm{K})(\mathrm{I}-\varepsilon^2\lambda\mathrm{K})\cdots(\mathrm{I}-\varepsilon^{n-1}\lambda\mathrm{K})(\mathrm{I}-\lambda\mathrm{K}) = \mathrm{I}-\lambda^n\mathrm{K}^n. \tag{5-14}$$

显然, 由引理 5 ~ 7 知, 若 φ 是 B 上具弱奇性核的积分方程(5-10)的解, 那么它也是 B 上第二种弗雷德霍姆积分方程

$$(\mathrm{I}-\lambda^n\mathrm{K}^n)\varphi = \prod_{j=1}^{n-1}(\mathrm{I}-\varepsilon^j\lambda\mathrm{K})f \tag{5-15}$$

的解.

由此及定理 2 立即有下面结果.

定理 3　对于带弱奇性核 k 的线性积分算子 K, 在有界区域中至多有有限个特征值.

若在(5-14)式中诸数 $\varepsilon\lambda, \varepsilon^2\lambda, \cdots, \varepsilon^{n-1}\lambda$ 均不是 K 的特征值, 称 K^n 或迭核 k^n 是**标准的**. 标准的 K^n 一定存在. 事实上, 若用 $p_j(j=1,2,\cdots)$ 表示大于 $1/(1-\alpha)$ 的素数. 反设 $\mathrm{K}_j^p(j=1,2,\cdots)$ 都不是标准的, 那么存在 $m_j(1\leqslant m_j<p_j)$, 使 $\exp(2\pi i m_j/p_j)$ $(j=1,2,\cdots)$ 是 K 的特征值. 因 p_j 为素数, 这些数彼此不相等, 于是在圆周 $|\xi|=|\lambda|$ 上 K^n 有无穷个特征值. 由定理 3 知, 这是不可能的.

引理 8　若叠核 k^n 是标准的, 那么 B 上的具弱奇性核 k 的积分方程(5-10)与 B 上的第二种弗雷德霍姆方程(5-16)同解.

若 k^n 是标准的, 则 $(k^n)^*$ 也是标准的.

推论 1　(5-10)式的齐次共轭方程

$$(\mathrm{I}-\bar{\lambda}\mathrm{K}^*)\phi=0 \tag{5-16}$$

与

$$(\mathrm{I}-\overline{\lambda^n}(\mathrm{K}^*)^n)\phi=0 \tag{5-17}$$

同解. 从而若 $\{\phi_r\}_1^m$ 是(5-17)的全解系, 那么 $\left\{\prod_{j=1}^{n-1}(\mathrm{I}-\varepsilon^j\lambda\mathrm{K})\phi_r\right\}_1^m$ 也是(5-16)和(5-17)的全解系.

定理 4　对于 B 上具弱奇性核的积分方程(5-10),

1° 当 λ 是正则值时, 对于任何 f 它有唯一解;

2° 当 λ 为特征值时, 当且仅当 f 与齐次共轭方程(5-17)的任何解 ϕ 正交, 即 $(f,\phi)=0$ 时, 它有解(不唯一);

3° (5-10)的齐次方程与齐次共轭方程(5-17)的解空间的维数相同.

5.4　若干推广

已经获得的上述结果, 可多方面加以推广. 现给出应用最多的两种情况以及推广中的要点.

5.4.1 沿曲线的积分方程

弗雷德霍姆定理(包括定理1和定理2中1°)可以推广到含复变元和沿曲线的积分方程,即方程

$$\varphi(t)-\lambda\int_{\Gamma}k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\tag{5-18}$$

其中 Γ 为简单逐段光滑曲线(封闭或否),$k(t,\tau)$在 $\Gamma\times\Gamma$ 上连续(或为弱奇性核但(5-12)式中的 h 在 $\Gamma\times\Gamma$ 上连续),f 在 Γ 上连续,求 Γ 上连续函数解 φ. 推广要点是将 Γ 的自然参数方程 $\tau=\tau(s)(0\leqslant s\leqslant l)$代入,化为 $C[0,l]$上的第二种弗雷德霍姆积分方程或弱奇性核的方程.

5.4.2 高维积分方程

弗雷德霍姆定理也可推广到高维积分方程

$$\varphi(M)-\lambda\int_{\Omega}k(M,N)\varphi(N)\mathrm{d}\sigma_N=f(M),\tag{5-19}$$

其中 M,N 为 n 维空间中的点,Ω 为 n 维空间中某个区域或曲面,$\mathrm{d}\sigma_N$ 相应于变点 N 处的"体积"元素.推广的整个思想与一维完全类似,仅计算复杂些.

6 积分方程的数值解法

6.1 机械求积公式

6.1.1 机械求积公式的定义

在实际应用中往往需要提出方便简洁的方法来求出积分方程的近似解,这就是积分方程数值解法的内容.通常的想法是利用一个有限秩算子逼近积分算子,然后把带有限秩算子的方程化成线代方程组.实现这种想法的前提是考虑积分

$$\mathrm{T}_1f=\int_a^b f(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{6-1}$$

的近似计算问题.一般地,需要考虑

$$\mathrm{T}f=\int_a^b w(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{6-2}$$

的近似计算问题.其中 $w(\tau)$是一个固定的非负可积函数,且$\int_a^b w(\tau)\mathrm{d}\tau>0$,称为**权函数**.

取定 n 个不同的点 $\tau_j(a\leqslant\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n\leqslant b)$ 和 n 个数 $H_j(j=1,2,\cdots,n)$,用 f 在 τ_j 的值定义线性泛函

$$Q_n f = \sum_{j=1}^{n} H_j f(\tau_j). \tag{6-3}$$

用 $Q_n f$ 近似 Tf,即

$$\int_a^b w(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \approx \sum_{j=1}^{n} H_j f(\tau_j). \tag{6-4}$$

此时,计算当然方便,仅需要 n 次乘法和加法. 因此(6-4)式称为一个**机械求积公式**. τ_j 称为**求积公式的节点**, H_j 称为**求积公式的系数**,(6-4)式的右边和式称为**求积和**. a, b 都不是节点时称(6-4)式是一个**开型求积公式**,否则称为**闭型求积公式**. 差

$$R_n f = Tf - Q_n f \tag{6-5}$$

称为**求积公式的余项**.

有各种原则给出节点和系数. 例如,对于(6-1)式,取等距节点 $\tau_j = a + j(b-a)/n$ 和等系数 $H_j = (b-a)/n$,(6-3)式实际上就是积分(6-1)的黎曼(Riemann)和. 这种情况对计算最为方便,但估计 $R_n f$ 的信息太少. 另外一个常用构造机械求积的原则是以多项式为标准.

6.1.2 代数精确度

用 Π_m 表示全体次数不超过 m 的多项式所组成的族(当 $m<0$ 时约定 $\Pi_m = \{0\}$).

定义 1 若对于任何 $f \in \Pi_m$ 有 $R_n f = 0$,但存在 $g \in \Pi_{m+1}$ 使 $R_n g \neq 0$,则称求积公式(6-4)具有 m 阶**代数精确度**,记作 $\mathrm{pr}(Q_n) = m$.

记

$$\Delta_n = \prod_{j=1}^{n}(\tau - \tau_j), \tag{6-6}$$

称为**节点多项式**.

显然 $R_n(0) = 0$ 和 $R_n(\Delta_n^2) > 0$,因此 $-1 \leqslant \mathrm{pr}(Q_n) < 2n$. 也就是说任何机械求积公式有确定的代数精确度且最多只能有 $2n-1$ 阶代数精确度. 这种带最高代数精确度的求积公式确实存在,它就是熟知的**高斯(Gauss)求积公式**,其节点和系数由权函数 w 唯一决定.

定义 2 若 $\mathrm{pr}(Q_n) \geqslant n-1$,称求积公式(6-4)为内插型的.

对于内插型的求积公式,其系数 H_j 由节点完全决定,它们是关于节点多项式 Δ_n 的拉格朗日(Lagrange)插值的基本多项式的积分值,即

$$H_j = \frac{1}{\Delta'_n(\tau_j)}\int_a^b \frac{w(\tau)\Delta_n(\tau)}{\tau - \tau_j}\mathrm{d}\tau, \quad j = 1,2,\cdots,n. \tag{6-7}$$

定义 3 若 $\mathrm{pr}(Q_n) = n-1+r$,称(6-4)式为一个 r **拟的高斯求积公式**.

定义 4 对于节点多项式 Δ_n,若对于任何 $f \in \Pi_{r-1}$ 有 $T(\Delta_n f) = 0$,但存在 $g \in \Pi_{m+1}$ 使 $T(\Delta_n g) \neq 0$,则称 Δ_n 具有 r 阶**正交度**,记作 $\mathrm{Ode}(\Delta_n) = r$.

定理 1 若(6-4)式是内插型的求积公式,那么 $\mathrm{pr}(Q_n) = n-1+r$ 等价于 $\mathrm{Ode}(\Delta_n) = r$.

6.2 积分方程的数值解法

6.2.1 数值解法

考虑 $C[a,b]$上的第二种弗雷德霍姆积分方程

$$\varphi(t)-\lambda\int_a^b w(\tau)k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) \tag{6-8}$$

的数值解法.

用一个机械求积公式代替(6-8)式中的积分,得到方程

$$\varphi_n(t)-\lambda\sum_{j=1}^n H_j\ k(t,\tau_j)\varphi_n(\tau_j) = f(t). \tag{6-9}$$

方程(6-9)称为(6-8)式的**逼近方程**,其解 φ_n 称为**逼近解**.在$[a,b]$上取 n 个点$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,构造离散化算子 $\mathrm{r}_n:C[a,b]\to E^n$ 如下:

$$\mathrm{r}_n\varphi = (\varphi(t_1),\varphi(t_2),\cdots,\varphi(t_n))^{\mathrm{T}}. \tag{6-10}$$

用 r_n 作用于(6-9)式两端,得到线代方程

$$(\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{K}_n)\boldsymbol{\delta}_n = \mathrm{r}_n\ f, \tag{6-11}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_n = [H_j\ k_{rj}],\quad k_{rj} = k(t_r,\tau_j).$$

方程(6-11)称为方程(6-9)的**数值方程**,其解称为**数值解**.

构造延展算子 $\mathrm{L}_n:E^n\to C[a,b]$ 如下:

$$(\mathrm{L}_n\boldsymbol{\delta}_n)(t) = f(t)+\lambda\sum_{j=1}^n H_j\ k(t,\tau_j)\delta_{nj}. \tag{6-12}$$

完全同4.1.1节引理1一样,有下面结果:

定理2 用 E_n 表示方程(6-9)的解集,F_n 表示方程(6-11)的解集,那么 $\mathrm{r}_n:E_n\to F_n$ 和 $\mathrm{L}_n:F_n\to E_n$ 互为逆算子,并且理解 $E_n=\varnothing$ 等价于 $F_n=\varnothing$.

以上设计的数值解法,在理论上需要研究两个问题.首先是逼近解的存在性(也就是数值解的存在性),通常叫做方法的可行性问题.其次是逼近解 φ_n 在一定意义下逼近φ,通常叫做方法的收敛性问题.前者一般依赖后者的结果.而研究收敛性问题是一个相当困难的事.

6.2.2 例子

考虑积分方程

$$\varphi(t)-\lambda\int_a^b k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t). \tag{6-13}$$

用黎曼和来逼近方程(6-13)中的积分,得逼近方程

$$\varphi_n(t)-\lambda\sigma_n\sum_{j=1}^n k(t,\tau_j)\varphi_n(\tau_j) = f(t), \tag{6-14}$$

其中 $\sigma_n=(b-a)/n$,节点 $\tau_j=a+j\sigma_n$.取离散点 $t_j=\tau_j$,那么数值方程为

$$(\boldsymbol{I}_n-\lambda\sigma_n\boldsymbol{K}_n)\boldsymbol{\delta}_n=\boldsymbol{f}_n, \tag{6-15}$$

其中 $\boldsymbol{f}_n=(f(t_1),f(t_2),\cdots,f(t_n))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{K}_n=[k_{rj}]$, $k_{rj}=k(t_r,t_j)$.若

$$d_n(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\sigma_n\lambda k_{11} & -\sigma_n\lambda k_{12} & \cdots & -\sigma_n\lambda k_{1n}\\ -\sigma_n\lambda k_{21} & 1-\sigma_n\lambda k_{22} & \cdots & -\sigma_n\lambda k_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\sigma_n\lambda k_{n1} & -\sigma_n\lambda k_{n2} & \cdots & 1-\sigma_n\lambda k_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

那么方程(6-15)有唯一解

$$\boldsymbol{\delta}_n=\frac{1}{d_n(\lambda)}\boldsymbol{D}_\lambda\ \boldsymbol{f}_n, \tag{6-16}$$

其中 $\boldsymbol{D}_\lambda=[d_{rj}(\lambda)]$ 为 $\boldsymbol{I}_n-\lambda\sigma_n\boldsymbol{K}_n$ 的辅矩阵.于是由定理 1 知,逼近解为

$$\varphi_n(t)=(\mathrm{L}_n\boldsymbol{\delta}_n)(t)=f(t)+\frac{\lambda}{d_n(\lambda)}\sum_{j,r=1}^{n}d_{jr}(\lambda)f(t_r)k(t,t_j). \tag{6-17}$$

要讨论逼近解 φ_n 收敛于方程(6-13)的解是件困难的事.我们仅来观察一下这个过程.注意

$$\begin{aligned}d_n(\lambda)=1-\lambda\sigma_n\sum_{j=1}^{n}k_{jj}+\frac{\lambda^2}{2!}\sigma_n^2\sum_{j,r=1}^{n}\begin{vmatrix}k_{jj} & k_{jr}\\ k_{rj} & k_{rr}\end{vmatrix}\\ -\frac{\lambda^3}{3!}\sigma_n^3\sum_{j,r,u=1}^{n}\begin{vmatrix}k_{jj} & k_{jr} & k_{ju}\\ k_{rj} & k_{rr} & k_{ru}\\ k_{uj} & k_{ur} & k_{uu}\end{vmatrix}+\cdots+(-1)^n\lambda^n\sigma_n^n\det\boldsymbol{K}_n.\end{aligned} \tag{6-18}$$

逐次考察(6-18)式的右边中的一切项:和数 $\sigma_n\sum_{j=1}^{n}k_{jj}$ 乃是积分$\int_a^b k(u,u)\mathrm{d}u$ 的黎曼和,和数

$$\sigma_n^2\sum_{j,r=1}^{2}\begin{vmatrix}k_{jj} & k_{jr}\\ k_{rj} & k_{rr}\end{vmatrix}$$

也是关于积分

$$\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}k(u_1,u_1) & k(u_1,u_2)\\ k(u_2,u_1) & k(u_2,u_2)\end{vmatrix}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2$$

的黎曼和,余依此类推.于是,对(6-17)式取极限,自然导致下面关于 λ 的幂级数

$$d(\lambda)=1+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^j d_j, \tag{6-19}$$

其中

$$d_j=\frac{(-1)^j}{j!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}k(u_1,u_1) & k(u_1,u_2) & \cdots & k(u_1,u_j)\\ k(u_2,u_1) & k(u_2,u_2) & \cdots & k(u_2,u_j)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k(u_j,u_1) & k(u_j,u_2) & \cdots & k(u_j,u_j)\end{vmatrix}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_j. \tag{6-20}$$

假设(6-18)式中$\sum_{j=1}^{n} d_{jr}(\lambda)k(t,t_j)$是某个函数$D(t,\tau,\lambda)$在$\tau=t_r$处的值，也就是说(6-17)式右边的和式是$\int_a^b D(t,\tau,\lambda)k(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$的黎曼和. 仿照上述观察$d(\lambda)$的过程，形式上又导致下面关于$\lambda$的幂级数

$$D(t,\tau,\lambda) = k(t,\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j d_j(t,\tau), \tag{6-21}$$

其中

$$d_j(t,\tau) = \frac{(-1)^j}{j!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b \begin{vmatrix} k(t,\tau) & k(t,u_1) & \cdots & k(t,u_j) \\ k(u_1,\tau) & k(u_1,u_1) & \cdots & k(u_1,u_j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k(u_j,\tau) & k(u_j,u_1) & \cdots & k(u_j,u_j) \end{vmatrix} \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_j. \tag{6-22}$$

7　弗雷德霍姆工具

7.1　弗雷德霍姆行列式及其子式

7.1.1　记号

从6.2.2节中得到启示，$r(t,\tau,\lambda)=D(t,\tau,\lambda)/d(\lambda)$应该就是$C[a,b]$上第二种弗雷德霍姆积分方程

$$\varphi(t) - \lambda\int_a^b k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) \tag{7-1}$$

的预解核，其中$d(\lambda)$和$D(t,\tau,\lambda)$分别由(6-19)式和(6-21)式给出，且$d(\lambda)\neq 0$. 弗雷德霍姆在研究方程(7-1)时正是采用这种工具的. 为方便计，引入记号

$$k\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \cdots, & y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} k(x_1,y_1) & k(x_1,y_2) & \cdots & k(x_1,y_n) \\ k(x_2,y_1) & k(x_2,y_2) & \cdots & k(x_2,y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k(x_n,y_1) & k(x_n,y_2) & \cdots & k(x_n,y_n) \end{vmatrix}.$$

于是

$$d(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\lambda^n, \tag{7-2}$$

$$D(t,\tau,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t,\tau)\lambda^n, \tag{7-3}$$

其中

$$d_0 = 1, \quad d_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b k\begin{pmatrix} u_1, u_2, \cdots, u_n \\ u_1, u_2, \cdots, u_n \end{pmatrix} du_1 du_2 \cdots du_n, n \geqslant 1, \tag{7-4}$$

$$d_0(t,\tau) = k(t,\tau), \quad d_n(t,\tau) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b k\begin{pmatrix} t, u_1, \cdots, u_n \\ \tau, u_1, \cdots, u_n \end{pmatrix} du_1 du_2 \cdots du_n, n \geqslant 1. \tag{7-5}$$

显然 $d_n(t,\tau)$在$[a,b]\times[a,b]$上连续.

7.1.2 弗雷德霍姆行列式及其子式

定理 1 设 $k(t,\tau)$是连续核,那么,

1° 级数(7-2)对一切复数 λ 收敛,从而 $d(\lambda)$是整函数,并且在 λ 的任何有界区域内它至多有有限个零点.

2° 对于任何 M,级数(7-3)在$|\lambda|\leqslant M, a\leqslant t,\tau\leqslant b$ 上正规收敛.从而,对于固定的 t,τ, $D(t,\tau,\lambda)$是 λ 的整函数,$D(t,\tau,\lambda)$作为 λ, t, τ 的三元函数,它是连续的.

函数 $d(\lambda)$称为核 $k(t,\tau)$的**弗雷德霍姆行列式**,$D(t,\tau,\lambda)$称为它的**一阶弗雷德霍姆子式**.

7.2 预解核和特征值

7.2.1 预解核

定理 2 若 $d(\lambda)\neq 0$,那么 $r(t,\tau,\lambda)=D(t,\tau,\lambda)/d(\lambda)$是连续核 k 对应于λ 的预解核,即 $C[a,b]$上的第二种弗雷德霍姆积分方程(7-1)对任意 f,有唯一解

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{\lambda}{d(\lambda)}\int_a^b D(t,\tau,\lambda)f(\tau)d\tau.$$

这只需验证 $r(t,\tau,\lambda)$满足预解核方程即可,它由下面引理完成:

引理 1 设 k 是连续核,那么

$$d_n(t,\tau) = d_n k(t,\tau) + \int_a^b d_{n-1}(t,s)k(s,\tau)ds, n\geqslant 1, \tag{7-6}$$

$$d_n(t,\tau) = d_n k(t,\tau) + \int_a^b k(t,s)d_{n-1}(s,\tau)ds, n\geqslant 1. \tag{7-7}$$

因此

$$D(t,\tau,\lambda) = d(\lambda)k(t,\tau) + \lambda\int_a^b D(t,s,\lambda)k(s,\tau)ds, \tag{7-8}$$

$$D(t,\tau,\lambda) = d(\lambda)k(t,\tau) + \lambda\int_a^b k(t,s)D(s,\tau,\lambda)ds. \tag{7-9}$$

7.2.2 特征值

由定理 1 知连续核在任何有界区域至多只有有限个特征值,并且若 λ 是特征

值,那么 $d(\lambda)=0$. 本节证明其逆亦真.

引理2 设 k 是连续核,那么

$$d_n = -\frac{1}{n}\int_a^b d_{n-1}(s,s)\mathrm{d}s, \quad n>1, \tag{7-10}$$

$$d'(\lambda) = -\int_a^b d(s,s,\lambda)\mathrm{d}s. \tag{7-11}$$

(7-10)式可直接从 d_n 和 $d_{n-1}(t,\tau)$ 的定义得出. 由此以及定理1便知(7-11)式.

引理3 若 $D(t,\tau,\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 处的展开式为

$$D(t,\tau,\lambda) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(t,\tau)(\lambda-\lambda_0)^n, \quad m\geqslant 0, \tag{7-12}$$

那么 $c_n(t,\tau)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数, 且对于任何正数 M, (7-12)式在 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant M, a\leqslant t,\tau\leqslant b$ 上正规收敛.

定理3 当且仅当 $d(\lambda)=0$ 时, λ 是方程(7-1)的特征值.

8 埃尔米特核理论

8.1 特征值存在定理

若核 k 是埃尔米特核

$$k(t,\tau)=k^*(t,\tau)=\overline{k(\tau,t)}, \tag{8-1}$$

那么由 k 定义的积分算子 K 是自共轭的. 对于带这种核的 B 上的第二种弗雷德霍姆积分方程

$$\varphi(t)-\lambda\int_a^b k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) \tag{8-2}$$

具有较一般情况更多的特性.

8.1.1 *存在定理*

首先,(8-1)的特征值必是实的. 事实上,若 $\varphi=\lambda_0 \mathrm{K}\varphi$, 那么

$$(\varphi,\varphi)=(\lambda_0\mathrm{K}\varphi,\varphi)=\lambda_0(\mathrm{K}\varphi,\varphi),$$
$$(\varphi,\varphi)=(\varphi,\lambda_0\mathrm{K}\varphi)=\overline{\lambda_0}(\mathrm{K}\varphi,\varphi),$$

从而 $\lambda_0=\overline{\lambda_0}$ 为实数.

其次,对应于不同特征值的特征函数彼此是正交的. 事实上,若 $\varphi_1=\lambda_1\varphi_1, \varphi_2=\lambda_2\varphi_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$, 那么

$$(\varphi_1,\varphi_2)=(\lambda_1\mathrm{K}\varphi_1,\varphi_2)=\lambda_1(\mathrm{K}\varphi_1,\varphi_2),$$
$$(\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_1,\lambda_2\mathrm{K}\varphi_2)=\lambda_2(\mathrm{K}\varphi_1,\varphi_2),$$

从而 $(\varphi_1,\varphi_2)=0$.

对于一般第二种弗雷德霍姆积分方程并不一定存在特征值,例如,沃尔泰拉积分方程.对于带埃尔米特核的积分方程却一定存在特定值.可指出一个明显事实,若 k 是连续核,把它看成一个连续的 L_2 核,那么由(1-20)式知它的 L_2 特征函数 φ 一定仍然是一个连续函数.因而以下仅对 $L_2[a,b]$ 上的方程(8-2)考虑特征值的存在性.

引理 1 设 H 是希尔伯特空间,$K:H\to H$ 是紧自共轭算子($\|K\|\neq 0$),那么一定存在 $e\in H$,$\|e\|=1$,使得 $\|Ke\|=\|K\|$,e 称为 K 的**极大元**.极大元 e 是 K 对应于特征值 $\|K\|^{-2}$ 的特征向量.

推论 1 在引理 1 的条件下,K 有特征值.

在 1.3 节中已有结论,带埃尔米特核的线性积分算子是 $L_2[a,b]\times[a,b]$ 上的紧自共轭算子.

定理 1 若 k 是埃尔米特核,那么对于 B 上的第二种弗雷德霍姆积分方程(8-2),

1° 至少存在一个特征值,

2° 每一个特征值都是实的,

3° 对应于不同特征值的特征函数彼此正交.

8.1.2 特征系

由第二种弗雷德霍姆积分方程的一般理论可知,方程(8-2)的特征值个数为可数的,并且对应于任何一个特征值的特征子空间是有限维的.按特征值的绝对值大小排列为

$$|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\cdots\leqslant|\lambda_n|\leqslant\cdots, \tag{8-3}$$

且任何特征值出现在(8-3)式中的次数等于它的秩.如果特征值的个数为无限,则 $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$.由贝塞尔(Bessel)不等式有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j^2}\leqslant\|k\|^2. \tag{8-4}$$

相应地,特征函数也排列成

$$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots, \tag{8-5}$$

并且由正交化方法,可认为它们是标准正交的.(8-5)称为核 k 或积分方程(8-2)的**特征(函数)系**.有时写为$\{\varphi_n,\lambda_n\}$.对于特征系,由(8-4)式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\leqslant\|k\|^2. \tag{8-6}$$

8.2 展开定理和解的表示

8.2.1 展开定理

定理 2 设$\{\varphi_n,\lambda_n\}$为 k 的特征系,则

$$k(t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(t)\overline{\varphi_n(\tau)}}{\lambda_n}, \tag{8-7}$$

这里指级数平均收敛于 $k(t,\tau)$.

推论2　在定理2的条件下

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \| k \|^2. \tag{8-8}$$

定理3(希尔伯特-施密特(Hilbert-Schmidt)定理)　设 $\{\varphi_n,\lambda_n\}$ 是核 k 的特征系,$\varphi \in L_2[a,b]$,$f = \mathrm{K}\varphi$,则

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{K}\varphi,\varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n, \tag{8-9}$$

其中级数是平均意义收敛.若 k 是连续核,那么(8-9)式中级数正规收敛.

8.2.2　解的表示

定理4　设 k 是一非零的埃尔米特核,$\{\varphi_n,\lambda_n\}$ 是 k 的特征系,λ 是方程(8-2)的正则值,那么对于任何 f,B 上方程(8-2)有唯一解

$$\varphi = f + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_n)}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n. \tag{8-10}$$

定理5　设 k 是非零埃尔米特核.$\{\varphi_n,\lambda_n\}$ 是 k 的特征系,λ 是其特征值,$\{u_1, u_2,\cdots,u_r\}$ 是 λ 对应的特征子空间的标准正交基.方程(8-2)有解的充要条件是

$$(f,u_j) = 0,\quad j = 1,2,\cdots,r. \tag{8-11}$$

当(8-11)式成立时,有

$$\varphi = f + \sum_{j=1}^{r} c_j\ u_j + \lambda \sum_{\lambda_n \neq \lambda} \frac{(f,\varphi_n)}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n, \tag{8-12}$$

其中 c_j 是任意常数.

以上两定理是弗雷德霍姆择一定理在对称核积分方程时的特殊形式.

9　非线性积分方程

9.1　非线性弗雷德霍姆积分方程

非线性积分方程不像线性积分方程那样简单.但对于小参数情形,所用的原理仍然有效.例如考虑非线性弗雷德霍姆积分方程

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t,\tau,\varphi(\tau))\mathrm{d}\tau = f(t), \tag{9-1}$$

虽然对 φ 而言不是线性的,但在小参数情形时用逐次逼近法代替迭代法仍然有效.其原理由算子展式(2-9)而代之更基本的**压缩映象原理**(不动点原理).

9.1.1 压缩映象原理

设(X,d)是度量空间,映射$\mathrm{T}: X\to X$称为压缩映射,是指存在数$c<1$使对X中所有x,y,有

$$d(\mathrm{T}x,\mathrm{T}y)\leqslant cd(x,y). \tag{9-2}$$

定理1(巴拿赫定理) 设度量空间(X,d)是完备的,又设T是压缩映射,那么T有唯一的不动点,即$\mathrm{T}x=x$有唯一解.而且这个解可以由任一初始$x_0\in X$逐次逼近得到,即$x=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{T}^n x_0$.

推论1 设(X,d)是完备的度量空间,如果映射T对某个$N\geqslant 1$是压缩映射,那么$\mathrm{T}x=x$有唯一解,此解仍由任一初始x_0逐次逼近得到,即$x=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{T}^n x_0$.

9.1.2 非线性弗雷德霍姆积分方程

考虑非线性弗雷德霍姆积分方程(9-1).假定

$$\left|\int_a^b k(t,\tau,f(\tau))\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\delta(t). \tag{9-3}$$

而且对于任何z_1,z_2,有

$$|k(t,\tau,z_1)-k(t,\tau,z_2)|\leqslant a(t,\tau)|z_1-z_2|, \tag{9-4}$$

其中

$$\int_a^b\int_a^b a^2(t,\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau = A^2<+\infty, \tag{9-5}$$

$$\int_a^b \delta^2(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant B^2<+\infty. \tag{9-6}$$

设$f\in L_2[a,b]$,在$L_2[a,b]$上求方程(9-1)的解φ.

令

$$\mathrm{T}\varphi=f+\lambda\mathrm{K}\varphi, \tag{9-7}$$

其中

$$(\mathrm{K}\varphi)(t)=\int_a^b k(t,\tau,\varphi(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{9-8}$$

由前面条件(9-3)~(9-6)知T和K是$L_2[a,b]\to L_2[a,b]$的算子,且对于任何φ_1,φ_2,有

$$|\mathrm{K}\varphi_1-\mathrm{K}\varphi_2|\leqslant\int_a^b a(t,\tau)\,|\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\leqslant\left(\int_a^b a^2(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

因而

$$\|\mathrm{K}\varphi_1-\mathrm{K}\varphi_2\|\leqslant A\|\varphi_1-\varphi_2\|, \tag{9-9}$$

故

$$\|\mathrm{T}\varphi_1-\mathrm{T}\varphi_2\|\leqslant|\lambda|A\|\varphi_1-\varphi_2\|. \tag{9-10}$$

因此$|\lambda|<1/A$时,T是压缩算子.

定理2 设f,k满足条件(9-3)~(9-6),$f\in L_2[a,b]$,$|\lambda|<1/A$,那么方程(9-

1)有且仅有唯一 $L_2[a,b]$ 上的解

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n - \varphi_{n-1}), \tag{9-11}$$

其中

$$\varphi_0(t) = f(t), \varphi_n(t) = f(t) + \lambda\int_a^b k(t,\tau,\varphi_{n-1}(\tau))\mathrm{d}\tau, n \geqslant 1. \tag{9-12}$$

9.2　非线性沃尔泰拉积分方程和哈墨斯坦方程

9.2.1　非线性沃尔泰拉积分方程

从某种意义上讲,非线性沃尔泰拉积分方程理论在研究线性沃尔泰拉方程理论之前就有了.例如,用古典的逐次逼近法求最简单的常微分方程初值问题

$$y'(x) = F(x,y),\quad y(x_0) = y_0$$

时,就是把上述方程化成非线性沃尔泰拉积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,y(t))\mathrm{d}t.$$

逐次逼近法也可以用于更一般的非线性沃尔泰拉积分方程

$$\varphi(t) - \lambda\int_a^t k(t,\tau,\varphi(\tau))\mathrm{d}\tau = f(t). \tag{9-13}$$

在方程(9-13)中,假定 $f \in L_2[a,b]$,

$$\left|\int_a^t k(t,\tau,f(\tau))\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \delta(t), \tag{9-14}$$

而且对于任何 z_1, z_2

$$\| k(t,\tau,z_1) - k(t,\tau,z_2) \| \leqslant a(t,\tau)|z_1 - z_2|, \tag{9-15}$$

其中

$$\int_a^b\int_a^b a^2(t,\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau = A^2 < +\infty, \tag{9-16}$$

$$\int_a^b \delta^2(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant B^2 < +\infty. \tag{9-17}$$

在这些条件下,令 $L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ 的算子 T,K 如下:

$$\mathrm{T}\varphi = f + \lambda\mathrm{K}\varphi, \tag{9-18}$$

$$(\mathrm{K}\varphi)(t) = \int_a^t k(t,\tau,\varphi(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{9-19}$$

令

$$A^2(t) = \int_a^t a^2(t,\tau)\mathrm{d}\tau,\quad \rho(t) = \int_a^t A^2(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

那么

$$|((\mathrm{T}\varphi_1)(t) - (\mathrm{T}\varphi_2)(t)|^2 \leqslant |\lambda|^2 A^2(t)\| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2,$$

$$|(T^2\varphi_1)(t)-(T^2\varphi_2)(t)|^2\leqslant|\lambda|^4A^2(t)\int_a^t|(T\varphi_1)(\tau)-(T\varphi_2)(\tau)|^2d\tau$$
$$\leqslant|\lambda|^4A^2(t)\rho(t)\|\varphi_1-\varphi_2\|^2.$$

仿袭 3.1 节的证明过程,完全可归纳证得

$$|(T^n\varphi_1)(t)-(T^n\varphi_2)(t)|^2\leqslant\frac{|\lambda|^{2n}}{(n-1)!}A^2(t)\rho^{n-1}(t)\|\varphi_1-\varphi_2\|^2.$$

于是

$$\|T^n\varphi_1-T^n\varphi_2\|^2\leqslant\frac{|\lambda|^{2n}}{n!}\rho^n(b)\leqslant\frac{|\lambda|^{2n}A^{2n}}{n!}\|\varphi_1-\varphi_2\|^2,$$

即

$$\|T^n\varphi_1-T^n\varphi_2\|\leqslant\frac{|\lambda|^nA^n}{\sqrt{n!}}\|\varphi_1-\varphi_2\|. \tag{9-20}$$

于是存在 $N\geqslant1$ 使 T^N 为压缩算子.

定理 3 设 f,k 满足条件(9-14)~(9-17),$f\in L_2[a,b]$,那么对于任何 λ,方程(9-13)在 $L_2[a,b]$上存在唯一解

$$\varphi=\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n-\varphi_{n-1}),$$

其中

$$\varphi_0(t)=f(t),\varphi_n(t)=f(t)+\lambda\int_a^t k(t,\tau,\varphi_{n-1}(\tau))d\tau,\quad n\geqslant1.$$

9.2.2 哈墨斯坦方程

考虑哈墨斯坦方程

$$\varphi(t)=\int_a^b k(t,\tau)g(\tau,\varphi(\tau))d\tau. \tag{9-21}$$

假定 k 为 L_2 核,令

$$A^2(t)=\int_a^b|k(t,\tau)|^2d\tau,\quad B^2(\tau)=\int_a^b|k(t,\tau)|^2dt. \tag{9-22}$$

函数 $g(\tau,u)$对 u 满足利普希茨(Lipschitz)条件

$$|g(\tau,u_1)-g(\tau,u_2)|\leqslant C(\tau)|u_1-u_2|, \tag{9-23}$$

且

$$\int_a^b|g(\tau,0)|^2d\tau=N^2<+\infty. \tag{9-24}$$

定理 4 在条件(9-23)~(9-24)下,若 $\int_a^b B^2(\tau)C^2(\tau)d\tau<1$ 或者 $\int_a^b A^2(\tau)C^2(\tau)d\tau<1$,那么方程(9-21)有唯一 $L_2[a,b]$ 上的解

$$\varphi=\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n-\varphi_{n-1}), \tag{9-25}$$

其中

$$\varphi_0(t)\equiv 0,\quad \varphi_n(t)=\int_a^b k(t,\tau)g(\tau,\varphi_{n-1})\mathrm{d}\tau,\quad n\geq 1.$$

有时援引肖德(Schauder)不动点定理,可在较宽条件下讨论哈墨斯坦积分方程.

定理 5(肖德不动点定理)　设 s 是巴拿赫空间中的闭凸集,T 是 $s\to s$ 的连续映射,而且 T(s)致密,则至少存在一点 $x\in s$,使 $Tx=x$.

定理 6　设 k 为连续核(或 L_2 核),$s=\{\varphi\mid\varphi\in L_2[a,b],\|\varphi\|\leq M\}$,当 $\varphi\in s$ 时,$\int_a^b|g(\tau,\varphi(\tau))|^2\mathrm{d}\tau\leq C^2$,而且算子 $G:\varphi(\tau)\mapsto g(\tau,\varphi(\tau))$ 在 s 上连续,那么当 $\|k\|\leq M/C$ 时方程(9-1)在 s 中至少有一解.

10　奇异积分方程的基本概念

10.1　柯西主值积分

考虑积分方程

$$a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L,\tag{10-1}$$

其中 $L=\sum_{j=1}^{n}L_j$ 是一组互不相交的光滑封闭曲线,a,f 是 L 上的已知函数,K 是 $L\times L$ 上的已知函数,而 φ 是 L 上的未知函数.

在方程(10-1)中出现的积分通常意义下一般是没有意义的,因此必须首先给这类积分以一个确定的含义.

10.1.1　柯西主值积分的定义

设 L 是一有向光滑曲线(封闭或开口),φ 是 L 上的函数.以点 t 为中心,充分小正数 ϵ 为半径作圆 $O(t,\epsilon)$,使它与 L 交点恰为两点,按 L 的正向,一个是 t_1 在 t 的前边,另一个是 t_2 在 t 的后边,以 L_ϵ 记 $\widehat{t_1u_2}$(见图 10-1).在函数 φ 是通常的绝对可积的情况下,考虑极限

$$F(t)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\epsilon}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau.\tag{10-2}$$

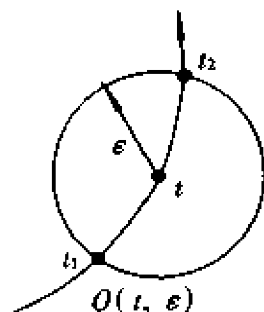


图 10-1

定义 1　如果极限(10-2)存在,将此极限仍记为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\epsilon}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau,\tag{10-3}$$

则极限(10-3)式称为 φ 沿 L 上的**柯西主值积分**,φ 称为它的**核密度**,$1/(\tau-t)$ 称为柯西核,这个极限值就称为积分主值.

例如,设 $\varphi(t)\equiv 1$,当 $L=\widehat{ab}$ 是一开口光滑弧段时,$t\in L$

但$t\neq a,b$(见图 10-2),作小圆如前,那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\varepsilon}\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{|b-t|}{|t_2-t|}+\frac{\alpha}{2\pi}+\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{|t_1-t|}{|a-t|}+\frac{\beta}{2\pi},$$

从而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2\pi i}\ln\left|\frac{b-t}{a-t}\right|+\frac{\theta}{2\pi},\tag{10-4}$$

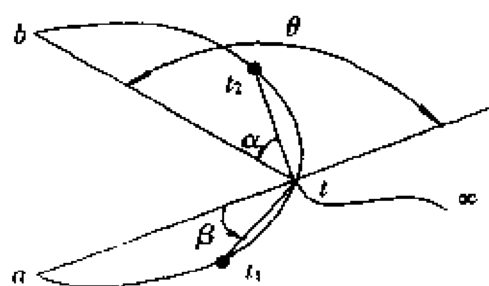


图 10-2

其中θ为$\overrightarrow{at}$与$\overrightarrow{tb}$的有向夹角. 当L为封闭曲线(取反时针为正向)时,显然

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2}.\tag{10-5}$$

10.1.2 赫尔德条件

对于一般的核密度,为了保证柯西主值积分存在,必须要求核密度满足某种条件.应用中常见的条件是函数的赫尔德条件.

定义 2 设φ定义于光滑曲线L(开口或封闭)上,如对L上任意两点t_1和t_2,恒有

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\leqslant A|t_1-t_2|^\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

其中A,α都是确定的常数,则称φ在L上满足α阶的**赫尔德条件**,记作$\varphi\in H^\alpha(L)$,或简记为$\varphi\in H^\alpha$.称α为**赫尔德指数**,如不强调指数α,也可记为$\varphi\in H$,即$H=\bigcup_\alpha H^\alpha$.

定理 1 设L是一开口或封闭的有向光滑曲线,若$\varphi\in H(L)$,则主值积分(当L为开口曲线时t不为L的端点)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t},\quad t\in L\tag{10-6}$$

存在,其中第一个积分已是通常广义积分,第二个积分如(10-4)或(10-5)式.

对于H类函数,以下一些性质成立.

1° 如果$\varphi\in H$,则φ必连续.

2° 如果$\varphi\in H^\alpha$,则必$\varphi\in H^\beta(0<\beta\leqslant\alpha\leqslant 1)$,即$H^\alpha\subseteq H^\beta(\beta\leqslant\alpha)$.

3° 如果$\varphi,\phi\in H^\alpha$,则$\varphi\pm\phi,\varphi\phi,\varphi/\phi(\phi(t)\neq 0)$也都$\in H^\alpha$.

4° H类中函数的复合函数仍$\in H$.

5° 如果φ在L的每个弧段上$\in H$,则必$\varphi\in H(L)$.

函数的赫尔德条件可以推广到任意定义域上的函数.例如,对于$L\times L$上的二元函数.

定义 3 设$\varphi(t,\tau)$定义于$L\times L$上(L仍为开口或封闭的光滑曲线),如果对$L\times L$上的任意两点$(t_1,\tau_1),(t_2,\tau_2)$,恒有

$$|\varphi(t_1,\tau_1)-\varphi(t_2,\tau_2)|\leqslant A|t_1-t_2|^\alpha+|\tau_1-\tau_2|^\beta,\quad 0<\alpha,\beta\leqslant 1,$$

则称 φ 在 $L\times L$ 上满足 $H^{\alpha,\beta}$ 或 H 条件,记为 $\varphi\in H^{\alpha,\beta}(L\times L)$ 或 $\varphi\in H(L\times L)$,这里 A,B,α,β 都是常数,α,β 分别称为关于 t,τ 的赫尔德指数.

对于 $L\times L$ 上的 H 类函数,上述性质 1°～5°也是成立的.

定理 2　若 $\varphi\in H(L\times L)$,那么柯西主值积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t,\tau)}{\tau-t}d\tau$ 存在.

10.2　解析函数边值定理

10.2.1　普莱梅公式-普里瓦洛夫定理

设 L 是一封闭光滑曲线,取定正向为反时针向,围成的内域记为 D^+,外域记为 D^-.又设 $\varphi\in H(L)$.利用柯西型积分和柯西主值积分

$$(S\varphi)(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau, & (z\notin L),\\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau & (z=t\in L),\end{cases}\tag{10-7}$$

引入下面两个算子

$$(S^+\varphi)(z)=\begin{cases}(S\varphi)(z) & (z\in D^+),\\ \dfrac{1}{2}[(I+S)\varphi](t) & (z=t\in L),\end{cases}\tag{10-8}$$

$$(S^-\varphi)(z)=\begin{cases}(S\varphi)(z) & (z\in D^-),\\ \dfrac{1}{2}[(-I+S)\varphi](t) & (z=t\in L),\end{cases}\tag{10-9}$$

这些算子称为**柯西奇异积分算子**.

定理 3　设 L 是封闭的光滑曲线,$\varphi\in H(L)$,那么 $S^+\varphi\in H(\overline{D^+})$,$S^-\varphi\in H(\overline{D^-})$.即 $S^+:H(L)\to H(\overline{D^+})$ 和 $S^-:H(L)\to H(\overline{D^-})$.具体讲,若 $\varphi\in H^\alpha(L)$,那么对于任何 $z_1,z_2\in\overline{D^+}$(或 $\overline{D^-}$)下式成立

$$|(S^\pm\varphi)(z_1)-(S^\pm\varphi)(z_2)|\leqslant\begin{cases}C|z_1-z_2|^\alpha, & 0<\alpha<1,\\ C|z_1-z_2|[1+|\ln|z_1-z_2||], & \alpha=1,\end{cases}\tag{10-10}$$

其中 C 为常数.

这是一个基础性定理.它包括了两个著名的定理.在(10-10)式中取 $z_1\in D^\pm$,$z_2\in L$,则(10-10)式表明 $(S\varphi)(z)(z\in D^\pm)$ 可以赫尔德连续延拓到边界曲线上,即它的正负边值存在,且

$$\begin{cases}(S\varphi)^+(t)=(S^+\varphi)(t)=\dfrac{1}{2}\varphi(t)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\\ (S\varphi)^-(t)=(S^-\varphi)(t)=-\dfrac{1}{2}\varphi(t)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\end{cases}\quad t\in L.\tag{10-11}$$

(10-11)式称为**普莱梅(Plemel)公式**.(10-10)式的其余情形就是普里瓦洛夫(Привалов)定理.特别当 $z_1=t_1\in L, z_2=t_2\in L$ 时,(10-10)式描述了柯西主值的赫尔德连续性质.

推论 1　设 L 是一光滑封闭曲线,$\varphi\in H^{\alpha}(L)$,那么

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\in\begin{cases}H^{\alpha}(L) & (0<\alpha<1),\\ H^{1-\epsilon}(L) & (\alpha=1,0<\epsilon<1).\end{cases}\tag{10-12}$$

例如,在推论 1 的条件下 $S^2\varphi=\varphi$,即算子 S 是幂等的,亦即 $S^2=I$.

若

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t),\quad t\in L.\tag{10-13}$$

则由 S 的幂等性知

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau.\tag{10-14}$$

同样由(10-14)式可得(10-13)式.这表明 $H(L)$ 上的奇异积分方程(10-13)有唯一解(10-14).公式(10-13)和(10-14)构成一对**柯西主值积分的反演公式**,或称为**对合公式**.

10.2.2　分区全纯函数

定理 3 自然对于 $L=\sum_j^n L_j$ 为有限条互不相交的光滑封闭曲线时也成立.普莱梅公式(10-11)对于 L 为光滑开口曲线时也成立,仅需注意 t 不为 L 的端点.柯西主值积分的赫尔德性质(10-12)对于开口曲线除端点的任意小邻域外成立,即 $S\varphi\in H(L_\eta)$,其中 L_η 是 L 上不含端点的 η 邻域的一段弧.

定义 4　设 L 是有限条互不相交的封闭曲线,它把全平面分成有限个区域.函数 Φ 在每个这种区域中全纯,在 $z=\infty$ 处至多是极点,且当 z 从 L 的任一确定侧趋于 L 上的点 t 时,Φ 的极限值即边值存在,则称 Φ 是以 L 为**跳跃曲线**或**间断曲线**的分区全纯函数.若 L 中含有开口弧段,则不要求边值在端点存在,但要求在各端点附近,Φ 有不到一阶的奇异性,即,若 c 为 L 的一端点,则在 $z=c$ 附近

$$|\Phi(z)|\leqslant\frac{C}{|z-c|^{\nu}},\quad 0\leqslant\nu<1,\quad C\text{ 为常数}.\tag{10-15}$$

如果在 $z=\infty$ 处 $\Phi(z)$ 的洛朗(Laurent)展开式为

$$\Phi(z)=\sum_{j=k}^{-\infty}a_jz^j\quad(a_k\neq0),$$

则 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处为 k 阶或阶数为 k.因此,分区全纯函数要求在 $z=\infty$ 处有有限阶.按照这种观点,函数 $(S\varphi)(z)$ 是以 L 为跳跃曲线的分区全纯函数,且 $z=\infty$ 处至多为 -1 阶.

10.2.3　置换公式

另一个关于柯西主值积分的重要公式是累次积分交换次序的置换公式,这与

通常积分的相应公式的结果有很大不同.

定理4(置换公式或庞加莱贝特朗(Poincaré-Bertrand)公式)　设 L 是一光滑封闭曲线,$f\in H(L\times L)$,则

$$\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau = -\pi^2 f(t_0,t_0)+\int_L \mathrm{d}\tau\int_L \frac{f(t,\tau)}{(t-t_0)(\tau-t)}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L.$$

若 $L=\widehat{ab}$ 是光滑开口曲线,那么上式中 t_0 不能是 L 的端点,但 f 可为下面的函数

$$f(t,\tau)=\frac{\varphi(t,\tau)}{\Pi(t,\tau)}$$

其中 $\varphi\in H(L\times L)$,$\Pi(t,\tau)=|t-a|^{\alpha}|t-b|^{\beta}|\tau-a|^{\nu}|\tau-b|^{\mu}$,$0<\alpha,\beta,\nu,\mu$ 且 $\alpha+\beta<1,\nu+\mu<1$.

10.3　带柯西核的奇异积分方程

积分方程(10-1)的确切叙述如下:假定 $a,f\in H(L)$,$K\in H(L\times L)$,同时在 $H(L)$ 中寻求未知函数 φ,方程(10-1)中的积分理解为柯西主值积分.此时称积分方程(10-1)为**带柯西核的奇异积分方程**.

带柯西核的奇异积分方程的理论差不多是紧接着弗雷德霍姆积分方程的理论发生便开始了的.在1903年至1904年法国数学家庞加莱和德国数学家希尔伯特各自在研究潮汐理论及解析函数边值问题时提出了这类积分方程,并且奠定了它的理论基础.今天,奇异积分方程在复分析、偏微分方程、弹性力学、流体力学及近代物理等方面都有广泛应用.作为解决数学和工程科学等方面问题的一个有效工具,它正在产生日益显著的作用.

10.3.1　几个奇异算子

若 $\varphi\in H(L)$,引入下面算子

$$(\mathrm{K}\varphi)(t)=a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad(10\text{-}16)$$

显然由定理2知 $\mathrm{K}\varphi\in H(L)$,因而K是 $H(L)\to H(L)$ 的线性算子,称为**奇异积分算子**.现在改写方程(10-1)为

$$\mathrm{K}\varphi=f.\qquad(10\text{-}17)$$

如果记

$$b(t)=K(t,t),\quad k(t,\tau)=\frac{K(t,\tau)-K(t,t)}{\pi\mathrm{i}(\tau-t)},\qquad(10\text{-}18)$$

那么方程(10-1)又可改写为

$$(\mathrm{K}\varphi)(t)=a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L.\qquad(10\text{-}19)$$

由赫尔德类函数的性质,有 $b\in H(L)$ 和

$$k(t,\tau)=\frac{h(t,\tau)}{|\tau-t|^{\alpha}},\quad 0\leqslant\alpha<1,\quad h\in H(L\times L),\qquad(10\text{-}20)$$

即 k 是一个弱奇性核.函数 a,b 称为方程(10-19)的系数,如果方程(10-19)中自由项 $f=0$,就称方程(10-19)为齐次方程,否则称为非齐次方程.

方程

$$(K^0\varphi)(t) \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t), \quad t \in L \quad (10\text{-}21)$$

称为方程(10-17)或(10-19)的**特征方程**,K^0 称为 K 的**特征算子**.相应地,方程(10-19)称为**完全奇异积分方程**,即在方程(10-19)中除含 $K^0\varphi$ 项外,还含形如(10-21)式的弱奇性核的算子项

$$(K\varphi)(t) = \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau. \quad (10\text{-}22)$$

这个算子称为**第一类弗雷德霍姆算子**,它把 L 上的连续函数变成 $H(L)$ 类的函数(援引(5-14)式).

称方程

$$(K'\phi)(t) \equiv a(t)\phi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(\tau,t)}{\tau - t}\phi(\tau)d\tau = h(t), \quad t \in L \quad (10\text{-}23)$$

或即

$$(K'\phi)(t) = a(t)\phi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)}{\tau - t}\phi(\tau)d\tau +$$

$$\int_L k(\tau,t)\phi(\tau)d\tau = h(t), \quad t \in L \quad (10\text{-}24)$$

为方程(10-19)的**相联方程**,K' 称为 K 的**相联算子**.

10.3.2 正则型条件和指标

在今后常常假定函数

$$s(t) = a(t) + b(t) \neq 0, \quad d(t) = a(t) - b(t) \neq 0, t \in L. \quad (10\text{-}25)$$

这个条件称为方程(10-19)或奇异积分算子 K 的**正则型条件**,此时奇异积分方程(10-19)称为**正则型奇异积分方程**,K 称为**正则型奇异积分算子**.在 $b=0$ 时,由正则型条件知 $a(t) \neq 0$,方程(10-19)便是带弱奇性核的第二种弗雷德霍姆积分方程,并且注意 K 把 L 上的连续函数变成 $H(L)$ 类的函数,故它的连续解一定是 $H(L)$ 类解.此时称 K 为**第二类弗雷德霍姆算子**.

称整数

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-b}{a+b}\right]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\left(\frac{d}{s}\right)\right]_L \quad (10\text{-}26)$$

为正则型奇异积分方程(10-19)或奇异积分算子 K 的指标,它仅取决于特征方程(10-21).在(10-26)式中符号 $[\cdot]_L$ 表示自变量沿 L 的正向绕曲线一周时方括号内函数的连续改变量.当 $\kappa=0$ 时,方程(10-19)称为**拟弗雷德霍姆积分方程**,它与第二种弗雷德霍姆积分方程在很多地方是相似的,此时 K 称为**拟弗雷德霍姆积分算子**.

11 特征方程

11.1 黎曼边值问题

设 $L=\sum_{j=1}^{n}L_j$ 是复平面中有限条互不相交的封闭曲线，各 L_j 依整个 L 取定正方向，使得把整个平面分成两组，一组记作 D^+，都位于 L 的正（左）侧，另一组记为 D^-，都位于 L 的负（右）侧，并不妨设 $z=\infty$ 在 D^- 内.

黎曼边值问题（R 问题） 求以 L 为跳跃曲线的一分区全纯函数 $\Phi(z)$，满足边值条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L, \tag{11-1}$$

其中 $G,g\in H(L)$. 如果要求 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处至多为 m 阶，则此问题将记为 R_m.

当 $G(t)\neq 0$，则称此黎曼问题为正则型的，否则称为例外型的.

11.1.1 跳跃问题

若在(11-1)式中 $G=1$，即

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=g(t),\quad t\in L, \tag{11-2}$$

则此问题称为**跳跃问题**.

定理 1 对于跳跃问题(11-2)，

1° 当 $m>0$ 时，解为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+p_m(z),\quad p_m\in\Pi_m, \tag{11-3}$$

也就是说，在一般解中有 $m+1$ 个任意常数，称为具 $m+1$ 个自由度.

2° 当 $m=-1$ 时，有唯一解

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau, \tag{11-4}$$

解的自由度认为是 0.

3° 当 $m<-1$ 时，当且仅当

$$\int_L g(\tau)\tau^j\mathrm{d}\tau=0,\quad j=0,1,2,\cdots,m-2 \tag{11-5}$$

时，有唯一解(11-4). 也就是说应有 $-(m+1)$ 个可解条件，也叫做 $m+1$（负数）个自由度.

11.1.2 齐次黎曼边值问题

若在(11-1)式中 $g=0$，即

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\quad t\in L, \tag{11-6}$$

则此问题称为**齐次黎曼边值问题**.先对 L 仅由一条光滑曲线构成的情况讨论齐次黎曼边值问题.

先验地对(11-6)式两边取对数,立即得到一个跳跃问题.但麻烦是 $\ln G(t)$ 可能是 L 上的多值函数,因为整数值

$$\kappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L \tag{11-7}$$

起着重要作用,此整数值称为 G 关于 L 的指标,记作

$$\kappa=\mathrm{Ind}_L G(t). \tag{11-8}$$

为避开所提到的麻烦,在 L 的内域中任取一点 z_0,取

$$G_0(t)=(t-z_0)^{-\kappa}G(t). \tag{11-9}$$

显然 $\mathrm{Ind}_L G_0(t)=0$.引入一个新的分区全纯函数

$$\Psi(z)=\begin{cases}\Phi(z), & z\in D^+,\\ (z-z_0)^{\kappa}\Phi^-(z), & z\in D^-,\end{cases} \tag{11-10}$$

则(11-6)式成为

$$\Psi^+(t)=G_0(t)\Psi^-(t),\quad t\in L. \tag{11-11}$$

先验地化成跳跃问题

$$\Gamma^+(t)-\Gamma^-(t)=\ln G_0(t), \tag{11-12}$$

其中

$$\Gamma(z)=\ln\Phi(z).$$

问题(11-12)的一个特解为

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln G_0(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\notin L. \tag{11-13}$$

这个先验过程是成功的,即由直接验证可知

$$X_0(z)=e^{\Gamma(z)}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln G_0(\tau)}{\tau-z}d\tau\right\}$$

确实是齐次黎曼边值问题(11-11)的解,从而

$$X(z)=\begin{cases}e^{\Gamma(z)}, & z\in D^+,\\ (z-z_0)^{-\kappa}e^{\Gamma(z)}, & z\in D^-\end{cases} \tag{11-14}$$

是齐次黎曼边值问题(11-6)的解.这个解具有以下特点:

1° $X^+(t)=X^-(t),t\in L$;

2° 在整个有限平面上 $X(z)\neq0$,包括在 L 上 $X^{\pm}(t)\neq0$;

3° 在 $z=\infty$ 处 $X(z)$ 为 $-\kappa$ 阶.

凡具有以上3个性质的分区全纯函数就称为齐次黎曼边值问题(11-6)的**典则函数**.容易证明,典则函数在不计非零常数因子时是唯一的.

回到 $L=\sum_{j=1}^{n}L_j$ 的一般情况.对于每个 j,作齐次黎曼边值问题

$$X_j^+(t)=G_j(t)X_j^-(t),\quad t\in L_j \tag{11-15}$$

的典则函数 $X_j(z)$.由于 L_j 不相交,从而 $X_j(z)$ 在 $L_k(k\neq j)$ 上全纯,即

$$X_j^+(t)=X_j^-(t),\quad t\in L_k(k\neq j). \tag{11-16}$$

令

$$X(z)=\prod_{j=1}^{n}X_j(z),\tag{11-17}$$

则 $X(z)$ 是以 L 为跳跃曲线的分区全纯函数，且由(11-16)和(11-17)式可知

$$X^+(t)=G(t)X^-(t),\quad t\in L,\tag{11-18}$$

且在 $z=\infty$ 处 $X(z)$ 的阶为

$$-\sum_{j=1}^{n}\kappa_j=-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Ind}_{L_j}G_j(t)=-\mathrm{Ind}_L G(t)=-\kappa,\tag{11-19}$$

此数 κ 称为 $G(t)$ 关于 $L=\sum_{j=1}^{n}L_j$ 的指标. $X(z)$ 满足前述性质1°～3°，且称为一般情况下齐次黎曼边值问题(11-6)或 R 问题(11-1)的典则函数. 利用典则函数，R 问题(11-1)立即化成跳跃问题

$$F^+(t)-F^-(t)=\frac{g(t)}{X^+(t)},\quad t\in L,\tag{11-20}$$

其中

$$F(z)=\frac{\Phi(z)}{X(z)}.\tag{11-21}$$

R_m 问题(11-1)等价于 $R_{m+\kappa}$ 问题(11-20)，它们的解由(11-21)式联系.

定理2　对于 R_{-1} 问题(11-1)，

1° 当 $\kappa\geqslant 0$ 时无条件可解，且其一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}+p_{\kappa-1}(z)X(z),\quad p_{\kappa-1}\in\Pi_{\kappa-1}.\tag{11-22}$$

2° 当 $\kappa<0$ 时，当且仅当

$$\int_L\frac{g(\tau)\tau^j}{X^+(\tau)}d\tau=0,\quad j=0,1,2,\cdots,-\kappa-1\tag{11-23}$$

满足时才有唯一解，解仍为(11-22)式(视 $p_{\kappa-1}=0$).

总之，R_{-1} 问题中的解有 κ 个自由度.

11.2　特征方程及其相联方程

求解特征方程及其相联方程的思想是将其化成求解黎曼边值问题.

11.2.1　特征方程

令

$$\Phi(z)=(S\varphi)(z).\tag{11-24}$$

由普莱梅公式，若 φ 是特征方程

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t),\quad t\in L\tag{11-25}$$

的解,那么 $S\varphi$ 是黎曼边值问题

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+\frac{f(t)}{a(t)+b(t)},\quad t\in L \tag{11-26}$$

在 R_{-1}中的解,其中

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}. \tag{11-27}$$

反之,若 Φ 是 R_{-1}问题(11-26)的解,那么

$$\varphi(t)=\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t) \tag{11-28}$$

是问题(11-26)的解. 事实上,把(11-28)式看成一个 R_{-1}问题,便知 $\Phi(z)=(S\varphi)(z)$,由此,将 $\Phi^{\pm}(t)=\frac{1}{2}(\pm\varphi(t)+(S\varphi)(t))$代入问题(11-26)即得方程(11-25).这样,方程(11-25)就等价于在 R_{-1}问题(11-26)上求解.后者的指标正是方程(11-25)的指标.(11-25)的指标定义正是源于此.

定理 3 对于特征方程(11-25),

1° 当$\kappa\geqslant 0$时,对于任何 f 其一般解为

$$\varphi(t)=(K^{*}f)(t)+b^{*}(t)Z(t)p_{\kappa-1}(t),\quad p_{\kappa-1}\in \Pi_{\kappa-1}, \tag{11-29}$$

其中

$$(K^{*}f)(t)=a^{*}(t)f(t)-\frac{b^{*}(t)Z(t)}{\pi i}\int_{L}\frac{f(\tau)}{Z(\tau)(\tau-t)}d\tau, \tag{11-30}$$

$$a^{*}(t)=\frac{a(t)}{a^{2}(t)-b^{2}(t)},\quad b^{*}(t)=\frac{b(t)}{a^{2}(t)-b^{2}(t)},$$

$$Z(t)=[a(t)+b(t)]X^{+}(t)=[a(t)-b(t)]X^{-}(t), \tag{11-31}$$

$X(z)$为问题(11-26)的典则函数,$Z(t)$称为问题(11-26)的标准函数.

2° 当$\kappa<0$,当且仅当满足 $-\kappa$ 个条件

$$\int_{L}\frac{f(\tau)\tau^{j}}{z(\tau)}d\tau=0,\quad j=0,1,2,\cdots,-\kappa-1 \tag{11-32}$$

时,有唯一解(11-29)($p_{\kappa-1}(t)=0$).

总之,一般解有 κ 个自由度.

11.2.2 相联方程

利用同样的思想可以解(11-25)的相联方程

$$(K^{0'}\phi)(t)\equiv a(t)\phi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{b(\tau)\phi(\tau)}{\tau-t}d\tau=h(t),\quad t\in L. \tag{11-33}$$

令

$$\Psi(z)=(Sb\phi)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{b(\tau)\phi(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{11-34}$$

那么

$$\begin{cases}b(t)\phi(t)=\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t),\\ \frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{b(\tau)\phi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\Psi^{+}(t)+\Psi^{-}(t),\end{cases}\quad t\in L. \tag{11-35}$$

把(11-35)式中第一个方程代入(11-33)式，再与(11-35)式中第二个方程相加减，便得

$$\Psi(t)=\frac{2\Psi^{+}(t)}{a(t)+b(t)}+\frac{h(t)}{a(t)+b(t)},\quad \Psi(t)=\frac{2\Psi^{-}(t)}{a(t)-b(t)}+\frac{h(t)}{a(t)-b(t)},\tag{11-36}$$

从而

$$\Psi^{+}(t)=\frac{1}{G(t)}\Psi^{-}(t)+\frac{b(t)h(t)}{a(t)-b(t)},\quad t\in L,\tag{11-37}$$

式中 $G(t)$仍如(11-27)式.(11-33)式等价于 R_{-1}问题(11-37)，它们的解由(11-34)式和(11-36)式(之中任一)联系.问题(11-37)称为问题(11-1)的**相联问题**，它的指标为 $\kappa'=-\kappa$，典则函数为 $1/X(z)$.

定理 4　对于 R_{-1}相联问题(11-37)，

1° 当$\kappa'\geqslant 0$时无条件可解，且其一般解为

$$\Psi(z)=\frac{1}{X(z)}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{X^{+}(\tau)b(\tau)h(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}d\tau+\frac{q_{\kappa'-1}(z)}{X(z)},\quad q_{\kappa'-1}\in\Pi_{\kappa'-1}.\tag{11-38}$$

2° 当$\kappa'<0$时，当且仅当

$$\int_L\frac{X^{+}(\tau)b(\tau)h(\tau)\tau^{j}}{a(\tau)-b(\tau)}d\tau=0,\quad j=0,1,2,\cdots,-\kappa'-1\tag{11-39}$$

满足时才有唯一解(11-38)($q_{\kappa'-1}=0$).

定理 5　对于相联方程(11-33)，

1° 当$\kappa'\geqslant 0$时，对于任何 h，其一般解为

$$\phi(t)=(K^{*\prime}h)(t)+\frac{q_{\kappa'-1}(t)}{Z(t)},q_{\kappa-1}\in\Pi_{\kappa-1},\tag{11-40}$$

其中

$$(K^{*\prime}h)(t)=a^{*}(t)h(t)+\frac{1}{Z(t)}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{Z(\tau)b^{*}(\tau)h(\tau)}{\tau-t}d\tau,\tag{11-41}$$

$K^{*\prime}$是 K^{*}的相联算子.

2° 当$\kappa'<0$时，当且仅当满足 κ 个条件

$$\int_L b^{*}(\tau)Z(\tau)h(\tau)\tau^{j}d\tau=0,\quad j=0,1,2,\cdots,\kappa-1\tag{11-42}$$

时，有唯一解(11-40)($q_{\kappa'-1}=0$).

11.2.3　特征方程的诺特定理

定理 6　对于特征方程 $K^0\varphi=f$ 和相联方程 $K^{0\prime}\phi=h$，

1° 它们的齐次方程的线性无关解的个数均为有限，即解空间为有限维.

2° 设 $K^0\varphi=0$ 和 $K^{0\prime}\phi=0$ 的线性无关解的个数分别为 l 和l'，则 $l-l'=\kappa$，其中 κ 为 K^0 的指标.

3° $K^0\varphi=f$可解的充要条件为f与 $K^{0\prime}\phi=0$ 的一切解 ϕ 正交，即$\int_L f(\tau)\phi(\tau)d\tau$

$= 0.$

以上这些结果构成了诺特定理的内容.

12 完全奇异积分方程

12.1 奇异积分算子的性质

12.1.1 奇异积分算子的合成

假定 $\mathrm{K}=\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$,

$$(\mathrm{K}_j\varphi)(t)=a_j(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K_j(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad j=1,2. \tag{12-1}$$

由庞加莱-贝特朗置换公式直接得到

$$\begin{aligned}(\mathrm{K}\varphi)(t)=&[a_1(t)a_2(t)+b_1(t)b_2(t)]\varphi(t)\\&+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{a_1(t)K_2(t,\tau)+K_1(t,\tau)a_2(\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\\&-\frac{1}{\pi^2}(\mathscr{K}\varphi)(t),\end{aligned} \tag{12-2}$$

这里 $b_j(t)=K_j(t,t)(j=1,2)$,而

$$(\mathscr{K}\varphi)(t)=\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{12-3}$$

其中

$$k(t,\tau)=\int_L\frac{K_1(t,s)K_2(s,\tau)}{(s-t)(\tau-s)}\mathrm{d}s=\frac{h(t,\tau)}{|\tau-t|^{\alpha}},$$
$$0\leqslant\alpha<1,h\in H(L\times L). \tag{12-4}$$

因此,若 K_1 和 K_2 是两个奇异积分算子,则 $\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$ 也是奇异积分算子.

奇异积分算子的乘法满足结合律

$$(\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2)\mathrm{K}_3=\mathrm{K}_1(\mathrm{K}_2\mathrm{K}_3), \tag{12-5}$$

但一般不满足交换律

$$\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2\neq\mathrm{K}_2\mathrm{K}_1. \tag{12-6}$$

12.1.2 奇异积分算子的性质

记 K 的系数为 a 和 b,指标为 κ, $s=a+b$, $d=a-b$, K_j 的指标为 κ_j, $s_j=a_j+b_j$, $d_j=a_j-b_j$,那么又有下面一些性质:

1° $a=a_1a_2+b_1b_2$, $b=a_1b_2+b_1a_2$.

2° $s=s_1s_2$, $d=d_1d_2$.

3° $\kappa=\kappa_1+\kappa_2$.

4° 若 K 的指标为 κ，K′的指标为 κ'，那么

$$\kappa' = -\kappa.$$

5° $(K_1K_2)' = K'_2K'_1$.

6° 设 $\varphi, \phi \in H(L)$，那么

$$\int_L \phi(\tau)(K\varphi)(\tau)d\tau = \int_L \varphi(\tau)(K'\phi)(\tau)d\tau. \qquad (12\text{-}7)$$

7° 若 K 是奇异积分算子，$\mathscr{K}$是第一类弗雷德霍姆算子，那么 K$\mathscr{K}$和$\mathscr{K}$K 都是第一类弗雷德霍姆算子.

12.2 奇异积分方程的正则化

求解完全奇异积分方程的思想是把它归结为求解某个弗雷德霍姆积分方程，所采用的途径就是正则化.即如果 K_1K_2 是第二类弗雷德霍姆算子，那么称 K_1 是 K_2 的(左)**正则化算子**，同样称 K_2 是 K_1 的(右)**正则化算子**.由算子合成的性质，显然只须 $a_1b_2 + b_1a_2 = 0$ 或者 $s_1s_2 = d_1d_2$.当然可以任意取定 $s, d \neq 0$，根据 $s_1s_2 = s$，$d_1d_2 = d$ 可由 K_1 确定 K_2，或由 K_2 确定 K_1，所以有各种各样的正则化方法.常用于考虑方程

$$K\varphi = f \qquad (12\text{-}8)$$

的正则化方法将在下面叙述.

12.2.1 左正则化方法

设 K 的指标 $\kappa \geqslant 0$，存在 K 的左正则化算子 M，使 $M\phi = 0$ 没有非零解，例如，$K^{0\prime}$ 或者 K'^{0}.用 M 作用方程(12-8)两边，得

$$(MK)\varphi = Mf. \qquad (12\text{-}9)$$

方程(12-8)的解 φ 显然也是方程(12-9)的连续解.反之，若 φ 是方程(12-9)的连续解，则 $\varphi \in H(L)$(见 10-3 节)，因此

$$M(K\varphi - f) = 0, \qquad (12\text{-}10)$$

故 $K\varphi = f$，即 φ 是方程(12-8)的解.于是方程(12-8)与(12-9)同解.

12.2.2 右正则化方法

设 $\kappa \leqslant 0$，存在 K 的右正则化算子 M，使 $M\phi = g$ 对任何 g 可解，例如，$K^{0\prime}$或者 K'^{0}.对未知函数作变换

$$\varphi = M\phi, \qquad (12\text{-}11)$$

方程(12-8)成为

$$(KM)\phi = f. \qquad (12\text{-}12)$$

如果方程(12-12)有连续解 ϕ，那么 $\phi \in H(L)$，从而由(12-11)式得到 φ，它是方程(12-8)的解.反之，若 φ 是方程(12-8)的解，那么从(12-11)式可解出 ϕ，当然也是方程(12-12)的解.因此，在(12-11)式的联系下，方程(12-8)与方程(12-12)等价.具体讲，求方程(12-8)的一般解时，可先求出方程(12-12)的一般解

$$\phi = \phi_0 + \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j, \tag{12-13}$$

其中 ϕ_0 是方程(12-12)的一个特解，$\{\phi_j\}_1^m$ 是齐次方程$(\mathrm{KM})\phi = 0$ 的全解系，$\{c_j\}_1^m$ 为一组任意常数，那么方程(12-8)的一般解为

$$\varphi = \mathrm{M}\phi_0 + \sum_{j=1}^{m} c_j \mathrm{M}\phi_j. \tag{12-14}$$

12.2.3 等价性定理

定理 1(等价性定理) 设奇异积分方程(12-8)是正则型的，

1° 当 $\kappa \geqslant 0$ 时，方程(12-8)与第二种弗雷德霍姆积分方程(12-9)同解.

2° 当 $\kappa \leqslant 0$ 时，方程(12-8)与第二种弗雷德霍姆积分方程(12-12)在关系(12-11)下等价.

12.2.4 卡列曼-维库拉正则化方法

采用方程(12-8)的另一种记法

$$\mathrm{K}^0\varphi + \mathscr{K}\varphi = f, \tag{12-15}$$

其中 K^0 是 K 的特征算子，$\mathscr{K}$是第一类弗雷德霍姆算子：

$$(\mathscr{K}\varphi)(t) = \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{12-16}$$

其中 k 由(10-20)式给出. 把(12-15)式改写成

$$\mathrm{K}^0\varphi = f - \mathscr{K}\varphi. \tag{12-17}$$

视右边为已知函数，解出这个方程. 当 $\kappa \geqslant 0$ 时，

$$\varphi + \mathrm{K}^* \mathscr{K}\varphi = \mathrm{K}^* f + b^* Z p_{\kappa-1}, \tag{12-18}$$

其中 K^* 由(11-30)式给出，Z 是标准函数，$p_{\kappa-1} \in \Pi_{\kappa-1}$. 由奇异积分算子性质 7° 知 $\mathrm{K}^* \mathscr{K}$是第一类弗雷德霍姆算子，从而方程(12-18)是第二种弗雷德霍姆积分方程由 11.2.1 节中的定理 3 知方程(12-15)和方程(12-18)为同解方程. 当 $\kappa < 0$ 时，由 11.2.1 节中的定理 3 知方程(12-15)同解于方程组

$$\begin{cases} \varphi + (\mathrm{K}^* \mathscr{K})\varphi = \mathrm{K}^* f, \\ \displaystyle\int_L \frac{\tau^j (\mathscr{K}\varphi)(\tau)}{Z(\tau)}\mathrm{d}\tau = \int_L \frac{\tau^j f(\tau)}{Z(\tau)}\mathrm{d}\tau, \quad j = 0,1,2,\cdots,-\kappa-1. \end{cases} \tag{12-19}$$

这个方法称为卡列曼-维库拉(Carleman-Векуа)正则化方法.

12.2.5 诺特定理

定理 2(诺特定理) 设方程(12-8)中 K 是一正则型奇异积分算子，则

1° $\mathrm{K}\varphi = 0$ 和 $\mathrm{K}'\phi = 0$ 的线性无关解的个数必有限.

2° 设 $\mathrm{K}\varphi = 0$ 与 $\mathrm{K}'\phi = 0$ 解的个数分别为 l 和 l'，那么 $l - l' = \kappa$，其中 κ 是 K 的指标.

3° 方程 $\mathrm{K}\varphi = f$ 可解的充要条件是

$$\int_L \phi_j(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0, j = 1,2,\cdots,l'. \qquad (12\text{-}20)$$

其中$\{\phi_j\}_{j=1}^{l'}$是$K'\phi = 0$的全解系.

13 开口曲线上的奇异积分方程

13.1 概念和术语

13.1.1 H^*类函数

讨论光滑开口曲线$L=\widehat{ab}$上的奇异积分方程需要引进一类新函数.

定义1 设f定义于$L=\widehat{ab}$上($t=a$和$t=b$除外),如果在$t=a$的充分小邻域中的某段子弧L_ϵ上有

$$f(\tau)=\frac{f^*(\tau)}{|\tau-a|^\alpha}\ (t\in L_\epsilon,t\neq a),0\leqslant\alpha<1,f^*\in H(L_\epsilon), \qquad (13\text{-}1)$$

则称f在$t=a$附近$\in H_\alpha^*(a)$;在不强调α时,记为$f\in H^*(a)$,即$H^*(a)=\bigcup_\alpha H_\alpha^*(a)$.同样可定义$f\in H_\alpha^*(b)$以及$f\in H^*(b)$.若$f$在任何不包含端点$a$和$b$的闭子弧上$\in H$,且$f\in H^*(a)$和$f\in H^*(b)$,则称$f$在$L$上$\in H^*$,记为$f\in H^*(L)$.

设$L=\widehat{ab}$是一光滑开口曲线,考虑方程

$$(\mathrm{K}\varphi)(t)=a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L,t\neq a,b, \qquad (13\text{-}2)$$

这里$a,f\in H(L),K\in H(L\times L)$,在$H^*(L)$类中求解$\varphi$.方程(13-2)称为开口曲线$L=\widehat{ab}$上的奇异积分方程.

13.1.2 开口曲线的黎曼边值问题

凡在10-3节中不涉及曲线形状的概念和术语在这里仍然有效.例如,特征算子和特征方程、相联算子和相联方程、正则型条件等等.但最为重要的指标定义(10-26)式失效,由此引起一系列新的概念,例如典则函数、标准函数等等需要予以重新定义.由于奇异积分方程的这些概念是寄生在黎曼边值问题的相应概念上的,因此我们必须从源头做起.

考虑$L=\widehat{ab}$上的黎曼边值问题

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L=\widehat{ab},t\neq a,b, \qquad (13\text{-}3)$$

此处$G,g\in H(L)$且$G(t)\neq0$,求以L为跳跃曲线的分区全纯函数Φ.

由于问题(13-3)中不要求 $t=a,b$,仅要求在它们附近 Φ 有可积奇异性(10-15)式.这带来一些方便.首先,对于跳跃问题

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=g(t), \tag{13-4}$$

11.1.1 节中的定理 1 原封不动成立.其次,对于齐次 R 问题

$$\Phi(t)=G(t)\Phi^{-}(t), \tag{13-5}$$

现在可以直接在 L 上取定 $\ln G(t)$ 的一个连续分支,令

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{13-6}$$

便知 $e^{\Gamma(z)}$ 满足问题(13-5),同时不难直接验证它在 $t=a,b$ 附近

$$e^{\Gamma(z)}=(z-a)^{\alpha_a+i\beta_a}\Omega_a(z),\quad e^{\Gamma(z)}=(z-b)^{\alpha_b+i\beta_b}\Omega_b(z), \tag{13-7}$$

其中

$$\alpha_a+i\beta_a=-\frac{\ln G(a)}{2\pi i},\quad \alpha_b+i\beta_b=\frac{\ln G(b)}{2\pi i}, \tag{13-8}$$

Ω_a 和 Ω_b 是以 L 为跳跃曲线的分区全纯函数,且 $\lim\limits_{z\to a}\Omega_a(z)$ 和 $\lim\limits_{z\to b}\Omega_b(z)$ 存在.选取整数 $\lambda_c(c=a,b)$ 使

$$-1<\alpha_c+\lambda_c<1. \tag{13-9}$$

容易看出

$$X(z)=(z-a)^{\lambda_a}(z-b)^{\lambda_b}e^{\Gamma(z)} \tag{13-10}$$

是问题(13-5)的一个解.这个解不仅自身是分区全纯函数.而且 $1/X$ 也是分区全纯函数.具有这种性质的解,我们称它为问题(13-5)的一个**典则解**,或者问题(13-3)的一个**典则函数**.注意,即使不计非零常数因子,现在典则解也不一定唯一.因为只有在 α_c 是一个整数的情况下 λ_c 才唯一确定,即

$$\alpha_c+\lambda_c=0. \tag{13-11}$$

此时,我们称 c 为**特殊端(结)点**,否则称为**普通端(结)点**.对于普通端点,整数 λ_c 可以精确到仅差一个 ±1,亦即

$$\alpha_c+\lambda_c>0 \tag{13-12}$$

或者

$$\alpha_c+\lambda_c<0. \tag{13-13}$$

(13-12)式使 X 在端点 c 附近有界.

定义 2 若 $\alpha_a+\lambda_a\leqslant0,\alpha_b+\lambda_b\leqslant0$,则称 X 是问题(13-5)在 h_0 类的典则解.若 $\alpha_a+\lambda_a>0,\alpha_b+\lambda_b\leqslant0$,则称 X 是问题(13-5)在 $h(a)$ 类的典则解.若 $\alpha_a+\lambda_a\leqslant0,\alpha_b+\lambda_b>0$,则称 X 是问题(13-5)在 $h(b)$ 类的典则解.若 $\alpha_a+\lambda_a>0,\alpha_b+\lambda_b>0$,则称 X 是问题(13-5)在 $h_2=h(a,b)$ 类的典则解.

整数

$$\kappa=-(\lambda_a+\lambda_b) \tag{13-14}$$

称为问题(13-5)对于相应类的**指标**.

定义 3 设 Φ 是问题(13-5)的解,记为 h_0 类的解.若 Φ 在普通端点 b 附近有界,则称它是 $h(b)$ 类的解.若 Φ 在普通端点 a 附近有界.则称它是 $h(a)$ 类的解.

既是$h(a)$类又是$h(b)$类的解称为$h_2=h(a,b)$类的解.有时笼统用h类表示以上定义的类之一.

很清楚,h类的解实质上是要求解在某些给定的普通端点附近有界.若要求在其余普通端点附近有界,则记为h'类,称h'类为h类的相联类.

黎曼问题(13-3)的典则函数、指标、特殊端点、普通端点、解类等概念同时视为奇异积分方程(13-2)的相应概念,其中黎曼问题(13-3)的系数G与方程(13-2)的系数a和b之间仍由(11-27)式联系.

如果X是h类的典则函数,那么称

$$Z(t)=[a(t)+b(t)]X^{+}(t)=[a(t)-b(t)]X^{-}(t) \tag{13-15}$$

为方程(13-2)在h类的标准函数.

13.2 基本定理

13.2.1 特征方程

对于开口曲线上的奇异积分方程可以得到与11.2节中的定理3和定理5形式一致的结果.

定理1 设特征方程

$$(\mathrm{K}^0\varphi)(t)\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L=\widehat{ab},t\neq a,b \tag{13-16}$$

在h类求解,其(h类)指标为κ,标准函数为Z.相联方程

$$(\mathrm{K}^{0\prime}\phi)(t)\equiv a(t)\phi(t)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{b(\tau)\phi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=g(t),\quad t\in L=\widehat{ab},t\neq a,b \tag{13-17}$$

在相联类h'中求解.那么

1° 当$\kappa\geqslant0$时,方程(13-16)对于任何f有一般解

$$\varphi(t)=(\mathrm{K}^{*}f)(t)+b^{*}(t)Z(t)p_{\kappa-1}(t),\quad p_{\kappa-1}\in\Pi_{\kappa-1}, \tag{13-18}$$

其中

$$(\mathrm{K}^{*}f)(t)=a^{*}(t)f(t)-\frac{b^{*}(t)Z(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{Z(\tau)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau, \tag{13-19}$$

$$a^{*}(t)=\frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)},\quad b^{*}(t)=\frac{b(t)}{a^2(t)-b^2(t)}. \tag{13-20}$$

2° 当$\kappa<0$,当且仅当满足$-\kappa$个条件

$$\int_L\frac{f(\tau)\tau^j}{Z(\tau)}\mathrm{d}\tau=0,\quad j=0,1,2,\cdots,-\kappa-1 \tag{13-21}$$

时,方程(13-16)有唯一解(13-18)($p_{\kappa-1}=0$).

3° 当$\kappa'=-\kappa\geqslant0$时,方程(13-17)对于任何$g$有一般解

$$\phi(t)=(\mathrm{K}^{*\prime}g)(t)+\frac{q_{\kappa'-1}(t)}{Z(t)},\quad q_{\kappa'-1}\in\Pi_{\kappa'-1}, \tag{13-22}$$

其中

$$(K^{*\prime}g)(t)=a^{*}(t)g(t)+\frac{1}{Z(t)}\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{Z(\tau)b^{*}(\tau)g(\tau)}{\tau-t}d\tau, \qquad (13\text{-}23)$$

$K^{*\prime}$是 K^{*} 的相联算子.

4° 当 $\kappa'=-\kappa<0$,当且仅当满足 κ 个条件

$$\int_{L}b^{*}(\tau)Z(\tau)g(\tau)\tau^{j}d\tau=0, \quad j=0,1,2,\cdots,\kappa-1 \qquad (13\text{-}24)$$

时,方程(13-17)有唯一解(13-22)($q_{\kappa'-1}=0$).

13.2.2 诺特定理

由定理 1,采用卡列曼-维库拉正则化方法,可以讨论 $L=\widehat{ab}$ 上的完全奇异积分方程的诺特定理.

定理 2(诺特定理)

1° 齐次方程 $K\varphi=0$ 在 h 类和相联方程 $K'\phi=0$ 在相联 h' 类中均有有限个线性无关的解.

2° $K\varphi=f$ 在 h 类可解的充要条件为

$$\int_{L}f(\tau)\phi_{j}(\tau)d\tau=0, \quad j=1,2,\cdots,l', \qquad (13\text{-}25)$$

其中$\{\phi_j\}_1^{l'}$ 是 $K'\phi=0$ 在相联 h' 类中的完全解组.

3° 设 $K\varphi=f$ 在 h 类的指标为κ,那么 $l-l'=\kappa$.

13.3 实 方 程

考虑下面的实方程

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t), \quad -1<t<1, \qquad (13\text{-}26)$$

其中 $a,b,f\in H([-1,1])$, $k\in H([-1,1]\times[-1,1])$,并且它们都是实值函数,$\lambda$ 是一个实参数.方程在 h_0 类求解.此类方程应用中最为常见.

13.3.1 标准方程

假定方程(13-26)是正则型的,即满足正则型条件

$$r(t)=\sqrt{a^{2}(t)+b^{2}(t)}>0. \qquad (13\text{-}27)$$

不失一般性,假定 $b(-1)<0$ 或者当 $b(-1)=0$ 时 $a(-1)>0$,在$[-1,1]$上取定函数

$$\Theta(t)=\frac{1}{\pi}\arg[a(t)+ib(t)] \qquad (13\text{-}28)$$

的连续分支使 $-1<\Theta(-1)\leqslant 0$,此时在 h_0 类

$$\alpha_{-1}+i\beta_{-1}=\Theta(-1),\alpha_1+i\beta_1=-\Theta(1),\lambda_{-1}=0,\lambda_1=[\Theta(1)],\kappa=-[\Theta(1)],\tag{13-29}$$

此处符号$[x]$表示x的整数部分. h_0类典则函数为

$$X(z)=(1-z)^{-\kappa}\exp\left\{-\int_{-1}^{1}\frac{\Theta(\tau)}{\tau-z}d\tau\right\},\tag{13-30}$$

标准函数为

$$Z(t)=r(t)(1-t)^{-\kappa}\exp\left\{-\int_{-1}^{1}\frac{\Theta(\tau)}{\tau-t}d\tau\right\}.\tag{13-31}$$

显然

$$\begin{gathered}Z(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\Omega(t),\ -1<\alpha=[\Theta(1)]-\Theta(1)\leqslant 0,\\ -1<\beta=\Theta(-1)\leqslant 0,\end{gathered}\tag{13-32}$$

从而$Z(t)$是一个权函数,确切讲是一个广义雅可比(Jacobi)权函数. 令

$$w_1(t)=\frac{Z(t)}{r^2(t)}(\in H^*),\quad w_2(t)=\frac{1}{Z(t)}(\in H),\tag{13-33}$$

它们分别称为方程(13-26)的第一类权函数和第二类权函数. 作函数变换

$$\varphi(t)=w_1(t)y(t),\tag{13-34}$$

方程(13-26)成为

$$\begin{aligned}&a(t)w_1(t)y(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w_1(\tau)y(\tau)}{\tau-t}d\tau\\&+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}w_1(\tau)k(t,\tau)y(\tau)d\tau=f(t),\quad -1<t<1.\end{aligned}\tag{13-35}$$

显然若y是方程(13-35)的H类解,那么由(13-34)式决定的φ是方程(13-26)的H^*类的解. 反之,若φ是方程(13-26)的H^*类的解,那么

$$F(t)=f(t)-\lambda(K\varphi)(t)\equiv f(t)-\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau\in H(L).\tag{13-36}$$

因为$\omega(K\varphi,\zeta)\leqslant\omega(k,\zeta)\int_{-1}^{1}|\varphi(\tau)|d\tau$,于是由定理1(注意取实解),有

$$y(t)=\frac{\varphi(t)}{w_1(t)}=a(t)w_2(t)F(t)-\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w_2(\tau)F(\tau)}{\tau-t}d\tau+b(t)p_{\kappa-1}(t)\in H,\tag{13-37}$$

其中$p_{\kappa-1}(t)$是一个实系数多项式. 于是由(13-34)式决定的y是方程(13-35)的H类解.

定理3　方程(13-26)在h_0类求解φ等价于方程(13-35)在H类求解y,它们之间由(13-34)式联系.

方程(13-35)称为方程(13-26)的标准方程. 以后只对标准方程讨论,这种处理十分有用.

13.3.2　归一化算子和约束算子

引入两个奇异积分算子

$$(\mathrm{A}y)(t)=a(t)w_1(t)y(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w_1(\tau)y(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau, \qquad (13\text{-}38)$$

$$(\mathrm{B}y)(t)=a(t)w_2(t)y(t)-\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w_2(\tau)y(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau, \qquad (13\text{-}39)$$

和它们的相联算子($\mathrm{A}^*=\mathrm{B}',\mathrm{B}^*=\mathrm{A}'$)

$$(\mathrm{A}^*y)(t)=a(t)w_1(t)y(t)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w_1(\tau)b(\tau)y(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau, \qquad (13\text{-}40)$$

$$(\mathrm{B}^*y)(t)=a(t)w_2(t)y(t)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w_2(\tau)b(\tau)y(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau, \qquad (13\text{-}41)$$

由跳跃问题(13-4)的解法,容易证明下面引理:

引理 1 设 Φ 是以$[-1,1]$为跳跃曲线的分区全纯函数,用 $P.P(\Phi)(z)$表示它在 $z=\infty$处的主部,那么

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\Phi^+(\tau)-\Phi^-(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=\Phi^+(t)+\Phi^-(t)-2P.P(\Phi)(t),\ -1<t<1.$$

若 $p_n\in\Pi_n$,取 $\Phi(z)=X(z)p_n(z)$或 $\Phi(z)=X^{-1}(z)p_n(z)$,得到下面定理:

定理 4 $\mathrm{A}^*p_n=P.P(Xp_n),\mathrm{B}^*p_n=P.P(X^{-1}p_n)$.

由庞加莱-贝特朗置换公式直接计算,然后援引定理 4,可得下面定理.

定理 5 $\mathrm{AB}=\mathrm{I}+b\mathrm{D}_2,\mathrm{BA}=\mathrm{I}-b\mathrm{D}_1$,此处 I 是恒等算子.

$$(\mathrm{D}_1y)(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w_1(\tau)[P.P(X^{-1})(\tau)-P.P(X^{-1})(t)]y(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau, \qquad (13\text{-}42)$$

$$(\mathrm{D}_2y)(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w_2(\tau)[P.P(X)(\tau)-P.P(X)(t)]y(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau. \qquad (13\text{-}43)$$

这个定理有一系列推论.

推论 1 若 $\kappa\geqslant0$,则 $\mathrm{D}_2=0$,因此 B 是 A 的右逆.若 $\kappa\leqslant0$,则 $\mathrm{D}_1=0$,因此 B 是 A 的左逆.

推论 2 $\ker(\mathrm{A})=b\Pi_{\kappa-1},\ker(\mathrm{B})=b\Pi_{-\kappa-1},\mathrm{Ima}(\mathrm{D}_1)=\Pi_{\kappa-1},\mathrm{Ima}(\mathrm{D}_2)=\Pi_{-\kappa-1}$.具体讲,若 $\pi_{\kappa-1}\in\Pi_{\kappa-1}$则 $\mathrm{D}_1b\pi_{\kappa-1}=\pi_{\kappa-1}$,若 $\pi_{-\kappa-1}\in\Pi_{-\kappa-1}$则 $\mathrm{D}_2b\pi_{-\kappa-1}=-\pi_{-\kappa-1}$.

推论 3 $b\mathrm{D}_1$ 和 $-b\mathrm{D}_2$ 是幂等的,D_1 和 D_2 分别是 B 和 A 的左零因子.$b\mathrm{D}_1$ 和 $b\mathrm{D}_2$ 分别是 A 和 B 的右零因子.即 $\mathrm{D}_1\mathrm{B}=\mathrm{D}_2\mathrm{A}=\mathrm{A}b\mathrm{D}_1=\mathrm{B}b\mathrm{D}_2=0$.

推论 4 若 $\kappa=0$,则 $\mathrm{A}y=f$ 具有唯一解 $y=\mathrm{B}f$.若 $\kappa>0$,则方程 $\mathrm{A}y=f$ 在条件 $\mathrm{D}_1y=N_{\kappa-1}$下具有唯一解 $y=\mathrm{B}f+bN_{\kappa-1}$,其中 $N_{\kappa-1}\in\Pi_{\kappa-1}$是一个给定的多项式.若 $\kappa<0$,则方程 $\mathrm{A}y=f$ 当且仅当 $\mathrm{D}_2f=0$ 时有唯一解 $y=\mathrm{B}f$.

所以 D_1 称为**归一化算子**,D_2 称为**约束算子**.

从(13-30)式知 $P.P(X)$是 $-\kappa$ 次多项式,故

$$X_1(t,\tau)=\frac{P.P(X^{-1})(\tau)-P.P(X^{-1})(t)}{\tau-t}\in\Pi_{\kappa-1}^{h}, \qquad (13\text{-}44)$$

$$X_2(t,\tau)=\frac{P_-P(X)(\tau)-P_-P(X)(t)}{\tau-t}\in\Pi^h_{-\kappa-1},\tag{13-45}$$

这里

$$\Pi^h_n=\left\{P,P(\tau,t)=\sum_{j,r=0}^{n}a_{jr}\tau^j t^r,a_{n0}=a_0 n\neq 0\right\}(n\geqslant 0),\Pi^h_n=\{0\}(n<0)\tag{13-46}$$

表示 n 次齐次二元多项式组.由此不难直接验证

$$D_1 f=0\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}w_1(\tau)\tau^j f(\tau)d\tau=0\quad(j=0,1,2,\cdots,\kappa-1),\tag{13-47}$$

$$D_2 f=0\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}w_2(\tau)\tau^j f(\tau)d\tau=0\quad(j=0,1,2,\cdots,-\kappa-1).\tag{13-48}$$

同样的途径也可用于考虑相联方程 $A^*h=g$.

14　奇异积分方程的数值解法

14.1　奇异求积算子

奇异积分方程的数值解法有十分重要的实用意义.中国学者在这方面做了具有特色的工作.本节介绍一个求解方程(13-35)的数值方法的一般框架,属于配位法的范畴.其思想同第6章,即利用数值求积化奇异积分方程为不含未知函数积分的函数方程,然后利用配位法离散成线代方程,因此必须事先寻求合理的奇异求积算子.

14.1.1　相伴多项式对

定义1　设 p_n 是一个 n 次多项式,其零点 $\alpha_{nj}(j=1,2,\cdots,n)$ 全部位于 $[-1,1]$ 上且是简单零点;q_m 是一个 m 次多项式,其零点 $\beta_{mj}(j=1,2,\cdots,m)$ 也全部位于 $[-1,1]$ 上且是简单零点.若 $n=m+\kappa$ 且 $Ap_n=q_m$, $Bq_m=p_n$,那么称 (p_n,q_m) 是奇异积分算子对(A,B)的一个相伴多项式对.

以下假定方程(13-35)的系数 b 为一个 μ 次多项式.并且认为 $\min\{n,m\}\geqslant\mu$.在这个假定下,可以找到许多这种相伴多项式对,例如,当 p_n 是以 w_1 为权的正交多项式,q_m 是以 w_2 为权的正交多项式时,(p_n,q_m) 就是(A,B)的一个相伴多项式对.

后面要用到以下一些记号.若 π_n 是一个 n 次多项式,它的零点为 $t_j(j=1,2,\cdots,n)$,且 $-1\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant 1$. $C'(\pi_n)$ 表示在 $[-1,1]$ 上连续且在 $t_j(j=1,2,\cdots,n)$ 处有导数的函数全体.在 π_n 上的**离散化算子**记为

$$r_n^{\pi}f=(f(t_1),f(t_2),\cdots,f(t_n))^{\mathrm T}.\tag{14-1}$$

在 π_n 的零点上的**拉格朗日多项式插值算子**记为

$$(\mathrm{L}'^{\pi}_n f)(\tau) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi_n(\tau)}{\pi'_n(t_j)(\tau - t_j)} f(t_j). \tag{14-2}$$

一般地，当

$$\mathrm{L}^{\pi}_n f \in C'(\pi_n), \quad \mathrm{r}^{\pi}_n \mathrm{L}^{\pi}_n f = \mathrm{r}^{\pi}_n f \tag{14-3}$$

时称算子 L^{π}_n 是一个关于 π_n 的可微插值算子. 这种算子很多，L'^{π}_n 就是其中一个.

14.1.2 相伴奇异求积算子对

若 (p_n, q_m) 是 (A, B) 的相伴多项式对，构造关于 A 和 B 的奇异求积算子 $\mathrm{Q}^{p\mathrm{A}}_n$: $C'(p_n) \to C'(q_m)$ 和 $\mathrm{Q}^{q\mathrm{B}}_m: C'(q_m) \to C'(p_n)$ 如下：

$$(\mathrm{Q}^{p\mathrm{A}}_n f)(t) = \frac{q_m(t)}{p_n(t)} f(t) + b(t) \sum_{j=1}^{n} \frac{u_{nj}}{\alpha_{nj} - t} f(\alpha_{nj}), \tag{14-4}$$

$$(\mathrm{Q}^{q\mathrm{B}}_m f)(t) = \frac{p_n(t)}{q_m(t)} f(t) - b(t) \sum_{j=1}^{m} \frac{v_{mj}}{\beta_{mj} - t} f(\beta_{mj}), \tag{14-5}$$

其中

$$u_{nj} = \frac{1}{\pi p'_n(\alpha_{nj})} \int_{-1}^{1} \frac{w_1(\tau) p_n(\tau)}{\tau - \alpha_{nj}} \mathrm{d}\tau, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{14-6}$$

$$v_{mj} = \frac{1}{\pi q'_m(\beta_{mj})} \int_{-1}^{1} \frac{w_2(\tau) q_m(\tau)}{\tau - \beta_{mj}} \mathrm{d}\tau, \quad j = 1, 2, \cdots, m. \tag{14-7}$$

定义 2 $(\mathrm{Q}^{p\mathrm{A}}_n, \mathrm{Q}^{q\mathrm{B}}_m)$ 称为 (A, B) 的一个**相伴奇异求积算子对**.

同 6.2 节，定义 $\mathrm{pr}(\mathrm{Q}^{p\mathrm{A}}_n) = \max\{j, \Pi_j \subseteq \ker(\mathrm{A} - \mathrm{Q}^{p\mathrm{A}}_n)\}$，$\mathrm{pr}(\mathrm{Q}^{q\mathrm{B}}_m) = \max\{j, \Pi_j \subseteq \ker(\mathrm{B} - \mathrm{Q}^{q\mathrm{B}}_m)\}$，分别为奇异求积算子 $\mathrm{Q}^{p\mathrm{A}}_n$ 和 $\mathrm{Q}^{q\mathrm{B}}_m$ 的代数精确度.

引理 1 $\mathrm{pr}(\mathrm{Q}^{p\mathrm{A}}_n) \geqslant n$，$\mathrm{pr}(\mathrm{Q}^{q\mathrm{B}}_m) \geqslant m$.

此外，引入两个关于积分算子 D_1 和 D_2 的求积算子

$$(\mathrm{Q}^{p\mathrm{D}_1}_n f)(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{nj} X_1(t, \alpha_{nj}) f(\alpha_{nj}), \tag{14-8}$$

$$(\mathrm{Q}^{q\mathrm{D}_2}_m f)(t) = \sum_{j=1}^{m} v_{mj} X_2(t, \beta_{mj}) f(\beta_{mj}). \tag{14-9}$$

其中 X_1 和 X_2 分别由(13-44)式和(13-45)式定义. 显然，

$$\begin{cases} \mathrm{Q}^{p\mathrm{D}_1}_n = 0, & 若\ \kappa \geqslant 0, \\ \mathrm{Q}^{q\mathrm{D}_2}_m = 0, & 若\ \kappa \leqslant 0. \end{cases} \tag{14-10}$$

用 $\mathrm{Ode}_1(p_n)$ 表示 p_n 关于权 w_1 的正交度，$\mathrm{Ode}_2(q_m)$ 表示 q_m 关于权 w_2 的正交度，由(13-47)式和(13-48)式可得下面引理.

引理 2 $\mathrm{Ode}_1(p_n) \geqslant \max\{0, \kappa\}$，$\mathrm{Ode}_2(q_m) \geqslant \max\{0, -\kappa\}$.

14.1.3 基本结果

引理 3 $\mathrm{Q}^{p\mathrm{D}_1}_n f = \mathrm{D}_1 \mathrm{L}'^{p}_n f$，$\mathrm{Q}^{q\mathrm{D}_2}_m f = \mathrm{D}_2 \mathrm{L}'^{q}_m f$. 确切讲，$\mathrm{pr}(\mathrm{Q}^{p\mathrm{D}_1}_n) \geqslant n$，$\mathrm{pr}(\mathrm{Q}^{q\mathrm{D}_2}_m) \geqslant m$，其中 $\mathrm{pr}(\mathrm{Q}^{p\mathrm{D}_1}_n) = \max\{j, \Pi_j \subseteq \ker(\mathrm{D}_1 - \mathrm{Q}^{p\mathrm{D}_1}_n)\}$，$\mathrm{pr}(\mathrm{Q}^{q\mathrm{D}_2}_m) = \max\{j, \Pi_j \subseteq \ker(\mathrm{D}_2 - \mathrm{Q}^{q\mathrm{D}_2}_m)\}$.

定理 1　$Q_n^{pA}Q_m^{qB}=I+bQ_m^{qD_2}$, $Q_m^{qB}Q_n^{pA}=I-bQ_n^{pD_1}$.

引入 Q_n^{pA} 和 Q_m^{qB} 的相联奇异求积算子,即关于 A^* 和 B^* 的奇异求积算子如下:

$$(Q_n^{pA^*}f)(t)=\frac{q_m(t)}{p_n(t)}f(t)+\sum_{j=1}^{n}\frac{u_{nj}}{\alpha_{nj}-t}b(\alpha_{nj})f(\alpha_{nj}),\qquad(14\text{-}11)$$

$$(Q_n^{qB^*}f)(t)=\frac{p_n(t)}{q_m(t)}f(t)-\sum_{j=1}^{m}\frac{v_{mj}}{\beta_{mj}-t}b(\beta_{mj})f(\beta_{mj}).\qquad(14\text{-}12)$$

定理 2

$$(Q_n^{pA^*}f)(t)=\frac{q_m(t)f(t)-(L'^p_n q_m f)(t)}{p_n(t)},$$

$$(Q_m^{qB^*}f)(t)=\frac{p_n(t)f(t)-(L'^q_m p_n f)(t)}{q_m(t)}.$$

这两个定理完全平行于 13.3.2 节中的定理 4 和定理 5. 因此关于奇异求积算子对(Q_n^{pA},Q_m^{qB})也有类似于奇异积分算子对(A,B)的结果.

推论 1　若 $\kappa\geqslant0$ 则 $Q_m^{qD_2}=0$,因此 Q_m^{qB} 是 Q_n^{pA} 的右逆. 若 $\kappa\leqslant0$ 则 $Q_n^{pD_1}=0$,因此 Q_m^{qB} 是 Q_n^{pA} 的左逆.

推论 2　$\ker(Q_n^{pA})=b\Pi_{\kappa-1}$, $\ker(Q_m^{qB})=b\Pi_{-\kappa-1}$, $\mathrm{Ima}(Q_n^{pD_1})=\Pi_{\kappa-1}$, $\mathrm{Ima}(Q_m^{qD_2})=\Pi_{-\kappa-1}$,具体讲,若 $\pi_{\kappa-1}\in\Pi_{\kappa-1}$ 则 $Q_n^{pD_1}(b\pi_{\kappa-1})=\pi_{\kappa-1}$,若 $\pi_{-\kappa-1}\in\Pi_{-\kappa-1}$ 则 $Q_m^{qD_2}(b\pi_{-\kappa-1})=-\pi_{-\kappa-1}$.

推论 3　$bQ_n^{pD_1}$ 和 $-bQ_m^{qD_2}$ 是幂等的, $Q_n^{pD_1}$ 和 $Q_m^{qD_2}$ 分别是 Q_m^{qB} 和 Q_n^{pA} 的左零因子, $bQ_n^{pD_1}$ 和 $bQ_m^{qD_2}$ 分别是 Q_n^{pA} 和 Q_m^{qB} 的右零因子. 即 $Q_n^{pD_1}Q_m^{qB}=Q_m^{qD_2}Q_n^{pA}=Q_n^{pA}bQ_n^{pD_1}=Q_m^{qB}bQ_m^{qD_2}=0$.

推论 4　若 $\kappa=0$ 则 $Q_n^{pA}y=f$ 具有唯一解 $y=Q_m^{qB}f$. 若 $\kappa>0$ 则方程 $Q_n^{pA}y=f$ 在条件 $D_1y=N_{\kappa-1}$ 下具有唯一解 $y=Q_m^{qB}f+bN_{\kappa-1}$,其中 $N_{\kappa-1}\in\Pi_{\kappa-1}$ 是一个给定的多项式. 若 $\kappa<0$ 则方程 $Q_n^{pA}y=f$ 当且仅当 $Q_m^{qD_2}f=0$ 时有唯一解 $y=Q_m^{qB}f$.

14.2　离散化矩阵

14.2.1　相伴矩阵对

考虑奇异求积算子和离散化算子的复合. 用 r_m^q 作用于 Q_n^{pA} 得到

$$r_m^qQ_n^{pA}f=A_{mn}r_n^pf,\qquad(14\text{-}13)$$

这里 $A_{mn}=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,其中

$$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{b(\beta_{mi})u_{nj}}{\alpha_{nj}-\beta_{mi}}, & \alpha_{nj}\neq\beta_{mi},\\[2ex] \dfrac{q'_m(\beta_{mi})}{p'_n(\alpha_{nj})}-b'(\beta_{mi})u_{nj}, & \alpha_{nj}=\beta_{mi}.\end{cases}\qquad(14\text{-}14)$$

A_{mn} 称为 Q_n^{pA} 的**离散化矩阵**. 同样

$$r_n^pQ_m^{qB}f=B_{nm}r_m^qf,\qquad(14\text{-}15)$$

这里 $B_{nm}=[b_{jr}]$是 $n\times m$ 矩阵，其中

$$b_{jr}=\begin{cases}\dfrac{b(\alpha_{nj})v_{mr}}{\beta_{mr}-\alpha_{nj}}, & \alpha_{nj}\neq\beta_{mr},\\ \dfrac{p'_n(\alpha_{nj})}{q'_m(\beta_{mr})}+b'(\alpha_{nj})v_{mr}, & \alpha_{nj}=\beta_{mr}.\end{cases} \tag{14-16}$$

B_{nm}称为 Q_m^{qB} 的**离散化矩阵**.

定义 3$[A_{mn},B_{nm}]$称为(Q_n^{pA},Q_m^{qB})的**相伴矩阵对**.

引理 4 若$[A_{mn},B_{nm}]$是(Q_n^{pA},Q_m^{qB})的相伴矩阵对，那么当 $\kappa\geqslant0$ 时 $A_{mn}B_{nm}=I_m$，当 $\kappa\leqslant0$ 时 $B_{nm}A_{mn}=I_n$，I_n 为 n 阶单位方阵.

14.2.2 完全补矩阵

当 $\kappa=0$ 时，A_{mn}和B_{nm}是 n 阶方阵，记为 A_n 和 B_n. 由引理 4 知 $A_nB_n=I_n$. 在 $\kappa\neq0$时，也可以寻求到这种类似物.

设 $\kappa>0$，在$[-1,1]$上任意选取 κ 个不同点$\beta_{mi}(i=m+1,m+2,\cdots,n)$，令

$$s_\kappa(t)=\prod_{i=m+1}^{n}(t-\beta_{mi}). \tag{14-17}$$

用 r_κ^s 离散 $Q_n^{pD_1}$，得到

$$r_\kappa^s Q_n^{pD_1}f=A_{\kappa n}r_n^p f, \tag{14-18}$$

这里 $A_{\kappa n}=[a_{m+i,j}]$是 $\kappa\times n$ 矩阵，且

$$a_{m+i,j}=u_{nj}X_1(\alpha_{nj},\beta_{m,m+i}). \tag{14-19}$$

作 n 阶分块方阵

$$A_n=\begin{bmatrix}A_{mn}\\A_{\kappa n}\end{bmatrix},\quad B_n=[B_{nm},B_{n\kappa}]. \tag{14-20}$$

这里 $B_{n\kappa}=[b_{j,m+r}]$是 $n\times\kappa$ 矩阵，且

$$b_{j,m+r}=b(\alpha_{nj})s_{\kappa r}(\alpha_{nj}),\quad s_{\kappa r}(t)=\frac{s_\kappa(t)}{s'_\kappa(\beta_{m,m+r})(t-\beta_{m,m+r})}. \tag{14-21}$$

显然

$$r_n^p(bL'^s_\kappa f)=B_{n\kappa}r_\kappa^s f. \tag{14-22}$$

后面将证明 $A_nB_n=I_n$，因此称 A_n 和 B_n 是 A_{mn}和 B_{nm}的**完全补矩阵**.

当 $\kappa<0$，任意选取$[-1,1]$上 $-k$ 个不同的点 $\alpha_{n,n+i}(i=1,2,\cdots,-\kappa)$，令

$$s_{-\kappa}(t)=\prod_{i=n+1}^{m}(t-\alpha_{ni}). \tag{14-23}$$

从

$$r_{-\kappa}^s Q_m^{qD_2}f=B_{-\kappa,m}r_m^q f, \tag{14-24}$$

得到 $-\kappa\times m$ 阶矩阵

$$B_{-\kappa,m}=[b_{n+j,r}],\quad b_{n+j,r}=v_{mr}X_2(\alpha_{n,n+j},\beta_{mr}). \tag{14-25}$$

令

$$B_m=\begin{bmatrix}B_{nm}\\B_{-\kappa,m}\end{bmatrix},\quad A_m=[A_{mn},A_{m,-\kappa}],\tag{14-26}$$

这里

$$A_{m,-\kappa}=[a_{i,n+j}],\quad a_{i,n+j}=-b(\beta_{mi})s_{-\kappa,j}(\beta_{mi}),$$

$$s_{-\kappa,j}(t)=\frac{s_{-\kappa}(t)}{s'_{-\kappa}(\alpha_{n,n+j})(t-\alpha_{n,n+j})}.\tag{14-27}$$

显然

$$r_m^q(-bL'^s_{-\kappa}f)=A_{m,-\kappa}r^s_{-\kappa}f.\tag{14-28}$$

称 A_m 和 B_m 是 A_{mn} 和 B_{nm} 的完全补矩阵.

定理3 若 $\kappa=0$ 那么 $A_nB_n=I_n$，A_n 和 B_n 由(14-14)式和(14-16)式给出.若 $\kappa>0$ 那么 $A_nB_n=I_n$，A_n 和 B_n 由(14-20)式给出.若 $\kappa<0$ 那么 $A_mB_m=I_m$，A_m 和 B_m 由(14-26)式给出.

这个定理的证明由下面几个引理完成,这些引理本身亦有独立的意义.

引理5 若 $\kappa>0$ 则 $A_{mn}B_{n\kappa}=0_{m\kappa}$.若 $\kappa<0$ 则 $B_{nm}A_{m,-\kappa}=0_{n,-\kappa}$，这里 $0_{m\kappa}$ 是 $m\times\kappa$ 零矩阵.

引理6 若 $\kappa>0$ 则 $A_{\kappa n}B_{nm}=0_{\kappa m}$，若 $\kappa<0$ 则 $B_{-\kappa,m}A_{mn}=0_{-\kappa,n}$.

引理7 若 $\kappa>0$ 则 $A_{\kappa n}B_{n\kappa}=I_\kappa$，若 $\kappa<0$ 则 $B_{-\kappa,m}A_{m,-\kappa}=I_{-\kappa}$.

推论5 当 $\kappa\geqslant0$，线代方程 $A_n\delta_n=f_n$ 有唯一解 $\delta_n=B_nf_n$.当 $\kappa<0$，线代方程 $A_{mn}\delta_n=f_m$ 当且仅当 $B_{-\kappa,m}f_m=0$ 满足时才有唯一解 $\delta_n=B_{nm}f_m$.

14.3 直接数值解法

现在给出求解方程(13-35)的一个配位法.改写方程(13-35)为

$$(A+\lambda K)y=f,\tag{14-29}$$

其中 K 如(13-36)式定义.引入求积算子 Q_n^{pK} 如下：

$$(Q_n^{pK}f)(t)=\sum_{j=1}^{n}u_{nj}(L_m^q k^t)(t,\alpha_{nj})f(\alpha_{nj}),\tag{14-30}$$

其中 $L_m^q k^t$ 表示将 τ 看成参数,用 L_m^q 作用于 $k(\tau,t)$，L_m^q 如(14-3)式.用 r_m^q 作用(14-30)式得到

$$r_m^qQ_n^{pK}f=K_{mn}r_n^p f,\tag{14-31}$$

这里

$$K_{mn}=[k_{ij}],\quad k_{ij}=u_{nj}k(\beta_{mi},\alpha_{nj}).\tag{14-32}$$

14.3.1 κ>0 的情形

先假定 $\kappa>0$，考虑

$$\begin{cases}(A+\lambda K)y=f,\\D_1y=N_{\kappa-1},\end{cases}\tag{14-33}$$

其中 $N_{\kappa-1}\in\Pi_{\kappa-1}$ 是一个给定的多项式，$D_1y=N_{\kappa-1}$ 称为**归一化条件**.在(14-33)式

中用 $Q_n^{pA}, Q_n^{pK}, Q_n^{pD_1}, L_m^q f$ 分别代替 A, K, D_1, f，得到

$$\begin{cases}(Q_n^{pA} + \lambda Q_n^{pK}) y_n = L_m^q f, \\ Q_n^{pD_1} y_n = N_{\kappa-1}.\end{cases} \tag{14-34}$$

(14-34)称为(14-33)的(**直接**)**逼近方程**，其解称为(直接)逼近解，(直接)逼近解的集合记为 E^D.

用 r_m^q 和 r_κ^q 分别离散(14-34)式中两个方程得到

$$(\boldsymbol{A}_n + \lambda \boldsymbol{K}_n)\boldsymbol{\delta}_n = f_n, \tag{14-35}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{mn} \\ \boldsymbol{0}_{kn} \end{bmatrix}. \tag{14-36}$$

方程(14-35)称为方程(14-33)的(**直接**)**数值方程**，其解称为(直接)数值解，(直接)数值解的集合记为 F^D. 同6.2节所述，若 $\boldsymbol{\delta}_n$ 是数值解，引入延展算子

$$(E_n^p \boldsymbol{\delta}_n)(t) = \frac{p_n(t)}{q_m(t)}\left[(L_m^q f)(t) - \sum_{j=1}^{n} u_{nj}\left(\frac{b(t)}{a_{nj} - t} + \lambda (L_m^q k^j)(t, a_{nj})\right)\boldsymbol{\delta}_{nj}\right], \tag{14-37}$$

那么有下面结果：

定理 4 $E_n^p: F^D \to E^D$ 和 $r_n^p: E^D \to F^D$ 互为逆算子.

14.3.2 $\kappa \leqslant 0$ 的情形

若 $\kappa \leqslant 0$，假定方程(14-29)有解，那么由13.3.2节中的推论知

$$D_2(f - \lambda K y) = 0 \tag{14-38}$$

(在 $\kappa = 0$ 时，该条件自动满足)，因此方程(14-29)的解必为

$$(A + \lambda K) y = f + b D_2 (f - \lambda K y) \tag{14-39}$$

的解. 在这个方程中用 $Q_n^{pA}, Q_n^{pK}, Q_m^{qD_2}, L_m^q f$ 分别代替 A, K, D_2, f 得到

$$(Q_n^{pA} + \lambda Q_n^{pK} + \lambda b Q_m^{qD_2} Q_n^{pK}) y_n = f^*, \tag{14-40}$$

这里

$$f^* = L_m^q f + b N_{-\kappa-1} \qquad N_{-\kappa-1} = Q_m^{qD_2} f \in \Pi_{-\kappa-1}. \tag{14-41}$$

此时，方程(14-39)称为方程(14-29)的(直接)逼近方程，其解称为(直接)逼近解，(直接)逼近解集记为 E^D. 用 r_m^q 离散逼近方程得

$$(\boldsymbol{A}_{mn} + \lambda \boldsymbol{K}_{mn} + \lambda \boldsymbol{K}_{mn}^*)\boldsymbol{\delta}_n = \boldsymbol{f}_m^* \tag{14-42}$$

这里 $\boldsymbol{A}_{mn}, \boldsymbol{K}_{mn}$ 如前，而 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{K}_{mn}^*$ 为

$$\boldsymbol{K}_{mn}^* = [k_{ij}^*], k_{ij}^* = b(\beta_{mi}) u_{nj} k_{-\kappa-1}^j(\beta_{mi}),$$

$$k_{-\kappa-1}^j = Q_m^{qD_2} k^j \in \Pi_{-\kappa-1}, k^j = k(t, a_{nj}), \tag{14-43}$$

$$\boldsymbol{f}_m^* = r_m^q f^*. \tag{14-44}$$

显然

$$\boldsymbol{K}_{mn}^* r_n^p f = r_m^q (b Q_m^{pD_1} Q_n^{pK}) f. \tag{14-45}$$

此时，方程(14-42)称为方程(14-40)的(直接)数值方程，其解称为(直接)数值解，

其解集记为 F^D. 若 $\boldsymbol{\delta}_n$ 是数值解，引入延展算子如下：

$$(\mathrm{E}_n^{\rho}\delta_n)(t) = \frac{\rho_n(t)}{q_m(t)}\left[f^*(t) - \sum_{j=1}^{n} u_{nj}\left(\frac{b(t)}{\alpha_{nj}-t} + \lambda k^*(t,\alpha_{nj})\right)\boldsymbol{\delta}_{nj}\right], \tag{14-46}$$

这里

$$k^*(t,\tau) = (\mathrm{L}_m^q k^t)(t,\tau) + (\mathrm{D}_2\mathrm{L}_m^q k^s)(t,\tau), \tag{14-47}$$

那么定理4仍然成立.

14.4 间接数值解法

14.4.1 $\kappa>0$ 的情形

当 $\kappa>0$，由13.3.2节中的推论4知方程(14-33)等价于

$$(\mathrm{I}+\lambda\mathrm{L})y = F, \tag{14-48}$$

此处

$$(\mathrm{L}y)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} w_1(\tau)l(\tau,t)y(\tau)\mathrm{d}\tau,$$
$$l(\tau,t) = (\mathrm{B}k^t)(\tau,t),$$
$$F = \mathrm{B}f + bN_{\kappa-1}. \tag{14-49}$$

l、F 分别是 $[-1,1]\times[-1,1]$ 和 $[-1,1]$ 上的赫尔德函数.

14.4.2 $\kappa\leqslant 0$ 的情形

当 $\kappa\leqslant 0$ 时，由13.3.2节中的推论4知在条件(14-38)下，方程(14-29)等价于方程(14-48)(视 $N_{\kappa-1}=0$). 因此不论 $\kappa>0$ 或 $\kappa\leqslant 0$，均只要讨论方程(14-48). 它是一个带形如(10-20)式的弱奇性核的第二种弗雷德霍姆积分方程. 引入求积算子，

$$(\mathrm{Q}_n^{\rho l_n} y)(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{nj} l_n(t,\alpha_{nj})y(\alpha_{nj}), \tag{14-50}$$

此处

$$l_n(t,\tau) = (\mathrm{Q}_m^{q\mathrm{B}}\mathrm{L}_m^q k^t)(t,\tau). \tag{14-51}$$

构造方程

$$(\mathrm{I}+\lambda\mathrm{Q}_n^{\rho l_n})y_n = F_n, \tag{14-52}$$

此处

$$F_n = \mathrm{Q}_m^{q\mathrm{B}}\mathrm{L}_m^q f + bN_{\kappa-1}. \tag{14-53}$$

方程(14-52)称为方程(14-48)的逼近方程，或方程(14-33)(方程(14-39))的(间接)逼近方程，其解集记为 E^I.

用 r_n^{ρ} 作用方程(14-52)两边得

$$(\boldsymbol{I}_n+\lambda\boldsymbol{L}_n)\boldsymbol{\delta}_n = \mathrm{r}_n^{\rho}F_n, \tag{14-54}$$

此处

$$L_n = [l_{jr}], \quad l_{jr} = u_{nr} l_n(\alpha_{nj}, \alpha_{nr}). \tag{14-55}$$

方程(14-54)称为方程(14-52)的(**间接**)**数值方程**,其解集记为 F^I.若 $\boldsymbol{\delta}_n$ 是间接数值解,引入延展算子

$$(\mathrm{E}_n^\rho \boldsymbol{\delta}_n)(t) = F_n(t) - \lambda \sum_{a}^{n} u_{nj} l_n(t, \alpha_{nj}) \delta_{nj}. \tag{14-56}$$

14.4.3 基本定理

定理 5 $\mathrm{E}_n^\rho: F^I \to E^I$ 和 $\mathrm{r}_n^\rho: E^I \to F^I$ 互为逆算子.

14.5 理论分析

14.5.1 同一性技术

直接数值方法方便简单,可用于求解奇异积分方程的近似解.间接数值方法是基于第二种弗雷德霍姆积分方程,便于作方法的理论分析.这两者之间有下面有趣而重要的联系,称为**同一性技术**.

定理 6 当 $\kappa > 0$ 时,方程(14-33)与方程(14-48)同解.当 $\kappa \leqslant 0$ 时,方程(14-39)与方程(14-48)同解.

引理 8 $Q_m^{qB} Q_n^{\rho K} = Q_n^{\rho L_n}$, $Q_n^{\rho D_1} Q_n^{\rho L_n} = 0$, $Q_n^{\rho A} Q_n^{\rho L_n} = Q_n^{\rho K} + b Q_m^{qD_2} Q_n^{\rho K}$.

定理 7 当 $\kappa > 0$ 时,方程(14-34)与方程(14-52)同解.当 $\kappa \leqslant 0$ 时,方程(14-40)与方程(14-52)同解.即,$E^D = E^I$.

定理 8 当 $\kappa > 0$ 时,方程(14-35)与方程(14-54)同解.当 $\kappa \leqslant 0$ 时,方程(14-42)与方程(14-54)同解.即,$F^D = F^I$.

推论 6 若 $\kappa > 0$,则由方程(14-37)和(14-56)式定义的延展算子是相同的.若 $\kappa \leqslant 0$,则由(14-46)式和(14-56)式定义的延展算子是相同的.

14.5.2 逼近解的存在性和收敛性

无论怎样选取插值算子 L_m^q,所得数值解总是相同的;但逼近解则不然.通常根据输入函数的条件有两种方法选取 L_m^q.若 $f \in C'[-1,1]$,$k \in C'([-1,1] \times [-1,1])$,取 $\mathrm{L}_m^q = \mathrm{I}$,此时的逼近解称为**第一类逼近解**,若 $f \in H[-1,1]$,$k \in H([-1,1] \times [-1,1])$,取 $\mathrm{L}_m^q = \mathrm{L}'^q_m$(拉格朗日插值多项式算子),此时的逼近解称为**第二类逼近解**.这两类逼近解都属自然插值解.

假定 λ 是方程(14-48)的正则值.对所考虑的函数空间装配模 $\|f\| = \max\{|f(t)|, -1 \leqslant t \leqslant 1\}$,利用间接解法作理论分析可以得到如下定理:

定理 9 若 $f \in C'[-1,1]$,$k \in C'([-1,1] \times [-1,1])$,$\{Q_n^{\rho D}\}$ 和 $\{Q_m^{qR}\}$ 一致有界,那么

1° 当 $\kappa > 0$ 时,方程(14-33)的第一类逼近解唯一存在(当然数值解也唯一存在),且一致收敛到方程(14-33)的解.

2° 当$\kappa\leqslant 0$时，方程(14-39)的第一类逼近解唯一存在（当然数值解也唯一存在），且一致收敛到方程(14-39)的解.

定理 10　若$f,k\in H^\nu$，$\{Q_n^{\rho D}\}$一致有界，并且$\|Q_m^{qB}L_m^q\|=o(n^\nu)$，那么

1° 当$\kappa>0$时，方程(14-33)的第二类逼近解唯一存在（当然数值解也唯一存在），且一致收敛到方程(14-33)的解.

2° 当$\kappa\leqslant 0$时，方程(14-39)的第二类逼近解唯一存在（当然数值解也唯一存在），且一致收敛到方程(14-39)的解.

对于一些常用情况，可以具体估计出$\|Q_m^{qB}L_m^q\|$来.

参考文献

1 路见可，钟寿国.积分方程论.北京：高等教育出版社，1990.

2 张石生.积分方程.重庆：重庆出版社，1988.

3 郭大钧，孙经先.非线性积分方程.济南：山东科学技术出版社，1987.

4 路见可.解析函数边值问题.上海：上海科学技术出版社，1987.

5 Мусхелишвили Н И.奇异积分方程.上海：上海科学技术出版社，1966.

6 路见可，杜金元.奇异积分方程的数值解法.数学进展，1991，20(3)：278～293.

7 Du Jinyuan. Some systems of orthogonal polynomials associated with singular integral equations. Acat Math Sci, 1987, 7(1): 85～96.

8 Du Jinyuan. Singular integral operators and singular quadrature operators associated with singular integral equations of the first kind and their applications. Acta Math Sci, 1995, 15 (2): 219～234.

9 Du Jinyuan. Singular integral operators and singular quadrature operators associated with singular integral equations. Acta Math Sci, 1998, 18(2)227～240.85～96.

10 Elliott D. The classical collocation method for singular integral equations. SIAM J Numer Anal, 1982, 19: 816～832.

11 Elliott D. The numerical treatment of singular integral equations-a review. in Treatment of Integral Equations by Numerical Methods. Baker C T H, Miller G F (Editors). Acad Press, New York, 1982.

12 Ioakimidis N I, tHEOCARIS P S. A comparison between the direct and the classical numerical methods for the solution of Cauchy type singular integral equations. SIAM J Numer Anal, 1980, 17: 115～118.

13 Tsamasphyros G, Theocaris P S. Equivalence and convergence of direct and indirect methods for the numerical solution of singular integral equations. Computing, 1981, 27: 17～80.

14 Srivastav R P, Jen E. On the polynomials interpolating approximate solutions of singular integral equations. Appl Anal, 1983, 14: 275～285.

·经典数学卷·

第13篇

偏微分方程

编　者　陈　化　刘伟安
审校者　齐民友

目　录

引　言

偏微分方程就是含有多元函数偏导数的方程式。它的研究已有近300年的历史。早期，它产生于力学、几何、物理等理论学科和工程技术问题中。近来，在生命科学、经济科学中也提出了大量的偏微分方程问题。所以，它作为数学科学最活跃的分支之一，一直受到广泛的关注和重视。但由于其复杂性和困难性，至今仍缺少全面的、一般的理论体系。在20世纪30年代之前，对偏微分方程的研究所采用的方法基本上属于经典分析，在此基础上建立了偏微分方程的经典理论。在20世纪30～50年代，由希尔伯特(Hilbert)创导，索波列夫(Sobolev)、彼得罗夫斯基(Petrovsky)和施瓦兹(Schwartz)先后开始应用泛函分析方法研究偏微分方程，建立了索波列夫空间和广义函数理论，由此又有了偏微分方程的近代理论。自20世纪60年代以来，对偏微分方程的研究进一步广泛应用了泛函分析及其他数学分支(如几何、拓扑和代数)的新概念和方法，建立了拟微分算子、傅里叶(Fourier)积分算子和马斯罗夫(Maslov)算子理论，总称为微局部分析理论。自20世纪80年代起，这些现代方法又广泛应用于非线性偏微分方程的研究，于是有了非线性微局部分析、几何测度论、粘性解和无穷维动力系统等等一系列现代理论，从而大大促进了偏微分方程理论的蓬勃发展。

本篇主要介绍偏微分方程的经典理论，如特征理论、适定性理论等，和典型方程的常用解法，如分离变量法、格林函数法等，也介绍近代理论中的一些概念，如基本解。

1　偏微分方程的基本概念

1.1　一般概念和记号

在自然科学和工程技术的各种运动以及平衡现象等等的研究中，常会遇到含多元未知函数及其偏导数(或仅含偏导数)的关系式，此关系式称为**偏微分方程**，若关系式不止一个，就称为**偏微分方程组**．例如：

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y); \tag{1-1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u; \tag{1-2}$$

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\ 2}}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^{\ 2}}=0; \tag{1-3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u; \tag{1-4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u; \tag{1-5}$$

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0; \tag{1-6}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+a(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0;\end{cases} \tag{1-7}$$

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\cdots,\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}u\right)=0. \tag{1-8}$$

人们所研究的偏微分方程及偏微分方程组,有的在物理及力学方面有重要应用,如(1-3)、(1-4)、(1-5)及(1-7)式;有的在几何学或其他数学分支中有特殊意义,如(1-6)式;其他一些方程(组),其形式更为一般,在偏微分方程的理论研究及应用方面往往也是重要的.

偏微分方程(组)所包含的最高阶导数的阶称为该方程(组)的阶数,例如(1-1)、(1-2)和(1-7)式是一阶的,(1-3)~(1-6)式是二阶的,(1-8)式是 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 阶的.

若偏微分方程(组)关于未知函数及偏导数都是一次式,则称这个偏微分方程(组)为线性的,否则称为非线性的。在非线性方程(组)中,若对未知函数的最高阶导数来说是线性的,则称之为**拟线性偏微分方程(组)**,否则称之为**完全非线性偏微分方程(组)**.如(1-1)、(1-3)、(1-4)和(1-5)式是线性的,其余是非线性的,其中(1-6)、(1-7)式是拟线性的,而(1-8)式常用来表示一般的完全非线性方程.

若线性偏微分方程(组)中有某项既不含未知函数又不含其偏导数,则称该方程(组)为非齐次的,否则称为齐次的.线性方程(组)最重要的性质是**叠加原理**成立,即若 u_1,u_2 是某齐次线性方程的解,则对任意的常数 λ_1 和 λ_2,$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2$ 也是该方程的解.这里称函数 u(在方程组的情形下是一组函数)为**偏微分方程的解(或积分)**,若在指定的区域内 u 是连续的,且具有方程中所出现的一切偏导数,并对区域内所有点都一致地满足方程.

若在空间 $\mathbf{R}^n$ 的某个区域 Ω 上讨论问题,$\mathbf{R}^n$ 的坐标为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,则简记 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 x.记 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 为 $\partial_i u$ 或 p_i,记 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 为 p.若引进重指标记号 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,则记 $|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$,记 $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}u$ 为 $\partial^\alpha u$.故(1-8)式可以简记为

$$F(x;u;p,\cdots,\partial^\alpha u)=0.$$

利用简化了的记号可将一般非线性偏微分方程组写成

$$F_i(x;u_1,u_2,\cdots,u_m,\cdots,\partial^{\alpha(i,j)}u_j,\cdots)=0\quad(i=1,2,\cdots,n). \tag{1-9}$$

这是包含 n 个方程的方程组,其中含有 m 个未知函数,各个方程中对 u_j 的最高阶导数 $\alpha(i,j)$ 依赖于 i 和 j.当 $n>m$ 时称(1-9)式为超定方程组,当 $n<m$ 时称(1-9)式为欠定方程组,当 $n=m$ 时称为确定方程组.

1.2 偏微分方程与常微分方程的比较

对于一个 n 阶常微分方程，它的解的全体（除去可能的一些"奇异"解外）依赖于 n 个任意常数．然而对偏微分方程而言，其求解的情形要复杂得多．比如一个偏微分方程的解可能有很多，与常微分方程的解依赖于若干个任意常数相比，它的自由度往往会更大．

例 1 $$u_{xy}=f(x,y),\tag{1-10}$$
它的解可以写成
$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+w(x)+v(y),\tag{1-11}$$
其中 $w(x),v(y)$ 为两个任意连续可微函数．

例 2 $$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=\alpha u.\tag{1-12}$$
方程(1-12)实际上是 α 阶齐次函数所满足的欧拉(Euler)关系式．事实上对任一 α 阶齐次函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，满足
$$u(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^{\alpha}u(x_1,x_2,\cdots,x_n),\tag{1-13}$$
将它关于 t 求导并令 $t=1$ 即可得到 u 满足方程(1-12)．若在(1-13)式中取 $t=\frac{1}{x_n}$，则
$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_n^{\alpha}u\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n},1\right)$$
于是 u 可以用一个依赖于 $n-1$ 个变元的函数 $\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})$ 写成如下形式
$$u=x_n^{\alpha}\varphi\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$
这表明方程(1-12)的解可以自由到依赖于一个含 $n-1$ 个变元的函数．

在对偏微分方程的研究中，一般感兴趣的是它的解，比如讨论其解的性质和结构以及求解的方法等等．但求解偏微分方程往往是相当复杂的，与常微分方程相比它的解一般来说很难用通解形式给出来，即使对于线性方程也是如此．所以对偏微分方程的求解往往更多地是研究其在一些特定条件下的解，并称这些用来帮助决定特解的条件为**定解条件**．

在求解常微分方程的特解时所需的定解条件常常是在给定的区间（有限或无限）的两端（即边界点）对未知函数的值或者其他性质加以某种限制．而对偏微分方程求解时，由于自变量在高维空间中变化，其变化区域以及区域的边界将会相当复杂，因此在区域的边界给出的定解条件也会有更多的形式．一般称给定在区域的边界上的定解条件为**边界条件**．在某些情况下，出现在方程中的某个自变量可以赋予"时间"的意义，例如前面提到的方程(1-4)和(1-5)中用 t 表示时间，而 $t=t_0$ 的超平面又恰为所考虑区域边界的一部分，则将 $t=t_0$ 超平面上给出的边界条件称之为**初始条件**．

常微分方程同偏微分方程在解的存在性方面也有相当大的差别．对常微分方

程有解的存在性定理,即在相当一般(比如说要求连续性等等)的条件下可以证明其解是局部存在的.而对偏微分方程,虽然对许多常见的偏微分方程在不考虑定解条件时,解有很大的自由度,但也有许多条件非常好的偏微分方程,其解哪怕是在非常小的局部范围内也是不存在的.这方面第一个无解方程的例子是 Hans Lewy 1957 年给出的(这个例子曾被称为 20 世纪 50 年代偏微分方程的三大里程碑之一,它的产生使人们认识到偏微分方程的研究同常微分方程相比有本质性的不同),他所构造的方程是一个具多项式系数条件非常好的一阶线性偏微分方程,即

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)+i(x+iy)\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,y,t), \tag{1-14}$$

其中 f 为某个在 $\mathbf{R}^3$ 原点附近无穷次可微的光滑函数.Lewy 证明了方程(1-14)在原点的邻域内不存在解 u.

因此,人们对偏微分方程的研究方法与常微分方程相比有很大的不同,从而形成了两个独立的数学分支.然而尽管有这些差别,常微分方程中的理论和方法对于偏微分方程的研究而言仍是相当重要的.

2 一阶偏微分方程

2.1 完全积分、一般积分和奇异积分

一阶偏微分方程的一般形式为

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;u;\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0. \tag{2-1}$$

若方程(2-1)的解包含 n 个函数,则这种解称为**一般积分(通解)**;如果解包含 n 个独立的常数,则称这样的解为**完全积分(完全解)**;若 $G(x_1,x_2,\cdots,x_n;u;C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$ 为一阶方程(2-1)的完全积分,从 $G=0,\dfrac{\partial G}{\partial C_i}=0(1\leqslant i\leqslant n)$中消去 C_i,若可得到一个解,则称之为方程的**奇异解(奇异积分)**.可以证明,一阶偏微分方程(2-1)的任何解均包含在一般积分内、或完全积分内、或奇异积分内.

对一阶偏微分方程(2-1),假定 F 对所有变量均有连续的一阶偏导数,则称

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial F}{\partial p_i}\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial F}{\partial p_i}\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+p_i\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)\\[2mm] p_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\end{cases}\qquad(1\leqslant i\leqslant n) \tag{2-2}$$

为非线性方程(2-1)的**特征方程组**.此特征方程组还可写成如下等价的形式

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}=\frac{\mathrm{d}u}{\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial F}{\partial p_i}}=\frac{-\mathrm{d}p_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F}{\partial u}}=\cdots=\frac{-\mathrm{d}p_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F}{\partial u}}. \tag{2-3}$$

设特征方程组的解为

$$\begin{cases}x_i=x_i(t) & (2\text{-}4)\\ u=u(t)\quad(1\leqslant i\leqslant n), & (2\text{-}5)\\ p_i=p_i(t) & (2\text{-}6)\end{cases}$$

并称它为非线性偏微分方程(2-1)的**特征带**.在 $x_1,x_2,\cdots,x_n,u$ 空间的曲线(2-4)和(2-5)称为非线性偏微分方程(2-1)的**特征曲线**.如果函数 $Z(x_1,x_2,\cdots,x_n;u;p_1,p_2,\cdots,p_n)$在特征方程组的任一解 $x_i=x_i(t),u=u(t),p_i=p_i(t)\ (i=1,2,\cdots,u)$ 上等于常数,即

$$Z(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t);u(t);p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t))=C,$$

则函数 $Z(x_1,x_2,\cdots,x_n;u;p_1,p_2,\cdots,p_n)$称为特征方程组的**首次积分**.

例 1 解一阶齐次线性偏微分方程

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0. \tag{2-7}$$

解 方程(2-7)对应的特征方程组为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=\frac{x_2}{x_1},\\ \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_1}=\frac{x_3}{x_1},\\ \quad\vdots\\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_1}=\frac{x_n}{x_1},\end{cases} \tag{2-8}$$

或写成对称的形式:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}.$$

由上式可以求出(2-8)式的 $n-1$ 个互相独立的首次积分:

$$\frac{x_2}{x_1}=C_1,\frac{x_3}{x_1}=C_2,\cdots,\frac{x_n}{x_1}=C_{n-1},$$

并且这些首次积分均为方程(2-7)的解.由常微分方程知识可知,方程(2-7)的全部的解可以写成

$$u=\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\cdots,\frac{x_n}{x_1}\right), \tag{2-9}$$

这里 Φ 是其变元的任意可微函数.

由表达式(2-9)可知,方程(2-7)的任意解均是零次齐次函数,实际上方程(2-7)

正是零次齐次函数所满足的欧拉方程.

例2 考虑方程$\frac{\partial u}{\partial y}=f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

解 方程的完全积分为

$$u=ax+f(a)y+b\quad(a,b\text{ 为任意常数}).$$

这个方程代表一个平面,其一般积分(通解)可由下面方程组

$$u=ax+f(a)y+\varphi(a),\quad 0=x+f'(a)y+\varphi'(a)$$

给出.这是一个可展曲面,其几何意义为:从通过空间一固定点(例如原点)作出平行于形成完全积分的平面,这些平面仅依赖于参数 a,因此包络成一个顶点在原点的锥面.由此可见这个曲面的母线平行于刚才所述的锥面的母线.

若在其完全积分两端对 b 求导会得到 $0=1$ 的矛盾方程,这表明此例中没有奇异积分。

2.2 几类特殊的一阶偏微分方程

(1) 不显含变量 x,y,z,而只出现$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$的情形.

这种方程的形式为

$$f\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

其完全积分为 $z=ax+ky+b$,其中 a,k,b 均为常量,且 $f(a,k)=0$.

例3 解一阶非线性偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

解 由已给的偏微分方程可知 $ak=1,k=\frac{1}{a}$,故此偏微分方程的完全积分为

$$z=ax+\frac{y}{a}+b.$$

(2) 只显含一个变量的情形.

1° $F\left(x,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0\left(\text{或 }F\left(y,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0\right)$型

对于 $F\left(x,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$,可设$\frac{\partial z}{\partial y}=a$($a$ 为常量),然后从 $F\left(x,\frac{\partial z}{\partial x},a\right)=0$ 中解出$\frac{\partial z}{\partial x}$,即$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(x,a)$.再把这些$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$的值代入

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

得

$$\mathrm{d}z=\varphi(x,a)\mathrm{d}x+a\mathrm{d}y,$$

积分后可得完全积分

$$z=\int\varphi(x,a)\mathrm{d}x+ay+b.$$

用同样方法可求解 $F\left(y,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ 型的方程.

例 4 求解$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设$\frac{\partial z}{\partial y}=a$,从给定的方程中解得$\frac{\partial z}{\partial x}=2ax$,故

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2ax dx+a dy,$$

积分后得完全积分为

$$z=ax^2+ay+b.$$

例 5 求解$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$.

解 设$\frac{\partial z}{\partial x}=a$,从给定的方程中解得$\frac{\partial z}{\partial y}=2a^2y$,则

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=a dx+2a^2y dy,$$

积分后得完全积分为

$$z=ax+a^2y^2+b.$$

2° $F\left(z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$ 型.

此时可设$\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial x}$,代入方程 $F\left(z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$ 中解出$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(z,a)$,再由这些值可得

$$dz=\varphi(z,a)(dx+a dy),$$

积分后可得完全积分为

$$x+ay=\int\frac{dz}{\varphi(z,a)}+b.$$

例 6 求解$9\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2z+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]=4$.

解 设$\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial x}$,从给定的方程中解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\pm 2}{3\sqrt{z+a^2}}$,故而

$$dz=\frac{\pm 2}{3\sqrt{z+a^2}}(dx+a dy).$$

两边积分后可得完全积分为

$$x+ay=\pm(z+a^2)^{3/2}+b,$$

或

$$(x+ay-b)^2=(z+a^2)^3.$$

(3) 形如$f\left(x,\frac{\partial z}{\partial x}\right)=h\left(y,\frac{\partial z}{\partial y}\right)$的特殊方程.

这时可设方程两边均等于一个任意常量 a,再解出新方程中的$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$,即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(x,a),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\psi(y,a).$$

由此可得到 $dz=\varphi(x,a)dx+\psi(y,a)dy$,积分后可得完全积分为

$$z=\int\varphi(x,a)dx+\int\psi(y,a)dy+b.$$

例7　求解 $\frac{\partial z}{\partial x}y+\frac{\partial z}{\partial y}x=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　原方程可变形为

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}-x}{x}=\frac{y}{\frac{\partial z}{\partial y}-y},$$

令两边都等于 a,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x(a+1),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(a+1)}{a}y.$$

从而 $dz=(a+1)\left(xdx+\frac{y}{a}dy\right)$.两边积分后可得完全积分为

$$z=(a+1)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2a}\right)+b.$$

(4) 克莱洛方程

$$z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+f\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

其完全积分为

$$z=ax+by+f(a,b).$$

(5)型如 $\varphi\left(x,\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\psi\left(y,\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z$ 的特殊方程.

这时可用分离变量法求它的完全积分.令

$$z=f(x)+g(y),$$

代入原方程可得

$$\varphi(x,f'(x))-f(x)=\psi(y,g'(y))+g(y).$$

这就把变量 x 和 y 分离了.上式左边仅是 x 的函数,而右边只依赖于 y,因而得到

$$\varphi(x,f'(x))-f(x)=\psi(y,g'(y))+g(y)=C,$$

其中 C 为常数.从常微分方程

$$\begin{cases}\varphi(x,f'(x))-f(x)=C,\\ \psi(y,g'(y))+g(y)=C\end{cases}$$

分别解出 $f(x)$和 $g(y)$,再由 $z=f(x)+g(y)$可以得到原方程的完全积分.

例8　求解 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=mz$.

解　设 $z=f(x)+g(y)$,代入原方程可得到

$$xf'(x)-mf(x)=-yg'(y)+mg(y).$$

故解 $xf'(x)-mf(x)=C$ 和 $-yg'(y)+mg(y)=C$,可得

$$f(x)=ax^m-\frac{C}{m},\ g(y)=by^m+\frac{C}{m}.$$

所得 $z=ax^m+by^m$ 为原方程的完全积分.

2.3　一阶拟线性偏微分方程

含有两个自变量的一阶拟线性偏微分方程是

$$a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=c(x,y,z).\tag{2-10}$$

设函数 $a(x,y,z)$, $b(x,y,z)$ 和 $c(x,y,z)$ 在三维空间的某个区域 G 内有连续的一阶偏导数，且 a 和 b 在 G 内不同时为零.

方程(2-10)的几何意义：以区域 G 中的每一点 (x,y,z) 为始点，以 (a,b,c) 为方向数引一向量.这样就在区域 G 中的每一点确定了一个方向，因而得到了一个方向场，称之为由偏微分方程(2-10)所确定的**方向场**.设光滑曲面 $z=\varphi(x,y)$ 是方程(2-10)的积分曲面，那么它在 $(x,y,\varphi(x,y))$ 处的法线方向数为 $p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $q=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, -1，适合等式

$$ap+bq+c(-1)=0,$$

也就是说向量 (a,b,c) 和向量 $(p,q,-1)$ 是互相垂直的.所以积分曲面 $z=\varphi(x,y)$ 上任一点的法线与方程(2-10)的方向场在这一点的方向是互相垂直的.

另一方面，一阶常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(x,y,z),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b(x,y,z),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=c(x,y,z),\end{cases}\tag{2-11}$$

在 (x,y,z) 空间中确定的方向场与偏微分方程(2-10)确定的方向场一致，称常微分方程组(2-11)为偏微分方程(2-10)的**特征方程**.而常微分方程组(2-11)的每一解 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ 在三维空间 (x,y,z) 中表示一条曲线，这条曲线称为一阶偏微分方程(2-10)的**特征曲线**.

一阶偏微分方程(2-10)的求解问题和常微分方程组(2-11)的求解问题在下面的意义下是等价的：

1° 特征曲线族所织成的光滑曲面是偏微分方程(2-10)的积分曲面.

2° 偏微分方程(2-10)的每一个积分曲面 $z=\varphi(x,y)$ 可以由特征曲线族组成，即过曲面 $z=\varphi(x,y)$ 的每一点所引的特征曲线整个落在曲面 $z=\varphi(x,y)$ 上.

由此可得求解一阶拟线性偏微分方程的方法：首先作出它的特征方程(2-11)，并求出它的全部解，然后从其中选取一族特征曲线，使它织成光滑曲面，这样就得到方程(2-10)的一个积分曲面.

柯西问题：若在方程(2-10)的定义区域 G 中预先给定了一条曲线

$$L: x=x_0(t),\quad y=y_0(t),\quad z=z_0(t),\tag{2-12}$$

要求解方程(2-10)的这样一个积分曲面 $z=\varphi(x,y)$，使它含有曲线 L，即有

$$z_0(t)\equiv\varphi(x_0(t),y_0(t)),$$

这个问题称为一阶拟线性偏微分方程的柯西问题,它是常微分方程的初始值问题在偏微分方程中的自然拓广.这里需要假定 $x'_0(t),y_0'(t),z'_0(t)$ 是连续的,并且 $x'^2_0(t)+y'^2_0(t)\neq 0$.

和常微分方程的初始值问题解的存在性不一样,对偏微分方程的柯西问题有3种可能性:

1° 如果 $x_0'(t):y_0'(t)\neq a(x_0(t),y_0(t),z_0(t)):b(x_0(t),y_0(t),z_0(t))$,则上述柯西问题有唯一的解;

2° 如果曲线 L 是特征线,即

$$\frac{x'_0(t)}{a(x_0(t),y_0(t),z_0(t))}=\frac{y'_0(t)}{b(x_0(t),y_0(t),z_0(t))}=\frac{z_0'(t)}{c(x_0(t),y_0(t),z_0(t))},$$

则上述柯西问题的解不是唯一的(有无穷多个解);

3° 若 L 不是特征线,但是

$$x_0'(t):y_0'(t)\equiv a(x_0(t),y_0(t),z_0(t)):b(x_0(t),y_0(t),z_0(t)),$$

则上述柯西问题没有解.

例 9 求解方程

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0 \tag{2-13}$$

过曲线 $L:x=0,z=y^2$ 的积分曲面.

解 这时 $a=-y,b=x,c=0$.方程(2-13)的特征方程为

$$\frac{dx}{ds}=-y,\quad \frac{dy}{ds}=x,\quad \frac{dz}{ds}=0,$$

它的一般解为

$$x(s)=C_1\cos s+C_2\sin s,\quad y(s)=C_1\sin s-C_2\cos s,\quad z(s)=C_3.$$

曲线 L 的参数方程为 $x=0,y=t,z=t^2$,因为

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x_0', & y_0' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\equiv -t\neq 0,$$

所以方程有唯一的积分曲面含有曲线 L.

根据初始条件:$x(0)=C_1=0,y(0)=-C_2=t,z(0)=C_3=t^2$,从而得到

$$x=-t\sin s,\quad y=t\cos s,\quad z=t^2,$$

由前两式中消去 s,得到 $x^2+y^2=t^2$,代入第三式得到所要求的过曲线 L 的积分曲面

$$z=x^2+y^2.$$

例 10 求方程(2-13)过曲线 $L:z=1,x^2+y^2=4$ 的积分曲面.

解 这时 L 的参数方程为

$$x=2\cos t,\quad y=\pm 2\sin t,\quad z=1,$$

它的切线方向是$(-2\sin t,\pm 2\cos t,0)$,这和方程(2-13)的方向场的方向$(\mp 2\sin t, 2\cos t,0)$是一致的,所以 L 是特征曲线,故方程(2-13)有无穷多个积分曲面含有曲线 L,例如

$$z=x^2+y^2-3,\quad 4z=x^2+y^2,\quad z=-x^2-y^2+5$$

等均是所述柯西问题的解.

例 11 试求方程(2-13)过曲线 $L: z=x, x^2+y^2=1$ 的积分曲面.

解 曲线 L 的参数方程是

$$x=\cos t,\quad y=\pm\sin t,\quad z=\cos t.$$

由于沿 L 成立着恒等式

$$x_0'(t):y_0'(t)\equiv(-\sin t):(\pm\cos t)\equiv(-y):x\equiv a:b,$$

但这时 L 不是特征线,因而所提的柯西问题无解.

一般形式的一阶拟线性偏微分方程为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;u),\tag{2-14}$$

其中 a_i 和 f 均为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,u$ 的连续函数,并且不同时为零.常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=a_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;u)\quad(1\leqslant i\leqslant n),\\ \dfrac{du}{dt}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;u),\end{cases}\tag{2-15}$$

或者

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{a_1}=\dfrac{dx_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{dx_n}{a_n}=\dfrac{du}{f},\\ a_i=a_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;u),f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;u)\end{cases}\tag{2-16}$$

称为拟线性方程(2-14)的特征方程组,若曲线

$$L:\begin{cases}x_i=x_i(t)\quad(1\leqslant i\leqslant n),\\ u=u(t)\end{cases}$$

满足特征方程组(2-15)(或(2-16)),则称 L 为拟线性方程的特征曲线.设

$$y_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;u)\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

为特征方程组(2-16)的 n 个独立的首次积分,则它对于任何连续可微函数

$$\Phi=\Phi(y_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;u),y_2(x_1,x_2,\cdots,x_n;u),\cdots,\\ y_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;u))=0$$

都是拟线性方程(2-14)的隐式解.

2.4 一阶偏微分方程组

(1) 相容方程组 设给定了两个一阶偏微分方程的方程组

$$\begin{cases}F\left(x,y,z,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0,\\ G\left(x,y,z,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0,\end{cases}\tag{2-17}$$

其中 x,y 是自变量,z 是未知函数.一般说来,不一定存在函数 $z=\varphi(x,y)$ 同时满足这两个方程,也就是说它们可能没有公共的积分曲面.

下面讨论方程组(2-17)有公共解的条件.

当$\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}\neq 0$时（这里$p=\frac{\partial z}{\partial x},q=\frac{\partial z}{\partial y}$），利用隐函数存在定理可由(2-17)式解出$p$和$q$：

$$\begin{cases}p=A(x,y,z),\\ q=B(x,y,z).\end{cases}\tag{2-18}$$

假定函数A和B在(x,y,z)的某个区域G中有连续的一阶偏导数，如果过区域G的每一点(x,y,z)，方程组(2-18)都有一公共的积分曲面，则称方程组(2-18)是相容的.

若$z=\varphi(x,y)$是方程组(2-18)的一个公共解，则可推出在积分曲面$z=\varphi(x,y)$上，成立

$$A_y+A_zB\equiv B_x+B_zA.\tag{2-19}$$

因此当方程组(2-18)相容时，关系式(2-19)在G中恒成立.

反之，若条件(2-19)在G中恒成立，也可推出方程组(2-18)是相容的. 所以在解相容方程组(2-18)时，先验证条件(2-19)是否成立，然后把y看作参数，解常微分方程

$$\frac{dz}{dx}=A(x,y,z),\tag{2-20}$$

得到$z=\varphi(x,y,c(y))$，其中c是y的任意连续可微函数，将此代入(2-18)式的第二个方程，得到一个关于$c(y)$的常微分方程，解出$c(y)$再代入(2-20)式即得方程组(2-18)的公共解.

(2) 法甫方程　形状如下的一阶偏微分方程

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0\tag{2-21}$$

称为**法甫(Pfaff)方程**. 这里设P,Q,R在区域G中有连续的偏导数，且$P^2+Q^2+R^2\neq 0$. 现不妨假定$R\neq 0$，若函数$z=\varphi(x,y)$适合恒等式

$$P(x,y,\varphi(x,y))dx+Q(x,y,\varphi(x,y))dy+R(x,y,\varphi(x,y))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right)\equiv 0,$$

即

$$\begin{cases}R(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial x}+P(x,y,\varphi(x,y))\equiv 0,\\ R(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}+Q(x,y,\varphi(x,y))\equiv 0.\end{cases}$$

这表明$z=\varphi(x,y)$是方程组

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{P}{R},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Q}{R}\tag{2-22}$$

的公共解，也就是方程(2-21)的解. 因此当$R\neq 0$时，求方程(2-21)的解相当于求解方程组(2-22).

方程(2-21)过区域G的每一点有一积分曲面的充要条件是

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\equiv 0.\tag{2-23}$$

(2-23)式关于x,y,z是对称的. 同样当$P\neq 0$，方程(2-21)有形如$x=\varphi(y,z)$的积分

曲面时,也可得到关系式(2-23).

如果方程(2-21)的左边是函数 $u(x,y,z)$ 的全微分,即

$$du(x,y,z)=Pdx+Qdy+Rdz,$$

则 $u(x,y,z)=C$ 是方程(2-21)的积分曲面族.

法甫方程在微分几何中应用很广,并可推广到多维的情形.

(3) 求完全积分的拉格朗日-沙比方法 这里给出求解两个自变量的一阶偏微分方程的一般方法.为了求方程

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \tag{2-24}$$

的完全积分,先设法补充一个方程

$$G\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=a, \tag{2-25}$$

使得它与(2-24)式有含有一个参数的公共积分曲面族

$$z=\varphi(x,y,a,b), \tag{2-26}$$

那么(2-26)式是方程(2-24)的积分曲面族.可以证明,若 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}\neq 0$(这里 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$),则(2-26)式确是(2-24)式的含有两个独立参数的解族,从而是方程(2-24)的完全积分.以上方法称为求方程(2-24)的完全积分的**拉格朗日-沙比(Lagrange-Charpit)方法**.

具体地说,函数 G 应适合什么条件,方程(2-24)与(2-25)才有含一个参数的公共解族?这个问题相当于方程组(2-24)与(2-25)是相容的问题.这时相容性条件应该是什么呢?由以上的条件可从方程组(2-24)和(2-25)中解出 p 和 q:

$$p=A(x,y,z,a),\quad q=B(x,y,z,a),$$

再把解得结果代入(2-24)和(2-25)式,就得到

$$F(x,y,z,A(x,y,z,a),B(x,y,z,a))\equiv 0, \tag{2-27}$$

$$G(x,y,z,A(x,y,z,a),B(x,y,z,a))\equiv a, \tag{2-28}$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial z}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial z}\equiv 0.$$

故可解出 A_z 和 B_z.同理将(2-27)、(2-28)式分别对 x 和 y 求导也可解出 A_y 和 B_x.然后代入相容性条件(2-19),由 $A_y+A_zB\equiv B_x+B_zA$ 得到

$$-\begin{vmatrix}F_y & F_q\\ G_y & G_q\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}F_z & F_q\\ G_z & G_q\end{vmatrix}B+\begin{vmatrix}F_p & F_x\\ G_p & G_x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F_p & F_z\\ G_p & G_z\end{vmatrix}A\equiv 0,$$

当 $p=A$, $q=B$ 时关于 x,y,z 恒成立.所以方程组(2-24)和(2-25)相容的条件为

$$-\begin{vmatrix}F_y & F_q\\ G_y & G_q\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}F_z & F_q\\ G_z & G_q\end{vmatrix}q+\begin{vmatrix}F_p & F_x\\ G_p & G_x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F_p & F_z\\ G_p & G_z\end{vmatrix}p\equiv 0,$$

且关于 x,y,z,p,q 恒成立.上式整理之后得到

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial y}+\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial G}{\partial z}-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial G}{\partial p}-\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial G}{\partial q}=0. \tag{2-29}$$

这是一个关于5个变量 x,y,z,p,q 的未知函数 G 的线性齐次偏微分方程.其对应的特征方程组为

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dz}{pF_p+qF_q}=\frac{dp}{-(F_x+pF_z)}=\frac{dq}{-(F_y+qF_z)}. \tag{2-30}$$

明显地函数 $F(x,y,z,p,q)$ 是方程组(2-30)的一个首次积分.此外需要求(2-30)式的另一个与 F 无关的首次积分 $G(x,y,z,p,q)$,即要求它适合条件 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}\neq 0$.

例 12 求方程 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1$ 的完全积分.

解 这时特征方程为

$$\frac{dx}{ds}=2p,\quad \frac{dy}{ds}=2q,\quad \frac{dz}{ds}=2(p^2+q^2)=2,\quad \frac{dp}{ds}=0,\quad \frac{dq}{ds}=0,$$

所以 $p=a$ 是它的一个首次积分,并且与 p^2+q^2-1 无关.由

$$\begin{cases}p=a,\\ p^2+q^2=1,\end{cases}$$

解出 p 和 q,得到 $p=a,q=\pm\sqrt{1-a^2}$,因此

$$z=ax\pm\sqrt{1-a^2}\,y+b$$

是方程的完全积分.

例 13 求解偏微分方程 $2xz-x^2\frac{\partial z}{\partial x}-2xy\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

解 这时 $F=2xz-x^2p-2xyq+pq$,对应的特征方程为

$$\frac{dp}{2z-2qy}=\frac{dq}{0}=\frac{dx}{x^2-q}=\frac{dy}{2xy-p}=\frac{dz}{px^2+2xyq-2pq},$$

显然 $q=a$ 是与 F 无关的一个首次积分,故联立

$$\begin{cases}q=a,\\ F=0,\end{cases}$$

可解出

$$p=\frac{2x(z-ay)}{x^2-a},$$

因此由

$$dz=pdx+qdy=\frac{2x(z-ay)}{x^2-a}dx+ady,$$

即

$$\frac{dz-ady}{z-ay}=\frac{2xdx}{x^2-a},$$

两边积分可解出

$$z=ay+b(x^2-a)$$

是原方程的完全积分.

例 14 求解 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}-2z+xy=0$.

解 它的特征方程是

$$\frac{dx}{2p+q-y}=\frac{dy}{2q+p-x}=\frac{dz}{2(p^2+q^2+pq)-py-qx}$$
$$=\frac{dp}{q-y+2p}=\frac{dq}{p-x+2q},$$

因此
$$dx-dp=0,$$
从而得到一个与 F 无关的首次积分
$$p-x=a.$$

由
$$\begin{cases}p-x=a,\\ p^2+q^2+pq-qx-py-2z+xy=0\end{cases}$$
可解出 p 和 q:
$$p=a+x,$$
$$q=-\frac{a}{2}+\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}},$$
故
$$dz=pdx+qdy=(x+a)dx+\left(-\frac{a}{2}+\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}}\right)dy,$$
这实际上是一个法甫方程,即
$$dy=\frac{dz+\frac{a}{2}dy-(x+a)dx}{\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}}}=\frac{d\left(2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}\right)}{2\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}}},$$
两边积分有
$$y+b=\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}}.$$
因此
$$z=\frac{1}{2}\left[(x+a)^2+(y+b)^2-ay-\frac{a^2}{4}\right]$$
为原方程的完全积分.

一般而言,对多于两个自变量的一阶线性偏微分方程
$$\frac{\partial z}{\partial t}+a_1(t,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+a_n(t,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \qquad (2\text{-}31)$$
若 $z=\varphi(t,x_1,\cdots,x_n)$ 为(2-31)式的非常值解,则 $\varphi(t,x_1,\cdots,x_n)$ 是常微分方程组
$$\frac{dx_i}{dt}=a_i(t,x_1,\cdots,x_n)\quad(1\leqslant i\leqslant n) \qquad (2\text{-}32)$$
的首次积分.以上结论反过来也成立.故只要能找到对应于方程(2-31)的特征方程组(2-32)的首次积分,也就等于找到了方程(2-31)的解.

3 二阶线性偏微分方程

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{3-1}$$

或

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{3-2}$$

其中 a_{ij}, b_i, c 称为方程的系数，f 称为方程的**自由项**，它们都是自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数．如果自由项 $f=0$，则方程称为**齐次偏微分方程**；否则，称为**非齐次偏微分方程**．如果所有系数都是常数，则方程称为**常系数方程**；否则，称为**变系数方程**．

二阶线性偏微分方程中最基本的是数学物理方程．

3.1 数学物理方程

数学物理方程是描述一些典型物理现象的偏微分方程．

1. 波动方程

1° 弦(杆的纵向)的无阻尼自由振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 u 表示弦的横向位移；$a^2 = \frac{T}{\rho}$，T 是弦上的纵向张力，ρ 是弦的线密度．

2° 弦(杆的纵向)的无阻尼强迫振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

其中 $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}$，$F(x,t)$是弦上的外力密度．

3° 弦(杆的纵向)的有阻尼强迫振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

其中 k 是阻尼系数．

4° 膜的无阻尼自由振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

其中 u 表示膜的横向位移；$a^2 = \frac{T}{\rho}$，T 是膜上的张力，ρ 是膜的面密度．

5° 膜的无阻尼强迫振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t),$$

其中 $f(x,y,t)=\dfrac{F(x,y,t)}{\rho}$，$F(x,y,t)$是膜上的外力密度.

6° 电磁波方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right).$$

2. 热导方程

1° 绝热细杆的无源热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 u 表示温度；$a^2=\dfrac{c}{\rho}$，c 是物质的比热容、ρ 是细杆的线密度.

2° 绝热细杆的有源热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),$$

其中 $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}$，$F(x,t)$是弦上的热源密度.

3° 非绝热细杆的有源热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-k(u-u_0)+f(x,t).$$

其中 k 是界面导热系数；u_0 是介质温度.

4° 绝热圆盘的无源热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

其中 $a^2=\dfrac{c}{\rho}$，c 是物质的比热容，而 ρ 是圆盘的面密度.

5° 绝热圆盘的有源热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t).$$

其中 $f(x,y,t)=\dfrac{F(x,y,t)}{\rho}$，$F(x,y,t)$是圆盘上的热源密度.

6° 三维热导方程和扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

7° 电磁场理论和流体力学问题中的连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot(uv)=0,$$

其中$\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$，称为哈密顿算子，读作“nabla”.

3. 调和方程

1° 拉普拉斯方程和泊松(Poisson)方程

$$\Delta u = 0,$$

$$\Delta u = f,$$

其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$(一维),$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$(二维),$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$(三维)称为拉普拉斯算子.拉普拉斯方程和泊松方程描述的是恒稳的物理现象,如恒稳电磁场、恒稳温度场等.

2° 亥姆霍兹(Helmholtz)方程

$$\Delta V + \lambda V = 0,$$

其中 $\lambda > 0$.

3° 原子反应堆理论中的中子方程

$$\Delta N + a^2 N = 0,$$

其中 N 表示中子数.

以上这些例子都是实数域上的二阶线性偏微分方程,除此之外,数学物理方程还包括其他一些方程,如

1° 量子力学中的薛定鄂方程

$$\mathrm{i}h \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta u + Vu \text{ (非定态)},$$

$$-\frac{h^2}{2m}\Delta u + Vu = Eu \text{ (定态)}.$$

2° 杆的横向自由振动方程和强迫振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f(x,t).$$

3° 弹性力学中的二维双拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

3.2 二阶线性偏微分方程的分类和化简

1. 两个自变量的方程

(1)分类 两个自变量的方程的一般形式为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cn = f. \tag{3-3}$$

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$称为方程(3-3)的**判别式**.一阶常微分方程

$$a_{11}\mathrm{d}y^2 - 2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a_{22}\mathrm{d}x^2 = 0, \tag{3-4}$$

称为(3-3)的**特征方程**,其积分曲线称为(3-3)式的**特征线**.

1° 当 $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ 时,(3-4)式有两个不同的实积分,即(3-3)式在每一点上

都有两族实特征线.这时,(3-3)式称为**双曲型方程**.例如,波动方程是双曲型方程.

2° 当 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ 时,(3-4)式有两个相同的实积分,即(3-3)式在每一点上只有一族实特征线.这时,(3-3)式称为**抛物型方程**.例如,热导方程是抛物型方程.

3° 当 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$ 时,(3-4)式有一对共轭复积分,即(3-3)式没有实特征线.这时,(3-3)式称为**椭圆型方程**.例如,调和方程是椭圆型方程.

4° 还有所谓**混合型方程**,即在讨论的区域中,在一个子域内是一种类型,在另一子域内是另一种类型.例如,方程

$$yu_{xx}+u_{yy}=0,$$

其判别式:$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-y$,方程在上半平面是椭圆型的,在下半平面是双曲型的,所以,方程在全平面上是混合型的.

(2)化简　作变量代换

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y),\tag{3-5}$$

其雅可比(Jacobi)行列式

$$J=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\neq 0,$$

将(3-3)式化为

$$\bar a_{11}u_{\xi\xi}+2\bar a_{12}u_{\xi\eta}+\bar a_{22}u_{\eta\eta}+\bar b_1u_\xi+\bar b_2u_\eta+cu=f,\tag{3-6}$$

其中

$$\begin{cases}\bar a_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,\\ \bar a_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y,\\ \bar a_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2,\\ \bar b_1=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y,\\ \bar b_2=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y.\end{cases}$$

考虑与特征方程对应的一阶偏微分方程

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0.\tag{3-7}$$

1° 如果(3-3)式是双曲型的,取 ξ,η 为(3-7)式的两个相互独立的解,使得 $\bar a_{11}=\bar a_{22}=0$,于是,(3-3)式化简为

$$u_{\xi\eta}+\beta_1u_\xi+\beta_2u_\eta+\gamma u=\delta,\tag{3-8}$$

其中　$$\beta_1=\frac{\bar b_1}{2\bar a_{12}},\quad \beta_2=\frac{\bar b_2}{2\bar a_{12}},\quad \gamma=\frac{c}{2\bar a_{12}},\quad \delta=\frac{f}{2\bar a_{12}}.$$

再引入变量

$$s=\frac{\xi+\eta}{2},\quad t=\frac{\xi-\eta}{2},$$

可将(3-8)式化为

$$u_{ss}-u_{tt}+\bar\beta_1u_s+\bar\beta_2u_t+\gamma u=\delta,\tag{3-9}$$

其中　$$\bar\beta_1=\frac{\bar b_1+\bar b_2}{\bar a_{12}},\quad \bar\beta_2=\frac{\bar b_1-\bar b_2}{\bar a_{12}}.$$

(3-8)和(3-9)式都称为**双曲型方程的标准形式**.

2° 如果(3-3)式是抛物型的,(3-7)式只有一个独立的解,取之为 ξ,取 η 为任一与此解独立的函数,则 $\bar{a}_{11}=\bar{a}_{12}=0$,于是,(3-3)式化简为

$$u_{\eta\eta}+\beta_1 u_\xi+\beta_2 u_\eta+\gamma u=\delta, \tag{3-10}$$

其中 $\beta_1=\dfrac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{22}},\beta_2=\dfrac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}},\gamma=\dfrac{c}{\bar{a}_{22}},\delta=\dfrac{f}{\bar{a}_{22}}$($\beta_1\neq 0$,否则就成为常微分方程了).

(3-10)式称为**抛物型方程的标准形式**.

3° 如果(3-3)式是椭圆型的,(3-7)式有一对共轭复解,分别取其实部和虚部为 ξ,η,则 $\bar{a}_{11}=\bar{a}_{22},\bar{a}_{12}=0$,于是,(3-3)式化简为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\beta_1 u_\xi+\beta_2 u_\eta+\gamma u=\delta, \tag{3-11}$$

其中
$$\beta_1=\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{11}},\quad \beta_2=\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{11}},\quad \gamma=\frac{c}{\bar{a}_{11}},\quad \delta=\frac{f}{a_{11}}.$$

(3-11)式称为**椭圆型方程的标准形式**.

(3)常系数方程的进一步化简

1° 令 $u=v\exp\left(\dfrac{-\bar{\beta}_1 s+\bar{\beta}_2 t}{2}\right)$,代入(3-9)式,可将波动方程进一步化简为

$$v_{ss}-v_{tt}+Kv=h(s,t),$$

其中
$$K=\bar{\gamma}-\frac{\bar{\beta}_1^2-\bar{\beta}_2^2}{4},\quad h(s,t)=\delta\exp\left(\frac{\bar{\beta}_1 s-\bar{\beta}_2 t}{2}\right).$$

2° 令 $u=v\exp\left(\dfrac{\beta_2^2-4\gamma}{4\beta_1}\xi-\dfrac{\beta_2}{2}\eta\right)$,代入(3-10)式,可将热传导方程进一步化简为

$$v_{\eta\eta}+\beta_1 v_\xi=h(\xi,\eta),$$

其中
$$h(\xi,\eta)=\delta\exp\left(-\frac{\beta_2^2-4\gamma}{4\beta_1}\xi+\frac{\beta_2}{2}\eta\right).$$

3° 令 $u=v\exp\left(-\dfrac{\beta_1\xi+\beta_2\eta}{2}\right)$,代入(3-11)式,可将调和方程进一步化简为

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+Kv=h(s,t),$$

其中
$$K=\gamma-\frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{4},\quad h(\xi,\eta)=\delta\exp\left(\frac{\beta_1\xi+\beta_2\eta}{2}\right).$$

2. 多自变量的方程

作变量代换

$$\xi_k=\xi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad (k=1,2,\cdots,n),$$

其雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\neq 0.$$

可将(3-1)式化为

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial u}{\partial\xi_i}+Cu=F,$$

其中

$$\begin{cases} A_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \dfrac{\partial \xi_j}{\partial x_l}, \\ B_i = \sum_{k=1}^{n} b_k \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} \dfrac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k \partial x_l}. \end{cases}$$

A_{ij} 的变换公式恰好是二次形，利用线性代数的知识(惯性定理)，在每一点，都可以经过一个适当的线性变换使之局部"对角化"(对于常系数方程，可实现全局对角化)，即

$$\begin{cases} A_{ij} = 0 \quad (j \neq i), \\ A_{ii} = 1, -1 \text{或} 0. \end{cases}$$

于是对应地有

所有 $A_{ii} \neq 0$，并同号，	椭圆型，
有某些 $A_{ii} = 0$，而对应的 $B_i \neq 0$，	抛物型，
有某些 $A_{ii} = 0$，而对应的 $B_i = 0$，	退化椭圆型，
所有 $A_{ii} \neq 0$，有一个与其他的反号，	双曲型，
所有 $A_{ii} \neq 0$，正号和负号都不止一个，	超双曲型.

相应的标准形式如下：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F, \qquad \text{椭圆型},$$

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=m}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F, \qquad \text{退化椭圆型},$$

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F, \qquad \text{抛物型},$$

(B_i，$i < m$ 中至少有一个小于 0，)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F, \qquad \text{双曲型},$$

$$\sum_{i}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F. \qquad \text{超双曲型}.$$

3.3 定解条件与定解问题

偏微分方程一般有无穷多个解，在求解具体问题时还需要一些定解条件. 方程与定解条件一起构成对于具体问题的完整描述，称为**定解问题**，其中单独的方程称为**泛定方程**.

1. 初始条件

研究随时间变化的问题，必须考虑某个所谓"初始"时刻($t = t_0$)的状态，即**初始条件**.

例如，研究扩散问题、热传导问题，要考虑初始时刻的浓度分布、温度分布等，

初始条件为

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=t_0}=\varphi(x,y,z).$$

在研究波动过程时,不仅要考虑初始时刻的位移,还需要考虑初始时刻的速度,初始条件为

$$\begin{cases}u(x,y,z,t)\big|_{t=t_0}=\varphi(x,y,z),\\ u_t(x,y,z,t)\big|_{t=t_0}=\psi(x,y,z).\end{cases}$$

2. 边界条件

边界条件是指偏微分方程中未知函数在所讨论区域的边界上应满足的条件,即函数或(和)其导数在区域边界上的取值.对二阶偏微分方程,通常是讨论以下3类边界条件.

(1)**第一类边界条件(狄利克雷(Dirichlet)条件)**是直接规定未知函数在边界上的值,一般的形式为

$$u\big|_{\partial\Omega}=f,$$

其中$\partial\Omega$表示区域Ω的边界;f为已知函数.例如:

1° 在弦振动问题中,考虑弦的两端在$x=0$和$x=l$固定的情形,也就是说:弦在$x=0$和$x=l$的横向位移为0,即

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0,\quad u(x,t)\big|_{x=l}=0.$$

2° 考虑区域Ω中的热传导问题,已知边界$\partial\Omega$上的温度分布为$f(x,y,z,t)$,$(x,y,z)\in\partial\Omega$,数学表达式为

$$u(x,y,z,t)\big|_{\partial\Omega}=f(x,y,z,t).$$

(2)**第二类边界条件(诺伊曼(Neumann)条件)**是规定未知函数在边界上外法向的方向导数,一般的形式为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=f,$$

其中n表示$\partial\Omega$的外法向.例如:

1° 在弦振动问题中,考虑弦的两端在$x=0$和$x=l$没有横向约束的情形,即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0.$$

2° 考虑绝热区域Ω中的热传导问题,即在边界$\partial\Omega$上无热的传递,数学表达式为

$$\left.\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0.$$

(3)**第三类边界条件(罗宾(Robin)条件)**的一般的形式为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right|_{\partial\Omega}=f.$$

例如:

1° 在弦振动问题中,考虑弦的一端在$x=l$由某个弹性体支承,也就是说,弦在$x=0$和$x=l$的横向位移为0,即

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u(x,t)\Big|_{x=l}=0,$$

其中 $\sigma=\frac{k}{T}$，k 是支承体的弹性系数，T 是弦的纵向张力.

2° 考虑区域 Ω 中的热传导问题，所讨论的物体在边界 $\partial\Omega$ 与周围的介质有热量交换，数学表达式为

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\Big|_{\partial\Omega}=\sigma u_1\Big|_{\partial\Omega},$$

其中 $\sigma=\frac{k_1}{k}$，k，k_1 分别是物质的导热系数和界面导热系数.

在定解条件中，与未知函数无关的项(一般写在等式的右边)称为自由项，自由项恒等于零的定解条件称为**齐次定解条件**，否则，称为**非齐次定解条件**.

3. 定解问题

只有初始条件，没有边界条件的定解问题称为**初值问题**或**柯西问题**. 显然初值问题一定与时间 t 有关，所以只有波动方程和热传导方程可以提初值问题，而拉普拉斯方程和泊松方程是不能提初值问题的. 初值问题的物理背景是无限空间中的波动(如交变电磁场)和热传导问题.

只有边界条件，没有初始条件的定解问题称为**边值问题**，根据给定的边界条件又分为**第一类边值问题**(**狄利克雷问题**)，**第二类边值问题**(**诺伊曼问题**)，**第三类边值问题**(**罗宾问题**)以及**混合边值问题**. 一般只对椭圆型方程提边值问题. 双曲型方程和抛物型方程的边值问题是不适定的.

既有初始条件，又有边界条件的定解问题称为**混合问题**或**初边值问题**. 显然混合问题也是与时间 t 有关的，也是只对波动方程和热传导方程可以提混合问题，而对拉普拉斯方程和泊松方程是不提混合问题的.

此外，还有带周期边界条件的周期边值问题，带斜边界条件的斜边值问题，带非线性边界条件的边值问题，以及古尔沙(Goursat)问题，非局部问题，障碍问题等等.

4 双曲型方程的常用解法

4.1 解弦自由振动问题的分离变量法

1. 分离变量法的步骤

求解有限长弦的振动问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0, & (4\text{-}1)\\ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0, & t>0, & (4\text{-}2)\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x), & 0<x<l. & (4\text{-}3)\end{cases}$$

第一步，令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入泛定方程和边界条件，有

$$\begin{cases}\dfrac{X''}{X}=\dfrac{T''}{a^2T}=\lambda,\\ X(0)=X(l)=0,\end{cases}$$

其中 λ 是待定常数. 于是，得到一个常微分方程的特征值问题

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X(0)=X(l)=0\end{cases} \tag{4-4}$$

和常微分方程

$$T''+a^2\lambda T=0. \tag{4-5}$$

第二步，解常微分方程特征值问题，得到特征值序列和特征函数序列

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots, \tag{4-6}$$

$$X_n=\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

第三步，解(4-5)式，其中 λ 取

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,$$

得到

$$T_n=C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t. \tag{4-7}$$

第四步，这时已得到 $u_n=X_nT_n$，利用叠加原理，可知

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{4-8}$$

满足方程和边界条件.

第五步，把(4-8)式代入初始条件(4-3)，利用傅里叶级数，可知

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \tag{4-9}$$

$$D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x. \tag{4-10}$$

把(4-9)式和(4-10)式代入(4-8)式就得到这个定解问题的解.

由分离变量法求得的解说明弦的振动是由不同频率的驻波迭加而成的. 其中 u_1 称为基波，u_n 称为 n 次谐波. 这些驻波的频率 ω_n 称为弦振动的固有频率. 求出特征值 λ_n 也就求得了固有频率 ω_n.

2. 一般情形的求解公式

方程(4-1)的混合边值问题的解一般为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{a\gamma_n}{l}t+D_n\sin\frac{a\gamma_n}{l}t\right)X_n(x), \tag{4-11}$$

其中

$$C_n = \frac{1}{L_n}\int_0^l \varphi(x)X_n(x)x\mathrm{d}x,$$

$$D_n = \frac{l}{a\gamma_n L_n}\int_0^l \psi(x)X_n(x)x\mathrm{d}x,$$

$$L_n = \int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x.$$

其特征值为

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{l}\right)^2, \quad n = 1,2,\cdots.$$

1° 若边界条件为(4-2)式,即

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0,$$

则

$$\gamma_n = n\pi, \quad X_n = \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

2° 若边界条件为

$$u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0,$$

则

$$\gamma_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad X_n = \sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

3° 若边界条件为

$$u\big|_{x=0} = u_x + h_2 u\big|_{x=l} = 0,$$

$\gamma_n(n = 1,2,\cdots)$取三角方程

$$\tan\gamma_n = \alpha\gamma_n$$

(其中 $\alpha = -\frac{1}{lh_2}$)的正根,则特征函数为

$$X_n = \sin\frac{\gamma_n}{l}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

4° 若边界条件为

$$u_x\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0,$$

则

$$\gamma_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad X_n = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

5° 若边界条件为

$$u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0,$$

则

$$\gamma_n = n\pi, \quad X_n = \cos\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

6° 若边界条件为

$$u_x\big|_{x=0} = u_x + h_2 u\big|_{x=l} = 0,$$

$\gamma_n(n=1,2,\cdots)$取三角方程

$$\cot\gamma_n = \alpha\gamma_n$$

(其中 $\alpha=\frac{1}{lh_2}$)的正根,则特征函数为

$$X_n = \cos\frac{\gamma_n}{l}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

7° 若边界条件为

$$u_x - h_1 u\mid_{x=0} = u\mid_{x=l}=0,$$

$\gamma_n(n=1,2,\cdots)$取三角方程

$$\tan\gamma_n = \alpha\gamma_n$$

(其中 $\alpha=-\frac{1}{lh_1}$)的正根,则特征函数为

$$X_n = \frac{\gamma_n}{lh_1}\cos\frac{\gamma_n}{l}x + \sin\frac{\gamma_n}{l}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

8° 若边界条件为

$$u_x - h_1 u\mid_{x=0} = u_x\mid_{x=l}=0,$$

$\gamma_n(n=1,2,\cdots)$取三角方程

$$\cot\gamma_n = \alpha\gamma_n$$

(其中 $\alpha=\frac{1}{lh_1}$)的正根,则特征函数为

$$X_n = \frac{\gamma_n}{lh_1}\cos\frac{\gamma_n}{l}x + \sin\frac{\gamma_n}{l}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

9° 若边界条件为

$$u_x - h_1 u\mid_{x=0} = u_x + h_2 u\mid_{x=l}=0,$$

$\gamma_n(n=1,2,\cdots)$取三角方程

$$\cot\gamma_n = \frac{1}{l(h_1+h_2)}\left(\gamma_n - h_1h_2l^2\frac{1}{\gamma_n}\right)$$

的正根,则特征函数为

$$X_n = \frac{\gamma_n}{lh_1}\cos\frac{\gamma_n}{l}x + \sin\frac{\gamma_n}{l}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

4.2 解弦强迫振动问题的方法

现在讨论弦强迫振动问题.弦强迫振动的数学模型是具有非齐次泛定方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t), & 0<x<l,t>0, \\ u\mid_{x=0} = u\mid_{x=l}=0, & t>0, \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x),u_t\mid_{t=0}=\psi(x), & 0<x<l. \end{cases} \tag{4-12}$$

利用叠加原理,将(4-12)式分解为

$$u(x,t)=U(x,t)+V(x,t),$$

其中 U 和 V 分别满足

$$\begin{cases} U_{tt}=a^2U_{xx}, & 0<x<l,t>0, \\ U\mid_{x=0}=U\mid_{x=l}=0, & t>0, \\ U\mid_{t=0}=\varphi(x),U_t\mid_{t=0}=\psi(x), & 0<x<l. \end{cases} \tag{4-13}$$

$$\begin{cases} V_{tt}=a^2V_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,t>0, \\ V\mid_{x=0}=V\mid_{x=l}=0, & t>0, \\ V\mid_{t=0}=0,V_t\mid_{t=0}=0, & 0<x<l. \end{cases} \tag{4-14}$$

(4-13)式可用4.1节中介绍的方法解.以下介绍(4-14)式的解法.

(1)**固有函数法** 在解自由振动(即齐次方程)问题时,得到一族固有值和固有函数(或者说:特征值和特征函数),即弦的固有频率和谐波,$\left\{\lambda_n=\left(\frac{\gamma_n}{l}\right)^2\right\}$和$\{X_n(x)\}$.由常微分方程的理论可知:这族函数组成区间[0,$l$]上的一个正交完备系.因此,(4-14)式的解 V 和自由项f都可按这族函数展开成傅里叶级数:

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x), \tag{4-15}$$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x), \tag{4-16}$$

将它们代入方程和初始条件,可得一列二阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} T_n''+a^2\left(\frac{\gamma_n}{l}\right)^2T_n=f_n \\ T_n(0)=0, \quad T_n'(0)=0 \end{cases} \quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{4-17}$$

利用拉普拉斯变换法或参数变易法解(4-15)式,得到

$$T_n(t)=\frac{l}{a\gamma_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{a\gamma_n(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau,$$

所以

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{a\gamma_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{a\gamma_n(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau X_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{a\gamma_n}\int_0^t\int_0^x f(\xi,\tau)X_n(\xi)\mathrm{d}\xi\sin\frac{a\gamma_n(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau X_n(x). \end{aligned} \tag{4-18}$$

(2)**齐次化原理(冲量法)** 若 $W(x,t;\tau)$是混合问题

$$\begin{cases} W_{tt}=a^2W_{xx}, & 0<x<l,t>\tau, \\ W\mid_{x=0}=W\mid_{x=l}=0, & t>\tau, \\ W\mid_{t=\tau}=0,W_t\mid_{t=\tau}=f(x,\tau), & 0<x<l \end{cases} \tag{4-19}$$

的解,则(4-14)式的解为

$$V(x,t)=\int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau.$$

事实上，根据物理学的解释，自由项 $f(x,t)$ 表示时刻 t 作用于 x 处的外力密度，它在每一时刻对弦的瞬时作用可看作是在该时刻作用于弦的冲量，根据动量原理，它使速度产生一个改变量. 把这个速度改变量看作是在时刻 t 的初始速度，它所产生的振动可由(4-19)式描述. 再根据叠加原理，外力密度 $f(x,t)$ 所产生的总效果可以看成无数个这种由冲量产生的波的叠加. 所以，齐次化原理又称为冲量法.

求解(4-19)式时，可令 $s=t-\tau$，将(4-19)式化为

$$\begin{cases} W_{ss}=a^2W_{xx}, \quad 0<x<l, s>0, \\ W|_{x=0}=W|_{x=l}=0, \quad s>0, \\ W|_{s=0}=0, W_t|_{s=0}=f(x,\tau), \quad 0<x<l. \end{cases} \tag{4-20}$$

从(4-20)式解得

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(D_n(\tau)\sin\frac{a\gamma_n}{l}(t-\tau)\right)X_n(x), \tag{4-21}$$

其中

$$D_n(\tau)=\frac{l}{a\gamma_nL_n}\int_0^l f(x,\tau)X_n(x)\mathrm{d}x,$$

$$L_n=\int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x.$$

(3)**格林函数法**　齐次化原理是把在时间上持续的外力或外源分解成许许多多瞬时力或瞬时源. 进一步发展这一观点，在空间中也把连续分布的外力或点源分解为每一点上的局部作用力或点源，即

$$f(x,t)=\int_0^t\int_0^x f(\xi,\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

以两端固定的弦强迫振动问题为例，在时刻 τ 作用于点 ξ 的局部瞬时力 $f(\xi,\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$ 所引起的振动为 $f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)$，其中的 G 是定解问题

$$\begin{cases} G_{tt}-a^2G_{xx}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau), \\ G|_{x=0}=0, G|_{x=l}=0, \\ G|_{t=0}=0, G_t|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{4-22}$$

的解，它被称为定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, t>0, \\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0, \quad t>0, \\ u|_{t=0}=0, u_t|_{t=0}=0, \quad 0<x<l \end{cases} \tag{4-23}$$

的基本解. 而问题(4-14)式的解就是所有这些 $f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)$ 的叠加，即

$$V(x,t)=\int_0^t\int_0^x f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{4-24}$$

关于 $G(x,t;\xi,\tau)$，由冲量法，可将(4-22)式转化为

$$\begin{cases} G_{tt}-a^2G_{xx}=0, \\ G|_{x=0}=0, G|_{x=l}=0, \\ G|_{t=\tau}=0, G_t|_{t=\tau}=\delta(x-\xi), \end{cases} \tag{4-25}$$

从(4-25)式中解得

$$G(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{a\gamma_n}X_n(\xi)X_n(x)\sin\frac{a\gamma_n(t-\tau)}{l} \tag{4-26}$$

将(4-26)式代入(4-24)式就可得到要求的解.

4.3 非齐次边界条件的处理

1. 一般情形

考虑具有非齐次边界条件的定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,t>0,\\ u\mid_{x=0}=\mu_1(t),u\mid_{x=l}=\mu_2(t), & t>0,\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x),u_t\mid_{t=0}=\psi(x), & 0<x<l.\end{cases}$$

可以通过函数代换将边界条件齐次化,为此令

$$u(x,t)=V(x,t)+W(x,t).$$

为了使 $V(x,t)$满足齐次边界条件,取

$$W=\frac{1}{l}(\mu_2-\mu_1)x+\mu_1.$$

经过这个代换,得到 $V(x,t)$满足的定解问题

$$\begin{cases}V_{tt}=a^2V_{xx}+f_1(x,t), & 0<x<l,t>0,\\ V|_{x=0}=V|_{x=l}=0, & t>0,\\ V|_{t=0}=\varphi_1(x),V_t|_{t=0}=\psi_1(x), & 0<x<l,\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}f_1(x,t)=f(x,t)-W_{tt}(x,t),\\ \varphi_1(x)=\varphi(x)-W(x,0),\\ \psi_1(x)=\psi(x)-W_t(x,t).\end{cases}$$

1° 当边界条件为

$$u|_{x=0}=\mu_1(t),\quad u_x|_{x=l}=\mu_2(t)$$

时,取

$$W=\mu_2x+\mu_1;$$

2° 当边界条件为

$$u|_{x=0}=\mu_1(t),\quad u_x+h_2u|_{x=l}=\mu_2(t)$$

时,取

$$W=\frac{\mu_2-\mu_1h_2}{1+lh_2}+\mu_1;$$

3° 当边界条件为

$$u_x|_{x=0}=\mu_1(t),u|_{x=l}=\mu_2(t)$$

时,取

$$W=\mu_1 x+\mu_2-l\mu_1;$$

4° 当边界条件为

$$u_x|_{x=0}=\mu_1(t),u_x|_{x=l}=\mu_2(t)$$

时,取

$$W=\frac{\mu_2-\mu_1}{2l}x^2+\mu_1 x;$$

5° 当边界条件为

$$u_x|_{x=0}=\mu_1(t),u_x+h_2u|_{x=l}=\mu_2(t)$$

时,取

$$W=\mu_1 x+\frac{\mu_2-(1+h_2l)\mu_1}{h_2};$$

6° 当边界条件为

$$u_x-h_1u|_{x=0}=\mu_1(t),u|_{x=l}=\mu_2(t)$$

时,取

$$W=\frac{\mu_1+h_1\mu_2}{1+h_1l}x+\frac{\mu_2-l\mu_1}{1+h_1l};$$

7° 当边界条件为

$$u_x-h_1u|_{x=0}=\mu_1(t),u_x|_{x=l}=\mu_2(t)$$

时,取

$$W=\mu_2 x+\frac{\mu_1-\mu_2}{h_1};$$

8° 当边界条件为

$$u_x-h_1u|_{x=0}=\mu_1(t),u_x+h_2u|_{x=l}=\mu_2(t)$$

时,取

$$W=\frac{(h_1\mu_2+h_2\mu_1)x+\mu_2-(1+h_2l)\mu_1}{h_1+h_2+h_1h_2l}.$$

2.特殊情形

对于某些特殊的定解问题,可以利用特别的代换一次将方程和边界条件都化为齐次的.以下介绍两种这样的例子.

例1 考虑定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x), & 0<x<l,t>0,\\ u|_{x=0}=A,u|_{x=l}=B,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x), & 0<x<l.\end{cases}\tag{4-27}$$

解 这个问题的特点是:方程(4-27)中的自由项$f(x)$和边界条件中的A,B都与t无关,所以可通过一次代换将方程和边界条件都化为齐次的.

令
$$u(x,t)=V(x,t)+W(x),\tag{4-28}$$

选取$W(x)$满足

$$\begin{cases} a^2 W''(x) + f(x) = 0, \\ W(0) = A, W(l) = B. \end{cases} \tag{4-29}$$

将(4-28)式和(4-29)式代入定解问题(4-27),得到

$$\begin{cases} V_{tt} = a^2 V_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, \\ V|_{x=0} = 0, \quad V|_{x=l} = 0, \\ V|_{t=0} = \varphi(x) - W(x), V_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < l. \end{cases} \tag{4-30}$$

从(4-29)式可解得

$$W(x) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^\xi f(\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi - \int_0^x\int_0^\xi f(\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\right) + \frac{B-A}{l}x + A. \tag{4-31}$$

而从(4-30)式,可知

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{4-32}$$

其中

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l(\varphi(x) - W(x))\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \\ D_n = \dfrac{2}{an\pi}\displaystyle\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x. \end{cases} \tag{4-33}$$

再把(4-32)式和(4-31)式加起来,就得到方程(4-27)的解.

例 2 考虑定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = A\sin\omega t, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l. \end{cases}$$

解 令

$$u(x,t) = V(x,t) + W(x,t).$$

其中

$$W(x,t) = A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t.$$

可一次就将此定解问题的边界条件和方程齐次化为

$$\begin{cases} V_{tt} = a^2 V_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, \\ V|_{x=0} = 0, V|_{x=l} = 0, \\ V|_{t=0} = 0, V_t|_{t=0} = -A\omega\dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}, \quad 0 < x < l. \end{cases} \tag{4-34}$$

解(4-34)式,得到

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l - A\omega\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{-2A\omega}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\left(-\frac{\sin(\omega/a+n\pi/l)x}{2(\omega/a+n\pi/l)}+\frac{\sin(\omega/a-n\pi/l)x}{2(\omega/a-n\pi/l)}\right)\Bigg|_0^l$$

$$= \frac{A\omega}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\left(\frac{\sin(\omega l/a+n\pi)}{\omega/a+n\pi/l}-\frac{\sin(\omega l/a-n\pi)}{\omega/a-n\pi/l}\right)$$

$$= (-1)^n\frac{2A\omega}{al}\cdot\frac{1}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2/l^2}.$$

所以

$$V(x,t)=\frac{2A\omega}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2/l^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$u(x,t)=\frac{2A\omega}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2/l^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}+A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t.$$

注:如果以上两例中的边界条件由第一类改为其他类型,只需将(4-32)式、(4-33)式和(4-34)式中的$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$和$\sin\frac{n\pi}{l}$分别改为相应的特征值$\frac{\gamma_n}{l}$和特征函数$X_n(x)$,求解公式仍然成立.

4.4 解无限长弦振动问题的行波法(达朗贝尔公式)

1.达朗贝尔公式

求解无限长弦的振动问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & t>0, \quad (4\text{-}35)\\ u|_{t=0}=\varphi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x). & \quad (4\text{-}36)\end{cases}$$

利用变量代换

$$\begin{cases}x=\dfrac{\xi+\eta}{2},\\ t=\dfrac{\xi-\eta}{2a},\end{cases}\quad \begin{cases}\xi=x+at,\\ \eta=x-at\end{cases}$$

可将泛定方程(4-35)化为$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.积分后,得到通解

$$u=f_1(\xi)+f_2(\eta)=f_1(x+at)+f_2(x-at), \tag{4-37}$$

其中f_1和f_2都是任意函数.

通解(4-37)式的物理意义就是说:对于一维波动问题,初始扰动总是以行波的形式向两边传播出去,行波的速度为a.所以,(4-37)式也称为行波解,这种解法又称为行波法.

再将(4-37)式代入初始条件,得到

$$\begin{cases}f_1(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\dfrac{c}{2},\\ f_2(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\dfrac{c}{2}.\end{cases} \tag{4-38}$$

再代入(4-37)式,就得到柯西问题(4-35),(4-36)的解,

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{4-39}$$

(4-39)式称为**达朗贝尔(d'Alembert)公式**

可以证明行波解是稳定的,所以柯西问题(4-35),(4-36)是适定的.

2.非齐次方程的解法

考虑强迫振动问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & t>0, & (4\text{-}40)\\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0. & & (4\text{-}41)\end{cases}$$

定理(齐次化原理)　柯西问题(4-40),(4-41)的解为

$$u(x,t)=\int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中 $W(x,t;\tau)$是

$$\begin{cases}W_{tt}=a^2W_{xx}, & t>\tau,\\ W|_{t=\tau}=0,\ W_t|_{t=\tau}=f(x,\tau)\end{cases}$$

的解.

由达朗贝尔公式

$$W(x,t;\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi.$$

于是可知:柯西问题(4-40),(4-41)的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

3.半无限长弦的自由振动

描述半无限长弦的自由振动的定解问题是

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & x>0,t>0, & (4\text{-}42)\\ u|_{x=0}=0, & t>0, & (4\text{-}43)\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ x>0. & & (4\text{-}44)\end{cases}$$

把(4-37)式代入(4-43)式,得到

$$u(0,t)=f_1(at)+f_2(-at)=0,\quad 即\quad f_2(-x)=-f_1(x).$$

代入(4-38)式,就得到定解问题(4-42),(4-43),(4-44)的解.

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & at<x,\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & at\geqslant x.\end{cases}$$

类似地,具自由端的半无限长弦的自由振动的定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & x>0,t>0,\\ u_x|_{x=0}=0, & t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ x>0.\end{cases}$$

的解是　$u(x,t)$

$$
=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & at<x,\\ \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{at+x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & at\geqslant x.\end{cases}
$$

4. 三维和二维波动方程的泊松公式

对于三维波动方程的柯西问题

$$
\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & t>0,\\ u|_{t=0}=\Phi(x,y,z),u_t|_{t=0}=\Psi(x,y,z).\end{cases}
$$

利用行波法和球面平均法，可得到三维泊松公式

$$
u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^M}\frac{\Phi}{at}\mathrm{d}S+\iint_{S_{at}^M}\frac{\Psi}{at}\mathrm{d}S\right\}
$$

$$
=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)t\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi+\right.
$$

$$
\left.\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)t\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\right\},\tag{4-45}
$$

其中 S_{at}^M是以 $M=(x,y,z)$为球心，at 为半径的球面，即

$$
S_{at}^M=\{(\xi,\eta,\zeta)\mid(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=(at)^2\}.
$$

对于二维波动方程的柯西问题

$$
\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), & t>0,\\ u|_{t=0}=\Phi(x,y),u_t|_{t=0}=\Psi(x,y).\end{cases}
$$

利用降维法，从(4-45)式可得

$$
u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iint_{D_{at}^M}\frac{\Phi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+\right.
$$

$$
\left.\iint_{D_{at}^M}\frac{\Psi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right\}
$$

$$
=\frac{1}{2\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r+\right.
$$

$$
\left.\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\Psi(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\right\},
$$

其中 D_{at}^M是以 $M=(x,y)$为圆心，at 为半径的圆盘，即

$$
D_{at}^M=\{(\xi,\eta)\mid(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=(at)^2\}.
$$

4.5　积分变换法

1. 用傅里叶变换解无限长弦的强迫振动问题

$$
\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & -\infty<x<+\infty,t>0,\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x),u_t\mid_{t=0}=\psi(x).\end{cases}\tag{4-46}
$$

对 x 作傅里叶变换.设

$$\hat{u}(\omega,t)=\mathscr{F}[u]=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-j\omega x}dx,$$

$$\hat{\varphi}(\omega)=\mathscr{F}[\varphi],\tilde{\psi}(\omega)=\mathscr{F}[\psi],$$

$$\hat{f}(\omega,t)=\mathscr{F}[f(x,t)].$$

对(4-46)式作傅里叶变换,利用微分性质,得到

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}\hat{u}(\omega,t)=-a^2\omega^2\hat{u}(\omega,t)+\hat{f}(\omega,t),\\ \hat{u}(\omega,0)=\hat{\varphi}(\omega),\dfrac{d}{dt}\hat{u}(\omega,0)=\hat{\psi}(\omega).\end{cases}\tag{4-47}$$

解(4-47).(利用参数变易法或拉普拉斯变换法)得到

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{\varphi}(\omega)\cos a\omega t+\frac{1}{a\omega}\hat{\psi}(\omega)\sin a\omega t+\frac{1}{a\omega}\int_0^t\hat{f}(\omega,\tau)\sin a\omega(t-\tau)d\tau,$$

再求傅里叶逆变换，得到(4-46) 式的解：

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}^{-1}[\hat{u}(\omega,t)]\\&=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\\&\quad\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.\end{aligned}$$

这个问题也可以通过对 t 作拉普拉斯变换来求解.

2. 用拉普拉斯变换解半无限长弦的振动问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<+\infty,t>0,\\ u\mid_{x=0}=g(t),\lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0,\quad t>0,\\ u\mid_{t=0}=0,u_t\mid_{t=0}=0,\quad 0<x<+\infty.\end{cases}\tag{4-48}$$

对(4-48)式关于 t 作拉普拉斯变换,令

$$\hat{u}(x,s)=\mathscr{L}[u]=\int_0^{+\infty}u(x,t)e^{-st}dt,$$

$$\hat{g}(s)=\mathscr{L}[g],$$

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dx^2}\hat{u}(x,s)-\dfrac{s^2}{a^2}\hat{u}(x,s)=0,\\ \hat{u}(x,s)\mid_{x=0}=\hat{g}(s),\lim\limits_{x\to+\infty}\hat{u}(x,s)=0.\end{cases}\tag{4-49}$$

从(4-49)式解得

$$\hat{u}(x,s)=\hat{g}(s)e^{-\frac{s}{a}x}.$$

利用延迟性质,求拉普拉斯逆变换,得到(4-48)式的解

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}[\hat{g}(s)e^{-\frac{s}{a}x}]=\begin{cases}g\left(t-\frac{x}{a}\right), & x\leqslant at,\\ 0, & x>at.\end{cases}$$

对于非齐次方程和非齐次初始条件的情况，可参照5.3.2小节的办法求解.

5　抛物型方程的常用解法

5.1　最大值原理

(1)最大值定理　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开区域，函数 $u(x,t)$ 在区域 $0\leqslant t\leqslant T$，$x\in\overline{\Omega}$ 上连续，在 $0<t<T$，$x\in\Omega$ 内满足

$$u_t=a^2\Delta u, \tag{5-1}$$

则 $u(x,t)$ 只在 $t=0$，$x\in\overline{\Omega}$ 或 $0\leqslant t\leqslant T$，$x\in\partial\Omega$ 上取最大值和最小值.

(2)唯一性定理　若 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 都是定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2\Delta u+f(x,t), & t>0, x\in\Omega,\\ u\mid_{\partial\Omega}=\mu(x,t), & t>0, x\in\partial\Omega,\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x), & x\in\Omega\end{cases} \tag{5-2}$$

的解，则 $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$.

若 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 都是定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2\Delta u+f(x,t), & t>0, x\in\Omega,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\mu(x,t), & t>0, x\in\Omega,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & x\in\Omega\end{cases} \tag{5-3}$$

(其中 n 表示 $\partial\Omega$ 的外法向)的解，则

$$u_1(x,t)-u_2(x,t)=\text{const}.$$

(3)稳定性定理　设 $u_1(x,t)$，$u_2(x,t)$ 分别是

$$\begin{cases}u_t=a^2\Delta u+f(x,t), & t>0, x\in\Omega,\\ u\mid_{\partial\Omega}=\mu_j(x,t), & t>0, x\in\partial\Omega,\\ u\mid_{t=0}=\varphi_j(x), & x\in\Omega,\end{cases}$$

$j=1,2$. 若 $|\mu_1(x,t)-\mu_2(x,t)|<\varepsilon$，$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\varepsilon$，$x\in\Omega$，$t>0$，则

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\varepsilon, t>0, x\in\Omega.$$

5.2　解一维热传导问题的分离变量法

1. 带第一边界条件的混合问题的求解公式

求解

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0, 0 < x < l, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, & t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & 0 < x < l. \end{cases} \tag{5-4}$$

设 $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入上式，得到

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0.$$

类似于 5.1 节的讨论，由此可解得

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left[-t\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2\right]\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi.$$

2. 其他边界条件下的求解公式

一维热传导方程混合问题的求解公式一般为

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp\left[-t\left(\frac{a\gamma_n}{l}\right)^2\right] X_n(x). \tag{5-5}$$

其中 $\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{l}\right)^2$，$X_n(x)$ 是对于不同边界条件的特征值和特征函数(参见 4.1 节).

$$C_n = \frac{1}{L_n}\int_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi,$$

$$L_n = \int_0^l X_n^2(\xi) d\xi.$$

3. 非齐次方程混合问题的固有函数法

对于非齐次方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, & t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & 0 < x < l. \end{cases} \tag{5-6}$$

令

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x).$$

(注：对第二类边界条件，从 $n=0$ 开始求和.)

代入(5-6)式可得到一列一阶 ODE 的初值问题

$$\begin{cases} T_n' + a^2\left(\frac{\gamma_n}{l}\right)^2 T_n = f_n, \\ T_n(0) = \varphi_n, \end{cases}$$

从中解得

$$T_n = \exp\left[-t\left(\frac{a\gamma_n}{l}\right)^2\right]\left(\int_0^t f_n(\tau)\exp\left[\tau\left(\frac{a\gamma_n}{l}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau + \varphi_n\right)$$

所以

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-t\left(\frac{a\gamma_n}{l}\right)^2\right]\left(\int_0^t f_n(\tau)\exp\left[\tau\left(\frac{a\gamma_n}{l}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau + \varphi_n\right)X_n(x),$$

其中

$$f_n(t) = \frac{1}{L_n}\int_0^l f(x,t)X_n(x)\mathrm{d}x,$$

$$\varphi_n = \frac{1}{L_n}\int_0^l \varphi(x)X_n(x)\mathrm{d}x.$$

对于(5-6)式 $X_n = \sin\frac{n\pi}{l}x$, $\gamma_n = n\pi$, $L_n = \frac{l}{2}$(其他边界条件下的 X_n, γ_n 和 L_n 见4.1节).

4. 非齐次边界条件的处理

非齐次边界条件的处理同4.3节.

5.3 积分变换法

1. 用傅里叶变换解无限长杆上的热传导问题

有热源的无界杆上的热传导问题,可用以下非齐次热传导方程的柯西问题描述:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) < +\infty. \end{cases} \tag{5-7}$$

因为 x 在$(-\infty,+\infty)$上取值,这个问题可对 x 作傅里叶变换,化为一个一阶ODE的柯西问题.

设

$$\widehat{u}(\omega,t) = \mathscr{F}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x,$$

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \mathscr{F}[\varphi], \widehat{f}(\omega,t) = \mathscr{F}[f].$$

对(5-7)式作傅里叶变换,利用其微分性质,得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{u}(\omega,t) = -a^2\omega^2\widehat{u}(\omega,t) + \widehat{f}(\omega,t), \\ \widehat{u}(\omega,t)|_{t=0} = \widehat{\varphi}(\omega), \end{cases} \tag{5-8}$$

从(5-8)式解得

$$\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t} + \int_0^t \widehat{f}(\omega,t)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

因为

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right),$$

利用傅里叶变换的卷积定理,有

$$u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[\widehat{u}(\omega,t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$

$$=\varphi(x)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)+$$

$$\int_0^t f(x,\tau)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi+\right.$$

$$\left.\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi\right].$$

2. 用拉普拉斯变换解半无限长杆的热传导问题

半无限长杆上的热传导问题用以下定解问题描述:

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), & x>0,t>0,\\ u|_{x=0}=g(t),\lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)<+\infty, & t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & x>0.\end{cases}\tag{5-9}$$

上述问题的两个自变量 x 和 t 都在半轴 $(0,+\infty)$ 上取值,一般利用拉普拉斯变换求解.拉普拉斯变换的微分性质涉及到所有低阶导数和函数的初值,在此问题中,缺少 $u_x(0,t)$,所以只能对 t 作拉普拉斯变换.令

$$\widehat{u}(x,s)=\mathscr{L}[u]=\int_0^{+\infty}u(x,t)e^{-st}dt,$$

$$\widehat{g}(s)=\mathscr{L}[g(t)],$$

对(5-9)式作拉普拉斯变换,得到

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dx^2}\widehat{u}(x,s)-\dfrac{s}{a^2}\widehat{u}(x,s)=-\dfrac{1}{a^2}[\varphi(x)+\widehat{f}(x,s)],\\ \widehat{u}(x,s)|_{x=0}=\widehat{g}(s), \quad \widehat{u}(x,s)|_{x\to+\infty}<+\infty.\end{cases}\tag{5-10}$$

(5-10)式中方程的通解为

$$\widehat{u}(x,s)=A\exp\left(\frac{\sqrt{s}x}{a}\right)+B\exp\left(-\frac{\sqrt{s}x}{a}\right)-$$

$$\frac{1}{a\sqrt{s}}\int_{x_0}^{x}[\varphi(\xi)+\widehat{f}(\xi,s)]\sinh\frac{\sqrt{s}}{a}(x-\xi)d\xi,\tag{5-11}$$

其中积分下限 x_0 待定.

事实上,在(5-11)式中的积分有两部分,即

$$\frac{1}{a\sqrt{s}}\int_{x_0}^{x}[\varphi(\xi)+\widehat{f}(\xi,s)]\sinh\frac{\sqrt{s}}{a}(x-\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{s}}\left[\int_{x_0}^{x}[\varphi(\xi)+\widehat{f}(\xi,s)]\exp\left(\frac{\sqrt{s}}{a}(x-\xi)\right)d\xi-\right.$$

$$\int_{x_0}^{x}[\varphi(\xi)+\widehat{f}(\xi,s)]\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}(x-\xi)\right)\mathrm{d}\xi\Big].$$

不妨设 $\mathrm{Re}\sqrt{s}>0$. 上式中第一个积分有意义,必须 $x-\xi<0$,所以积分下限 $x_0=+\infty$;第二个积分有意义,必须 $x-\xi>0$,所以积分下限 $x_0=0$. 于是

$$\widehat{u}(x,s)=A\exp\left(\frac{\sqrt{s}}{a}x\right)+B\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}x\right)-\frac{1}{2a\sqrt{s}}\Big[\int_{+\infty}^{x}[\varphi(\xi)+\widehat{f}(\xi,s)]$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}\mid x-\xi\mid\right)\cdot$$

$$\mathrm{d}\xi-\int_0^x[\varphi(\xi)+\widehat{f}(\xi,s)]\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}\mid x-\xi\mid\right)\mathrm{d}\xi\Big]$$

$$=A\exp\left(\frac{\sqrt{s}}{a}x\right)+B\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}x\right)+$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{s}}\int_0^{+\infty}[\varphi(\xi)+\widehat{f}(\xi,s)]\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}\mid x-\xi\mid\right)\mathrm{d}\xi.$$

由 $u\mid_{x\to+\infty}<+\infty$, $A=0$ 及由 $x=0$ 处的边界条件

$$B=\widehat{g}(s)-\frac{1}{2a\sqrt{s}}\int_0^{+\infty}[\varphi(\xi)+\widehat{f}(\xi,s)]\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}\xi\right)\mathrm{d}\xi.$$

于是有

$$\widehat{u}(x,s)=\widehat{g}(s)\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}x\right)+\frac{1}{2a\sqrt{s}}\int_0^{+\infty}[\varphi(\xi)+\widehat{f}(\xi,s)]\cdot$$

$$\left(\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}\mid x-\xi\mid\right)-\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}(x+\xi)\right)\right)\mathrm{d}\xi.$$

因为

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}x\right)\right]=\frac{x}{2at\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right),$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}x\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right).$$

利用拉普拉斯变换的卷积定理,有

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}[\widehat{u}(x,s)]$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right)\mathrm{d}\xi+$$

$$\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t g(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\int_0^t f(\xi,\tau)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)-\right.$$

$$\left.\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi.$$

5.4 高维热传导方程的定解问题

高维热传导方程的混合问题一般为

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(x,t), & x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n, t>0, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x,t), & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{5-12}$$

可以利用4.3节中介绍过的方程将边界条件齐次化,也可以利用固有函数法和冲量法(见4.2节)处理非齐次方程.以下考虑

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & x\in\Omega, t>0, \\ u\ |_{\partial\Omega} = 0, & t>0, \\ u\ |_{t=0} = \varphi(x). \end{cases} \tag{5-13}$$

令 $u(x,t)=U(x)T(t)$,代入(5-13)式可得到一个常微分方程

$$T' + \lambda a^2 T = 0 \tag{5-14}$$

和一个椭圆型方程的固有值问题

$$\begin{cases} \Delta U + \lambda U = 0, \\ U|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{5-15}$$

这个方程称为**亥姆霍兹方程**.

这个固有值问题也和常微分方程的固有值问题一样,存在一列非负的固有值 λ_n,和一列相应的固有函数 U_n,其中的固有函数也具有某种带权 $\rho(x)$ 的正交性,即

$$\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega}}^{n} U_n(x)U_m(x)\rho(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \begin{cases} 0, & m\neq n, \\ L_n, & m=n. \end{cases}$$

这样就可求得(5-13)式的解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n(x)\exp(-\lambda_n a^2 t),$$

其中

$$C_n = \frac{1}{L_n}\int\cdots\int_{\Omega}\varphi(x)U_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

具体地,对圆盘上的热传导问题

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy}), & x^2+y^2<R^2, t>0, \\ u\ |\ |_{x^2+y^2=R^2} = 0, \\ u\ |_{t=0} = \varphi(x,y) \end{cases} \tag{5-16}$$

作极坐标变换,即

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x}, \end{cases}$$

把(5-16)式转换成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right],\\ u\mid_{\rho=R}=0,\\ u\mid_{t=0}=\varphi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=f(\rho,\theta).\end{cases}$$

可解得

$$u(\rho,\theta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2}A_{m0}\exp\left(-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{R}\right)^2t\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}\rho}{R}\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(A_{mn}\cos n\theta+B_{mn}\sin n\theta)\exp\left(-\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{R}\right)^2t\right)\mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}\rho}{R}\right),$$

其中
$$A_{mn}=\frac{2}{\pi R^2[\mathrm{J}_{n+1}(\mu_m^{(n)})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R f(\rho,\theta)\cos n\theta\,\mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}\rho}{R}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta,$$
$$B_{mn}=\frac{2}{\pi R^2[\mathrm{J}_{n+1}(\mu_m^{(n)})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R f(\rho,\theta)\sin n\theta\,\mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}\rho}{R}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta,$$

$\mathrm{J}_n(\rho)$为 n 阶贝塞尔函数,而 $\mu_m^{(n)}$ 为 n 阶贝塞尔函数的第 m 个正零点.

6 椭圆型方程的常用解法

6.1 边值问题与极值原理

1.边值问题

椭圆型方程的物理背景是恒稳现象,与时间 t 无关,所以对于椭圆型方程不提初值问题,只提边值问题.

边值问题除了按边界条件分为3类(见3.3节)外,还可分为内问题和外问题两种.设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为有界开区域,讨论在 Ω 内部满足方程的定解问题称为**内问题**,讨论在 Ω 外部满足方程的定解问题称为**外问题**.

对于外问题,为了保证解的唯一性,还要加一个条件

$$\lim_{|x|\to+\infty}u(x)=0,$$

其中 $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.外问题的实际背景一般都满足这个条件.

2.最大值原理

令

$$\mathrm{L}u=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad x\in\Omega,$$
$$\mathrm{B}u=a\frac{\partial u}{\partial n}+b(x)u,\quad x\in\partial\Omega.$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为有界光滑的开区域;$a_{ij},b_i\in C(\overline{\Omega})$;L是 Ω 上的一致椭圆算子;a,b 有两

种取值情况,即 $a=0,b=1$,或 $a=1,b(x)\geqslant 0;b(x)\in C(\partial\Omega)$;$n$ 是$\partial\Omega$ 的外法向.

定理 1(弱极值原理)　设 $c(x)\geqslant 0$,且有界,若 $u\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$,且在 Ω 内满足

$$Lu+c(x)u\leqslant 0\quad(\geqslant 0),$$

则 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的正最大值(负最小值)必在$\partial\Omega$ 上达到.

定理 2(强极值原理)　在定理 1 的条件下,若 u 在 Ω 内达到非负最大值(非正最小值),则 u 恒常数.

定理 3　在定理 1 的条件下,设$\partial\Omega$ 具有**内切球性质**,$c(x)\not\equiv 0$.若 u 不恒为常数,在 $P\in\partial\Omega$ 达到非负最大值(非正最小值),且$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P$ 存在(n 为$\partial\Omega$ 的外法向),则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P>0\quad(<0).$$

定理 4(比较定理)　设 $c(x)\geqslant 0$,有界;$c(x)$和 $b(x)$不同时恒为零;当 Bu 中 $a=1$ 时,$\partial\Omega$ 有内切球性质.若 $u(x)$满足

$$Lu+c(x)u\geqslant 0\quad(x\in\Omega),$$
$$Bu\geqslant 0\quad(x\in\partial\Omega),$$

u 与相应的边值问题的古典解有相同的光滑性,则 $u(x)\geqslant 0(x\in\overline{\Omega})$.又若 $u(x)\not\equiv 0$,则

$$u(x)>0\quad(x\in\Omega).$$

3.最大模的估计

定理 5　设 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$是

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x)\quad(x\in\Omega),\\ u\mid_{\partial\Omega}=\varphi(x)\end{cases}\tag{6-1}$$

的解,则

$$\max_{\overline{\Omega}}|u(x)|\leqslant C\sup_{\Omega}f(x)+\sup_{\partial\Omega}\varphi(x),$$

其中 C 是仅依赖于维数 n 和Ω 的直径的常数.

定理 6　设 $c(x)\geqslant 0,b(x)\geqslant b_0>0,u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$是

$$\begin{cases}-\Delta u+c(x)u=f(x)\quad(x\in\Omega),\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+b(x)u\mid_{\partial\Omega}=\varphi(x)\end{cases}\tag{6-2}$$

的解,则

$$\max_{\overline{\Omega}}|u(x)|\leqslant C(\sup_{\Omega}f(x)+\sup_{\partial\Omega}\varphi(x)),$$

其中 C 是仅依赖于维数 n、Ω 的直径和 b_0 的常数.

6.2　格林公式及其应用

1.格林公式

设Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中具有充分光滑边界的有界区域,$u(x,y,z),v(x,y,z)\in$

$C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$. 利用奥-高公式,可以证明第一格林公式

$$\iiint_\Omega (u\Delta v)\mathrm{d}V + \iiint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)\mathrm{d}V = \oiint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S, \tag{6-3}$$

或

$$\iiint_\Omega (u\Delta v)\mathrm{d}V = \oiint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}V, \tag{6-4}$$

其中 n 表示$\partial\Omega$ 的外法向.

由(6-3)式可以证明第二格林公式

$$\iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}V = \oiint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{6-5}$$

在平面 $\mathbf{R}^2$ 上,也有相应的格林公式.

2. 调和函数的积分表达式

在(6-5)式中取 v 为拉普拉斯方程的基本解

$$v=\frac{1}{r},\quad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

对于 Ω 内的调和函数 $u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$,有

$$\oiint_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\mathrm{d}S = \begin{cases}0, & (x_0,y_0,z_0)\notin\overline{\Omega},\\ 2\pi u(x_0,y_0,z_0), & (x_0,y_0,z_0)\in\partial\Omega,\\ 4\pi u(x_0,y_0,z_0), & (x_0,y_0,z_0)\in\Omega,\end{cases} \tag{6-6}$$

故在 Ω 内有

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\oiint_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\mathrm{d}S. \tag{6-7}$$

对于 Ω 内泊松方程 $-\Delta u=f$ 的解 $u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$,则有

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\oiint_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\mathrm{d}S - \iiint_\Omega f\frac{1}{r}\mathrm{d}V. \tag{6-8}$$

在平面 $\mathbf{R}^2$ 上,取 v 为二维拉普拉斯方程的基本解

$$v=\ln\frac{1}{r},\quad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

可得到二维的泊松公式

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_C\left(\frac{\partial u}{\partial n}\ln\frac{1}{r} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right)\mathrm{d}l - \frac{1}{2\pi}\iint_D \Delta u\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}S \tag{6-9}$$

和二维调和函数的积分表达式

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_C\left(\frac{\partial u}{\partial n}\ln\frac{1}{r} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right)\mathrm{d}l, \tag{6-10}$$

其中 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界区域,其边界 C 充分光滑,n 为 C 的外法向.

3. 二维和三维边值问题的适定性

在第二格林公式中,取 $v\equiv1$,则有如下定理:

定理 7 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$,且 $\Delta u=0$,则

$$\oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = 0.$$

定理 8(平均值公式) 记 S_r 是包含在 Ω 内的一个球面，以 (x_0,y_0,z_0) 为心，r 为半径.若 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$，满足 $\Delta u=0$，则

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{S_r}u\mathrm{d}S. \tag{6-11}$$

定理 9 拉普拉斯方程的狄利克雷内(外)问题的解如果存在，必是唯一的，而且连续依赖于给定的边值条件.

定理 10 拉普拉斯方程的诺伊曼问题

$$\begin{cases}-\Delta u = 0, & (x,y,z)\in(\text{或}\,\overline{\in})\,\Omega,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x,y,z)\end{cases} \tag{6-12}$$

有解的充分必要条件是

$$\oiint_{\partial\Omega}\varphi(x,y,z)\mathrm{d}S = 0.$$

诺伊曼内问题的解一定不是唯一的，任何两个解之间仅相差一个常数.而诺伊曼外问题的解是唯一的.

6.3 格林函数

称定解问题

$$\begin{cases}-\Delta_{(x,y,z)}G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta),\\ G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\mid_{(x,y,z)\in\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{6-13}$$

的解为狄利克雷问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega,\\ u\mid_{\partial\Omega}=\varphi(x,y,z)\end{cases} \tag{6-14}$$

的**格林函数**.把格林函数 G 代入(6-5)式就得到求解(6-14)式的**积分公式**：

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \iiint_{\Omega}Gf\mathrm{d}V - \oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n}\varphi\mathrm{d}S. \tag{6-15}$$

对于一般区域 Ω，格林函数不容易求得.利用镜像法，可以求得半空间和球体的格林函数.

(1) 当 Ω 为上半空间 $z>0$ 时，(6－14)式的格林函数为

$$G=\frac{1}{4\pi}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\Bigg]. \tag{6-16}$$

所以，在上半空间中，(6-14)式的解的积分公式为

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}z\iint_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)\Bigg[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}-$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$

$$\frac{\zeta}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6-17}$$

(2)当 Ω 为球体 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}<R$ 时,(6-14)式的格林函数为

$$G=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{-1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}}+\frac{R}{\sqrt{\rho^2\rho_0^2-2R^2\rho\rho_0\cos\gamma+R^4}}\right], \tag{6-18}$$

其中

$$\rho_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\cos\gamma=\frac{(x\xi+y\eta+z\zeta)}{(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2})}.$$

所以,在球体 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}<R$ 内,(6-14)式的解的积分公式为

$$u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^R\rho^2\mathrm{d}\rho\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\theta,\varphi)\left[\frac{R}{\sqrt{\rho^2\rho_0^2-2R^2\rho\rho_0\cos\gamma+R^4}}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho\rho_0\cos\gamma}}\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi-$$

$$\frac{R}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta,\varphi)\frac{(R^2-\rho_0^2)\sin\theta}{(R^2-2R\rho_0\cos\gamma+\rho_0^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \tag{6-19}$$

其中

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0). \tag{6-20}$$

(3)有限区域上的诺伊曼问题一般不存在格林函数,即当 Ω 有界时,方程

$$\begin{cases}-\Delta G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta),\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{6-21}$$

一般无解.从物理意义来看,有热源而边界绝热的物体,不可能为恒稳态.但当 Ω 为上半空间时,格林函数

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\right] \tag{6-22}$$

满足(6-21)式,这时,诺伊曼问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,y,z),\quad z>0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=\varphi(x,y)\end{cases} \tag{6-23}$$

的解有如下积分公式:

$$u(\xi,\eta,\zeta)=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}z\iint_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$
$$\frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6-24}$$

(4)二维泊松方程在上半平面上的狄利克雷问题

$$\begin{cases}-(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y), & y>0,\\ u|_{y=0}=\varphi(x)\end{cases} \tag{6-25}$$

的格林函数为

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}}. \tag{6-26}$$

(6-25)式的积分公式为

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\ln\sqrt{\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}}\mathrm{d}x+$$
$$\frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\frac{1}{(x-\xi)^2+\eta^2}\mathrm{d}x. \tag{6-27}$$

(5)二维泊松方程在圆域内的狄利克雷问题

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)-\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=f(\rho,\theta), & \rho<R,\\ u|_{\rho=R}=\varphi(\theta)\end{cases} \tag{6-28}$$

的格林函数为

$$G(\rho,\theta;\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left(R\sqrt{\frac{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)}{\rho_0^2\rho^2+R^4-2\rho_0\rho R^2\cos(\theta-\theta_0)}}\right), \tag{6-29}$$

积分公式为

$$u(\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}f(\rho,\theta)\ln\left(R\sqrt{\frac{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)}{\rho_0^2\rho^2+R^4-2\rho_0\rho R^2\cos(\theta-\theta_0)}}\right)\mathrm{d}\theta-$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\frac{R^2-\rho_0^2}{R^4+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}\mathrm{d}\theta. \tag{6-30}$$

6.4 分离变量法

1.圆域内的二维拉普拉斯方程

(1)考虑狄利克雷问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, & x^2+y^2<\rho_0,\\ u|_{x^2+y^2=\rho_0^2}=g(x,y).\end{cases} \tag{6-31}$$

狄利克雷问题经极坐标变换,有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, & \rho<\rho_0,\\ u|_{\rho=\rho_0}=\varphi(\theta),\end{cases}\tag{6-32}$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$, $\varphi(\theta)=g(\rho_0\cos\theta,\rho_0\sin\theta)$.

对于(6-32)式,我们有两个**自然定解条件**:

有界性条件

$$|u(0,\theta)|<+\infty;\tag{6-33}$$

周期性条件

$$u(\rho,\theta+2\pi)=u(\rho,\theta).\tag{6-34}$$

令 $u(\rho,\theta)=R(\rho)\Theta(\theta)$,则有

$$\begin{cases}\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0,\\ \Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta).\end{cases}\tag{6-35}$$

$$\begin{cases}\rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0,\\ |R(0)|<+\infty.\end{cases}\tag{6-36}$$

解固有值问题(6-35),得到

$$\begin{cases}\lambda=0,1^2,2^2,\cdots,n^2,\cdots,\\ \Theta_n=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta.\end{cases}$$

解(6-36)式得到 $R_n=\rho^n$. 由叠加原理,有

$$u(\rho,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\rho^n,\tag{6-37}$$

其中

$$A_n=\frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,\quad n=0,1,\cdots,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta,\quad n=1,2,\cdots.$$

(2)圆域内的诺伊曼问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, & \rho<\rho_0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=\rho_0}=\varphi(\theta)\end{cases}\tag{6-38}$$

的解形式上仍为(6-37)式,但其中 A_0 为任意常数,

$$A_n=\frac{1}{n\pi\rho_0^{n-1}}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$B_n=\frac{1}{n\pi\rho_0^{n-1}}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta,\quad n=1,2,\cdots.$$

(3)圆域内罗宾问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, & \rho<\rho_0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\Big|_{\rho=\rho_0}=\varphi(\theta)\end{cases}\tag{6-39}$$

的解形式上仍为(6-37)式,但其中

$$A_0=\frac{1}{h\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$A_n=\frac{1}{(n+h\rho_0)\pi\rho_0^{n-1}}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$B_n=\frac{1}{(n+h\rho_0)\pi\rho_0^{n-1}}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta,\quad n=1,2,\cdots.$$

(4)环域内狄利克雷问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0,\rho_1<\rho<\rho_2,\\ u\Big|_{\rho=\rho_1}=\varphi_1(\theta),u\Big|_{\rho=\rho_2}=\varphi_2(\theta)\end{cases}\tag{6-40}$$

的解为

$$u(\rho,\theta)=\frac{A_0}{2}+\frac{C_0}{2}\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}[(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\rho^n+(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)\rho^{-n}],\tag{6-41}$$

其中

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{-1}{\pi(\ln\rho_1-\ln\rho_2)}\displaystyle\int_0^{2\pi}[\varphi_1(\theta)\ln\rho_2-\varphi_2(\theta)\ln\rho_1]\mathrm{d}\theta,\\ C_0=\dfrac{1}{\pi(\ln\rho_1-\ln\rho_2)}\displaystyle\int_0^{2\pi}[\varphi_1(\theta)-\varphi_2(\theta)]\mathrm{d}\theta,\\ A_n=\dfrac{1}{\pi(\rho_1^{2n}-\rho_2^{2n})}\displaystyle\int_0^{2\pi}[\rho_1^n\varphi_1(\theta)-\rho_2^n\varphi_2(\theta)]\cos n\theta\mathrm{d}\theta,\\ B_n=\dfrac{1}{\pi(\rho_1^{2n}-\rho_2^{2n})}\displaystyle\int_0^{2\pi}[\rho_1^n\varphi_1(\theta)-\rho_2^n\varphi_2(\theta)]\sin n\theta\mathrm{d}\theta;\\ C_n=\dfrac{1}{\pi(\rho_1^{-2n}-\rho_2^{-2n})}\displaystyle\int_0^{2\pi}[\rho_1^{-n}\varphi_1(\theta)-\rho_2^{-n}\varphi_2(\theta)]\cos n\theta\mathrm{d}\theta,\\ D_n=\dfrac{1}{\pi(\rho_1^{-2n}-\rho_2^{-2n})}\displaystyle\int_0^{2\pi}[\rho_1^{-n}\varphi_1(\theta)-\rho_2^{-n}\varphi_2(\theta)]\sin n\theta\mathrm{d}\theta.\end{cases}\tag{6-42}$$

(5)环域内诺伊曼问题,即(6-40)式的方程带边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\rho=\rho_1}=\varphi_1(\theta),\quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\rho=\rho_2}=\varphi_1(\theta)\tag{6-43}$$

的解形式上仍为(6-41)式,其中 A_0 为任意常数,

$$C_0=\frac{\rho_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_1(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\rho_2}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_2(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

(由诺伊曼问题有解的必要条件可知，$\rho_1\int_0^{2\pi}\varphi_1(\theta)\mathrm{d}\theta = \rho_2\int_0^{2\pi}\varphi_2(\theta)\mathrm{d}\theta$.)

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{1}{n\pi(\rho_1^{2n}-\rho_2^{2n})}\displaystyle\int_0^{2\pi}[\rho_1^{n+1}\varphi_1(\theta)-\rho_2^{n+1}\varphi_2(\theta)]\cos n\theta\mathrm{d}\theta, \\ B_n = \dfrac{1}{n\pi(\rho_1^{2n}-\rho_2^{2n})}\displaystyle\int_0^{2\pi}[\rho_1^{n+1}\varphi_1(\theta)-\rho_2^{n+1}\varphi_2(\theta)]\sin n\theta\mathrm{d}\theta, \\ C_n = \dfrac{-1}{n\pi(\rho_1^{-2n}-\rho_2^{-2n})}\displaystyle\int_0^{2\pi}[\rho_1^{-n+1}\varphi_1(\theta)-\rho_2^{-n+1}\varphi_2(\theta)]\cos n\theta\mathrm{d}\theta, \\ D_n = \dfrac{-1}{n\pi(\rho_1^{-2n}-\rho_2^{-2n})}\displaystyle\int_0^{2\pi}[\rho_1^{-n+1}\varphi_1(\theta)-\rho_2^{-n+1}\varphi_2(\theta)]\sin n\theta\mathrm{d}\theta. \end{cases} \tag{6-44}$$

(6)扇形域内的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, \quad \rho_1<\rho<\rho_2, 0<\theta<\alpha, \\ u|_{\rho=\rho_1}=\varphi_1(\theta), u|_{\rho=\rho_2}=\varphi_2(\theta), \quad 0<\theta<\alpha, \\ u|_{\theta=0}=0, u|_{\theta=\alpha}=0, \quad \rho_1<\rho<\rho_2. \end{cases} \tag{6-45}$$

其中 $\varphi_1(0)=\varphi_1(\alpha)=\varphi_2(0)=\varphi_2(\alpha)=0$.

注意：如果 $u|_{\theta=0}$和 $u|_{\theta=\alpha}$不等于0，可利用4.3节中的方法把它化为齐次条件.但不能把 $u|_{\rho=\rho_1}$和 $u|_{\rho=\rho_2}$化为齐次条件.

(6-45)式的解为

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_n\rho^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta. \tag{6-46}$$

当 $\rho_1=0$ 时，

$$\begin{cases} A_n=\dfrac{2}{\alpha}\rho_2^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\displaystyle\int_0^{\alpha}\varphi_2(\theta)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\mathrm{d}\theta, \\ B_n=0, \end{cases} \quad n=1,2,\cdots. \tag{6-47}$$

(这时必有 $\varphi_1(\theta)\equiv 0$).

当 $\rho_1>0$ 时，

$$\begin{cases} A_n=\dfrac{2}{\alpha\left(\rho_1^{\frac{2n\pi}{\alpha}}-\rho_2^{\frac{2n\pi}{\alpha}}\right)}\displaystyle\int_0^{\alpha}\left[\rho_1^{\frac{n\pi}{\alpha}}\varphi_1(\theta)-\rho_2^{\frac{n\pi}{\alpha}}\varphi_2(\theta)\right]\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\mathrm{d}\theta, \\ B_n=\dfrac{2}{\alpha\left(\rho_1^{-\frac{2n\pi}{\alpha}}-\rho_2^{-\frac{2n\pi}{\alpha}}\right)}\displaystyle\int_0^{\alpha}\left[\rho_1^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\varphi_1(\theta)-\rho_2^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\varphi_2(\theta)\right]\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\mathrm{d}\theta. \end{cases} \tag{6-48}$$

(7)圆柱形区域内的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, 0\leqslant\rho<\rho_0, 0\leqslant\theta<2\pi, z_1<z<z_2, \\ u|_{\rho=\rho_0}=0, 0\leqslant\theta<2\pi, z_1<z<z_2, \\ u|_{z=z_1}=\varphi_1(\rho,\theta), u|_{z=z_2}=\varphi_2(\rho,\theta), 0\leqslant\rho<\rho_0, 0\leqslant\theta<2\pi. \end{cases} \tag{6-49}$$

将 $u=P(\rho)\Theta(\theta)Z(z)$代入(6-49)式的前两式,再考虑到自然边界条件

$$|u|<+\infty \text{ 和 } \Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta),$$

就可将(6-49)式分解为两个常微分方程的固有值问题和一个常微分方程:

$$\begin{cases}\Theta''+\mu\Theta=0,\\ \Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta),\end{cases} \tag{6-50}$$

$$\begin{cases}\rho^2P''+\rho P'+(\lambda\rho^2-\mu)P=0,\\ P(\rho_0)=0,|P(0)|<+\infty,\end{cases} \tag{6-51}$$

和

$$Z''-\lambda Z=0. \tag{6-52}$$

由(6-50)式解得

$$\mu=n^2,\quad \Theta_n=A_n'\cos n\theta+B_n'\sin n\theta,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{6-53}$$

(6-51)式是一个 n 阶贝塞尔方程的固有值问题,从中解得

$$\lambda_{nm}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\right)^2;P_{nm}(\rho)=\mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right),\quad n=0,1,2,\cdots,\quad m=1,2,\cdots, \tag{6-54}$$

其中 $\mathrm{J}_n(\rho)$是 n 阶贝塞尔函数,$\mu_m^{(n)}$ 是 n 阶贝塞尔函数的第 m 个正零点.

而(6-52)式的通解为

$$Z(z)=Ce^{\sqrt{\lambda}z}+De^{-\sqrt{\lambda}z}. \tag{6-55}$$

根据叠加原理,有

$$\begin{aligned}u=&\sum_{n=0}^{\infty}(A_n'\cos n\theta+B_n'\sin n\theta)\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)\cdot\\ &\left(C_{nm}'\exp\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z\right)+D_{nm}'\exp\left(-\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z\right)\right)\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(A_{nm}\exp\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z\right)+C_{nm}\exp\left(-\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z\right)\right)\cos n\theta+\right.\\ &\left.\left(B_{nm}\exp\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z\right)+D_{nm}\exp\left(-\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z\right)\right)\sin n\theta\right]\mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right),\end{aligned} \tag{6-56}$$

其中

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix}A_{nm}\\B_{nm}\end{Bmatrix}=&M_{nm}\int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi}\left[\exp\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z_1\right)\varphi_1(\rho,\theta)-\right.\\ &\left.\exp\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z_2\right)\varphi_2(\rho,\theta)\right]\rho\mathrm{J}_n\left\{\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right\}\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho,\\ \begin{Bmatrix}C_{nm}\\D_{nm}\end{Bmatrix}=&N_{nm}\int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi}\left[\exp\left(-\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z_1\right)\varphi_1(\rho,\theta)-\right.\\ &\left.\exp\left(-\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z_2\right)\varphi_2(\rho,\theta)\right]\rho\mathrm{J}_n\left\{\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right\}\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho,\end{aligned}$$

$$M_{nm}=2(\rho_0^2\mathrm{J}_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}))^{-1}\pi^{-1}\left(\exp\left(2\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z_1\right)-\exp\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z_2\right)\right)^{-1}, \tag{6-57}$$

$$N_{nm}=2(\rho_0^2 J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}))^{-1}\pi^{-1}\left(\exp\left(-2\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z_1\right)-\exp\left(-2\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}z_2\right)\right)^{-1}.\tag{6-58}$$

注意：$B_{0m}=D_{0m}=0,m=1,2,\cdots$.

如果边界条件中的 φ_1 和 φ_2 与 θ 无关，即

$$u|_{z=z_1}=\varphi_1(\rho),$$
$$u|_{z=z_2}=\varphi_2(\rho),$$

则

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\exp\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}z\right)+C_m\exp\left(-\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}z\right)\right)J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right),\tag{6-59}$$

其中

$$\begin{Bmatrix}A_m\\C_m\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}M_m\\N_m\end{Bmatrix}\int_0^{\rho_0}\left[\exp\left(\{\pm\}\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}z_1\right)\varphi_1(\rho)-\exp\left(\{\pm\}\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}z_2\right)\varphi_2(\rho)\right]\rho J_0\left\{\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right\}d\rho,\tag{6-60}$$

$$\begin{Bmatrix}M_m\\N_m\end{Bmatrix}=2\rho_0^{-2}J_1^{-2}(\mu_m^{(0)})\left(\exp\left(\{\pm\}2\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}z_1\right)-\exp\left(\{\pm\}2\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}z_2\right)\right)^{-1}.\tag{6-61}$$

(8)圆柱形区域内径向对称的诺伊曼问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, & 0\leqslant\rho<\rho_0,z_1<z<z_2,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}=0, & z_1<z<z_2,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=z_1}=\varphi_1(\rho),\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=z_2}=\varphi_2(\rho), & 0\leqslant\rho<\rho_0.\end{cases}\tag{6-62}$$

根据诺伊曼问题有解的充要条件，有

$$\int_0^{\rho_0}[\varphi_1(\rho)-\varphi_2(\rho)]d\rho=0.$$

令 $u(\rho,z)=P(\rho)Z(z)$. Z 满足(6-55)式，而 P 满足0阶贝塞尔方程的诺伊曼问题

$$\begin{cases}\rho^2P''+\rho P'+\lambda\rho^2P=0,\\ P'(\rho_0)=0,|P(0)|<+\infty.\end{cases}\tag{6-63}$$

解这个固有值问题，得到

$$\lambda_m=\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\right)^2,P_m(\rho)=J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right),\quad m=1,2,\cdots.\tag{6-64}$$

由叠加原理，有

$$u(\rho,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\exp\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}z\right)+C_m\exp\left(-\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}z\right)\right)J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right),\tag{6-65}$$

其中

$$\begin{cases} A_m = M_m\int_0^{\rho_0}\left[\exp\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}z_1\right)\varphi_1(\rho) - \exp\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}z_2\right)\varphi_2(\rho)\right]\rho J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right)d\rho, \\ C_m = N_m\int_0^{\rho_0}\left[\exp\left(-\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}z_1\right)\varphi_1(\rho) - \exp\left(-\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}z_2\right)\varphi_2(\rho)\right]\rho J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right)d\rho, \\ M_m = 2(\mu_m^{(1)}\rho_0 J^2(\mu_m^{(1)}))^{-1}\exp\left(2\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}z_1\right) - \exp\left(2\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}z_2\right)^{-1}, \\ N_m = -2(\mu_m^{(1)}\rho_0 J^2(\mu_m^{(1)}))^{-1}\exp\left(-2\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}z_1\right) - \exp\left(-2\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}z_2\right)^{-1}. \end{cases} \tag{6-66}$$

(9)球域内的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \\ u|_{\rho=\rho_0} = \varphi(\theta,\varphi). \end{cases} \tag{6-67}$$

令

$$u(\rho,\theta,\varphi) = P(\rho)\Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

代入方程(6-67),再考虑到自然边界条件

$$|u| < +\infty \text{和 } u(\rho,\theta,\varphi+2\pi) = u(\rho,\theta,\varphi),$$

得到

$$\begin{cases} \rho^2 P'' + 2\rho P' - \lambda P = 0, \\ |P(0)| < +\infty, \end{cases} \tag{6-68}$$

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases} \tag{6-69}$$

$$\begin{cases} \Theta'' + \cot\theta\Theta' + (\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta})\Theta = 0, \\ |\Theta| < +\infty. \end{cases} \tag{6-70}$$

由(6-69)式解得

$$\mu_m = m^2, \quad \Phi_m = A_m'\cos m\varphi + B_m'\sin m\varphi, \quad m = 0,1,2,\cdots. \tag{6-71}$$

对于(6-70)式,令 $x = \cos\theta$, $Y(x) = \Theta(\theta)$,则有

$$\begin{cases} (1-x^2)Y'' - 2xY' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)Y = 0, \quad |x| < 1, \\ |Y(\pm 1)| < +\infty, \end{cases} \tag{6-72}$$

这是连带的勒让德方程,从中解得

$$\begin{cases} \lambda_n = n(n+1), \\ Y(x) = P_n^m(x) = (1-x^2)\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \quad (m \leq n, |x| \leq 1). \end{cases}$$

其中 P_n 是 n 次勒让德多项式,而 $P_n^m(x)$为 n 次 m 阶连带的勒让德多项式.于是

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\cos\theta).$$

将 $\lambda = n(n+1)$代入(6-68)式,解得

$$P(\rho)=\rho^n.$$

于是,由叠加原理,有

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\rho^n, \tag{6-73}$$

其中

$$\begin{Bmatrix}A_{nm}\\B_{nm}\end{Bmatrix}=\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi\delta_m\rho_0^n(n+m)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta,\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\\sin m\varphi\end{Bmatrix}\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

$$\delta_m=\begin{cases}2 & (m=0),\\1 & (m\neq 0),\end{cases}$$

$$B_{n0}=0,$$

$$n=0,1,2,\cdots,\quad m=0,1,2,\cdots,n.$$

(10)球域内的诺伊曼问题

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=\rho_0}=\varphi(\theta,\varphi)\end{cases} \tag{6-74}$$

的解仍为(6-73)式,而其中的 A_{00}为任意常数,

$$B_{n0}=0,$$

$$\begin{Bmatrix}A_{nm}\\B_{nm}\end{Bmatrix}=\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi n\rho_0^{n-1}(n+m)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta,\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\\sin m\varphi\end{Bmatrix}\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

$$n=1,2,\cdots,\quad m=0,1,2,\cdots,n.$$

6.5 保角变换法

利用格林函数可以得到求解拉普拉斯方程和泊松方程的积分公式.但是除了上半空间和球体外,一般区域上的格林函数不容易求解.对于平面上的问题,可以利用复变函数论中的**保角变换**把某些区域变成上半平面或单位圆,再利用6.3节中的积分公式(6-27),(6-30)求解.

考虑平面区域 D 上的狄利克雷问题.把 D 上的坐标写成复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的形式,如果存在保角变换 $\zeta=g(z)$,即

$$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta,$$

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y), \tag{6-75}$$

把区域 D 变成 G,则根据解析函数的性质

$$u_{xx}+u_{yy}=|\zeta'(z)|^2(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}),$$

即在保角变换下,拉普拉斯方程不变,泊松方程只有自由项有变化.这样,用保角变换把区域 D 变成上半平面或单位圆,把 D 上的边值问题变成(6-25)问题或(6-28)问题,就可利用积分公式(6-27)或(6-30)求解了.

(1)考虑方程

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=f(x,y), & x>0,y>0, \\ u|_{y=0}=\varphi_1(x), & x>0, \\ u|_{x=0}=\varphi_2(y), & y>0, \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}u(x,y)=0, \end{cases} \tag{6-76}$$

其中 $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$. 作保角变换

$$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta=z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}.$$

即

$$\xi=x^2-y^2,\ \eta=2xy, \tag{6-77}$$

或

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}},\quad y=\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}. \tag{6-78}$$

把第一象限变成了上半平面,正 x 轴变成了正 ξ 轴,正 y 轴变成了负 ξ 轴(见图 6-1),(6-76)式变成了

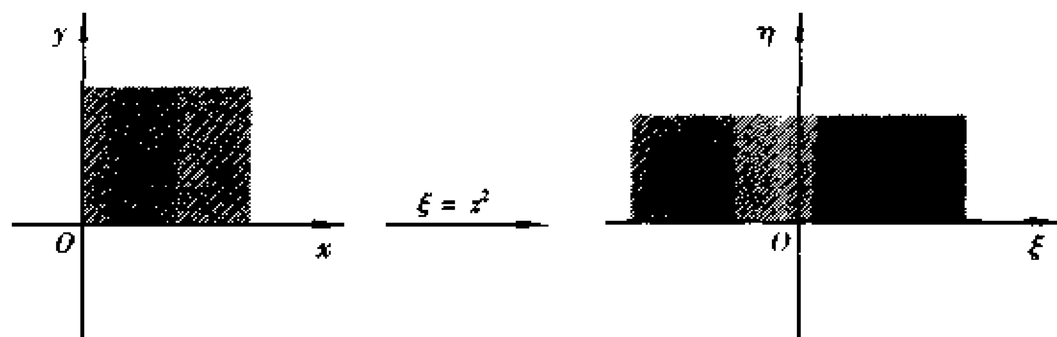


图 6-1

$$\begin{cases} u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}f\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}},\sqrt{\dfrac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}\right), & \eta>0, \\ u\big|_{\substack{\xi>0\\ \eta=0}}=\varphi_1(\sqrt{\xi}), \\ u\big|_{\substack{\xi<0\\ \eta=0}}=\varphi_2\sqrt{-\xi}), \\ \lim\limits_{\xi^2+\eta^2\to\infty}u(\xi,\eta)=0. \end{cases} \tag{6-79}$$

再利用积分公式(6-27),得

$$u(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\cdot$$

$$f\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}\right)\cdot$$

$$\ln\sqrt{\frac{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}{(\xi-\xi_0)^2+(\eta+\eta_0)^2}}\mathrm{d}\xi+$$

$$\frac{\eta_0}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi_1(\sqrt{\xi})}{(\xi-\xi_0)^2+\eta_0^2}\mathrm{d}\xi+$$

$$\frac{\eta_0}{\pi}\int_{-\infty}^0\frac{\varphi_2(-\sqrt{\xi})}{(\xi-\xi_0)^2+\eta_0^2}\mathrm{d}\xi \tag{6-80}$$

利用 $\xi_0=x^2-y^2,\eta_0=2xy$，代入(6-80)式，就得到(6-76)式的解.

根据黎曼映射定理，对于平面上的单连通区域必存在保角变换将此单连通区域变成上半平面或单位圆.

7　柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理、赫尔姆格林定理及偏微分方程的适定性

7.1　柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理及赫尔姆格林定理

1. 柯瓦列夫斯卡娅(Kovalevsky)型方程组

称下列形式的方程组为柯瓦列夫斯卡娅型方程组

$$\frac{\partial^{m_i}u_i}{\partial t^{m_i}}=f_i\left(t;x;u_1,u_2,\cdots,u_N,\cdots;\frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\cdots\right)$$

$$(i,j=1,2,\cdots,N;k_0+k_1+\cdots+k_n=k\leqslant m_i,k_0<m_i), \tag{7-1}$$

其中方程的个数等于未知函数的个数，自变量$(t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$，在每一个方程中，函数 u_i 有关于 t 的最高阶导数$\frac{\partial^{m_i}u_i}{\partial t^{m_i}}$，并且可以显式地解出来.

2. 柯西-柯瓦列夫斯卡娅(Cauchy-Kovalevsky)定理

对于方程组(7-1)，取定解条件为 $t=t_0$ 时，

$$\frac{\partial^j u_i}{\partial t^j}=\varphi_i^{(j)}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad 0\leqslant j\leqslant m_i-1, \tag{7-2}$$

则柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理如下：

如果所有函数 $\varphi_i^{(j)}$ 在某点 $x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的邻域内解析，又所有函数 f_i 在相应点$(t_0,x^0,u^0,\cdots,(\partial^k u)^0,\cdots)$的邻域内解析，那么柯西问题(7-1)、(7-2)在(t_0,x^0)的某个邻域内有唯一的解析解存在.

3. 赫尔姆格林(Holmgren)定理

柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理是偏微分方程理论中一个重要而且相当一般性的存在性定理，它表明当右端函数为解析的柯瓦列夫斯卡娅型方程组时在解析的初始条件下，其柯西问题的解在解析函数类中是存在且唯一的.但是对于同样的初始值是否还有其他非解析的解存在呢？以下赫尔姆格林的唯一性定理正好回答了这类问题.

赫尔姆格林定理　设在原点的邻域中给定了一个具有解析系数的一阶线性方

程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i(t,\boldsymbol{x})\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x_i}+\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}),\tag{7-3}$$

考虑它满足 C^1 初始条件

$$\boldsymbol{U}|_{t=0}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\tag{7-4}$$

的柯西问题,则存在原点的某个邻域,在其中此柯西问题的 C^1 解是唯一的.

这里 C^1 表示函数本身连同其一阶偏导数均为连续的函数类,$(t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}$ 为 $N\times N$ 矩阵,$\boldsymbol{U},\boldsymbol{F},\boldsymbol{\Phi}$ 为 N 维向量函数.

赫尔姆格林定理表明具有解析系数的方程的柯西问题不但在解析函数类中而且在足够光滑的函数类中解也是唯一的.

7.2 偏微分方程的适定性

1. 适定性概念

偏微分方程的定解问题的解的存在性和唯一性是偏微分方程理论中的两个基本问题.除此之外,定解问题的稳定性在偏微分方程理论中也是非常重要的.

先来看一个例子,考虑拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\tag{7-5}$$

满足初始条件的柯西问题:

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\frac{1}{n^k}\sin nx.\tag{7-6}$$

容易验证这个问题的解为

$$u_n(x,y)=\frac{1}{n^{k+1}}\sin nx\sinh ny.\tag{7-7}$$

由柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理知这个解析解是唯一的.因为 $\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)\right|\leqslant\frac{1}{n^k}$,故当 n 充分大时,u 及其导数在 $y=0$ 时的值可以任意地小,但是根据 $\sinh ny$ 的性质知,n 充分大时,不管 y 怎么小,u 都可以取到很大的值.

这个例子说明,对拉普拉斯方程(7-5)的初值问题,初始条件的微小误差将会引起解的很大改变,而方程(7-5)同其他许多偏微分方程一样,往往是一些物理规律的数学表示形式,定解条件就是某种物理现象存在的条件,它的获得往往需要通过测量或数值计算得到,故很可能带有某种误差.由于初始条件的微小误差会引起解的很大改变,那么即使我们知道了定解问题的解是存在唯一的,甚至已经显式地得到了这个解,仍然很难相信这个解能真实地反映所考察的物理现象.

以上事实促使我们引入稳定性的概念.如果一个偏微分方程(组),它的某个定解问题存在唯一的解,而且在定解条件中原始数据发生微小变化时,解也仅作微小的变化,这时称该定解问题为稳定的.如果这个定解问题满足解的存在、唯一和稳定这 3 个条件,则称一个偏微分方程(组)的定解问题为适定的.

2. 不适定定解问题的例子

偏微分方程中许多重要的定解问题是适定的，例如，波动方程的初值问题、混合问题，热传导方程的初值问题、混合问题，拉普拉斯方程的狄利克雷问题和诺伊曼问题等等.关于它们适定性的确切意义及其证明在一般数学物理方程的书上均有详细讨论，这里仅列举一些不适定定解问题的例子，而在这些例子中不适定性并不是一眼就能看出的.

例1　双曲型方程的狄利克雷问题.

在区域$|x|+a|t|\leqslant 1$中考虑弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7-8}$$

的狄利克雷问题，其边界条件为已知边界$|x|+a|t|=1$上的函数值.

作自变量变换$\xi=x-at,\eta=x+at$，则方程(7-8)变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0, \tag{7-9}$$

而原区域变换成$|\xi|\leqslant 1,|\eta|\leqslant 1$，边界变换成$\xi=\pm 1,\eta=\pm 1$.原来的边界条件相应地变为

$$u(\xi,1)=f_1(\xi),\quad u(\xi,-1)=f_2(\xi),\quad -1\leqslant\xi\leqslant 1,$$
$$u(1,\eta)=f_3(\eta),\quad u(-1,\eta)=f_4(\eta),\quad -1\leqslant\eta\leqslant 1.$$

由于方程(7-9)的通解为

$$u=F(\xi)+G(\eta),$$

因此在边界上应当成立

$$\begin{aligned}&F(\xi)+G(1)=f_1(\xi),\quad F(\xi)+G(-1)=f_2(\xi),\\&F(1)+G(\eta)=f_3(\eta),\quad F(-1)+G(\eta)=f_4(\eta).\end{aligned} \tag{7-10}$$

显然，(7-10)式表明$f_1(\xi)$与$f_2(\xi)$,$f_3(\eta)$与$f_4(\eta)$之间均存在某种关系，否则(7-9)式的解不可能存在.这也说明，若在区域$|\xi|\leqslant 1,|\eta|\leqslant 1$中考察方程(7-9)，并不能在边界上自由地给出边界值来求狄利克雷问题的解.这个结论对于区域$|x|+a|t|\leqslant 1$中的方程(7-8)也是同样的，故弦振动方程的狄利克雷问题是不适定的.

例2　柯西-黎曼方程的初值问题.

考虑如下的柯西-黎曼方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=0,\\ u(x_1,0)=\varphi(x_1).\end{cases} \tag{7-11}$$

若$\varphi(x_1)$在原点附近为解析函数，其泰勒级数展开式为$\varphi(x_1)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_jx_1^j$，则依照柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理，(7-11)式存在唯一解

$$u(x_1,x_2)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x_1+\mathrm{i}x_2)^j, \tag{7-12}$$

即解$u(x_1,x_2)$是$\varphi(x_1)$的解析延拓.

现在假定$\varphi(x_1)$不是解析函数，比如设

$$\varphi(x_1)=0,\text{当 } x_1\leqslant 0;\ \varphi(x_1)=\exp(-x_1^d),\text{当 } x>0.$$

则当 $d<0$ 时，$\varphi(x_1)$ 是一个 $C^\infty(\mathbf{R})$ 函数（即函数本身连同其所有阶的导数均在实数 $\mathbf{R}$ 上连续的函数类）. 但在这种情况下，$\varphi(x_1)$ 的解析延拓不再存在，故初始问题(7-11)的解不存在. 这表明定解问题(7-11)是不适定的.

例 3　热传导方程的逆柯西问题.

考虑方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & (7\text{-}13)\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x) & (7\text{-}14)\end{cases}$$

在 $t>0$ 区域中的解. 如果作变换 $t'=-t$，则问题也可以变为求热传导方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t'}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ 满足初始条件 $u(x,t')\big|_{t'=0}=\varphi(x)$，在 $t'<0$ 区域中的解. 这样处理看起来只是热传导方程在上半平面与在下半平面求解柯西问题的区别，但问题的合理性却大不相同. 假如定解问题(7-13)，(7-14)在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 中可解，其解为 $u(x,t)$，则 $u(x,t)$ 也可视为方程(7-13)满足条件 $u\big|_{t=t_0}=u(x,t_0)$ 在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 中的解. 作自变量变换 $t_0-t=s$，则 $\tilde{u}(x,s)=u(x,t_0-t)$ 在 $0\leqslant s\leqslant t_0$ 中满足

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}, \tag{7-15}$$

并且 $\tilde{u}(x,0)=u(x,t_0)$，$\tilde{u}(x,t_0)=u(x,0)$. 所以应该有

$$\varphi(x)=\tilde{u}(x,t_0)=(4\pi t_0)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}u(\eta,t_0)\exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{4t_0}\right)\mathrm{d}\eta. \tag{7-16}$$

但(7-16)式右端定义的是一个关于 x 为无穷次可微的函数，故而只要初值函数 $\varphi(x)$ 不是无穷次可微的，(7-16)式就是矛盾的. 所以，一般来说，热传导方程的逆柯西问题是不适定的.

例 4　热传导方程初值给在 $x=0$ 上的柯西问题.

考虑如下热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t},\\ u(0,t)=\dfrac{\cos(2jt)}{j},\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\dfrac{\cos(2jt)-\sin(2jt)}{\sqrt{j}},\end{cases} \tag{7-17}$$

则(7-17)式的解为

$$u(x,t)=\frac{\cos(2jt+\sqrt{j}x)e^{\sqrt{j}x}}{j}. \tag{7-18}$$

于是当 $j\to+\infty$ 时，$u(0,t)\to 0$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)\to 0$，但是当 $x>0$ 时，在解(7-18)式中因子

$e^{\sqrt{j}x}$随着j的增大而呈指数型上升，故定解问题(7-17)是不稳定的．这表明热传导方程当初值给在$x=0$上的柯西问题是不适定的．

例5　拉普拉斯方程的混合问题．

考虑以下拉普拉斯方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\\ u(x,0)=0,\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\dfrac{1}{n^k}\sin nx,\\ u(0,y)=u(\pi,y)=0,\end{cases}\tag{7-19}$$

其解为

$$u_n(x,y)=\frac{1}{n^{k+1}}\sin nx\sinh ny.$$

当$n\to+\infty$时，其初始条件的连续模趋于零，但解$u_n(x,y)$的连续模却趋向于无限大．这表明混合问题(7-19)在连续模意义下是不稳定的．

如果按L^2模来考察初始数据与解的误差，则当$n\to+\infty$时，

$$\left\|\frac{1}{n^k}\sin nx\right\|^2=\int_0^\pi\left(\frac{1}{n^k}\sin nx\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2n^{2k}}\to 0,$$

但是

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2&=\int_0^y\int_0^\pi\left(\frac{1}{n^{k+1}}\sin nx\sinh ny\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\pi}{8n^{2k+3}}(\sinh 2ny-2ny)\to+\infty.\end{aligned}$$

故定解问题(7-19)在L^2模意义下也是不稳定的．

例6　非双曲型方程的柯西问题．

考虑如下高阶常系数线性方程

$$Lu=\left(\left(\frac{\partial}{2t}\right)^m+\sum_{\substack{j+|\alpha|=m\\ j\leqslant m-1}}a_{j\alpha}\left(\frac{\partial}{2t}\right)^j\partial_x^\alpha\right)u=0,\tag{7-20}$$

这里$a_{j\alpha}$为常数，为了简单起见，设方程中只含m阶项．称(7-20)式为双曲型的方程，若对实的$\xi\in\mathbf{R}^n$，特征方程

$$\tau^m+\sum_{\substack{j+|\alpha|=m\\ j\leqslant m-1}}a_{j\alpha}\xi^\alpha\tau^j=0\tag{7-21}$$

的m个根均为实根．现在假定对某一个$\xi^0\in\mathbf{R}^n$，(7-21)式有一个虚部不等于零的根$\tau_0=a+\mathrm{i}b$(即(7-20)式是非双曲型的)．当将(7-21)式中ξ^0用$\mathrm{i}\xi^0$代替时，由于(7-21)式是齐次式，故τ的根也应替换为$\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)=\mathrm{i}a-b$．作

$$u_n(x,t)=\exp((\mathrm{i}a-b)nt)\cdot\exp(\mathrm{i}n\xi^0x),\tag{7-22}$$

这里$\xi^0x=\xi_1^0x_1+\xi_2^0x_2+\cdots+\xi_n^0x_n$．则(7-22)式是方程(7-20)的解．明显地，当$t=0$时，$|u_n(x,0)|=1$，但只要$bt<0$，$n\to+\infty$就有$\max|u_n(x,t)|\to+\infty$．这表明当$b>0$时，在下半空间$t<0$求解(7-20)式的柯西问题不适定，当$b<0$时，在上半空间$t>0$求解(7-20)式的柯西问题不适定．所以若在$t=0$两侧考虑(7-20)式的柯西问题，则只要(7-20)式不是双曲的，此定解问题就是不适定的．

总而言之,对于什么样的偏微分方程(组)提出什么样的定解问题是适定的,这是一个很困难的问题.然而又是一个很有意义的问题.无论是对一般类型的偏微分方程(组)的定解问题的探讨,还是对具体方程具体定解问题的深入研究都能促使我们更深刻地了解偏微分方程的性质,同时也可以启发我们提出一些求解的方法.

值得一提的是,所谓不适定定解问题只是一种与适定的定解问题有重要区别的问题,因而不能随意地将适用于适定定解问题的结论及求解方法搬到不适定定解问题上来,但这并不是指对于不适定的定解问题已不值得作任何研究了.事实上,由于近年来在流体力学、金属探矿、气象预报等实际问题中经常会遇到这类不适定的问题,因而在不适定问题的理论与求解方法上已有不少有价值的研究成果.

8 偏微分方程的基本解

8.1 基本解的意义

基本解的概念在偏微分方程的理论中是相当重要的.这里将限制在常系数偏微分方程中考虑问题,设 $\mathrm{P}(\partial)$是一个 m 阶的常系数偏微分算子

$$\mathrm{P}(\partial) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \partial_x^\alpha. \tag{8-1}$$

如果能够找到一个广义函数 $E \in D'(\mathbf{R}^n)$,使得

$$\mathrm{P}(\partial) E = \delta \tag{8-2}$$

成立,则称 E 为偏微分算子(8-1)的**基本解**.这里 $D'(\mathbf{R}^n)$记由所有广义函数组成的空间,$\delta \in D'(\mathbf{R}^n)$为 δ 函数.

注意:限于篇幅,这里将略去有关广义函数的介绍以及随后的急减函数类 $\mathscr{S}$ 和其对偶缓增广义函数空间 $\mathscr{S}'$的介绍,而假定读者已具备这方面的一定知识.

基本解在偏微分方程理论中的作用可以说是两个方面的.设 E 为 P 的基本解,则对方程

$$\mathrm{P}u = f, \tag{8-3}$$

令 $u = E * f$,有

$$\mathrm{P}u = \mathrm{P}E * f = \delta * f = f,$$

即 $u = E * f$ 是(8-3)式的解,故利用基本解可以解决方程解的存在性问题.

另一方面,由方程(8-3)又有 $u = E * \mathrm{P}u$,这表明可以从 $\mathrm{P}u$ 的性质,比如 $\mathrm{P}u$ 的光滑性、奇异性等等,来探讨解 u 的正规性和奇异性.

8.2 常系数常微分方程的基本解

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = \delta(x)$, a 为常数. $\quad$ (8-4)

当 $a=0$ 时，其通解为

$$y=H(x)+C, \tag{8-5}$$

其中 $H(x)$ 为赫维赛德(Heaviside)函数．若令 $C=-1$，则得支集在 $\mathbf{R}^-$ 上的唯一基本解；若令 $C=0$，则给出支集在 $\mathbf{R}^+$ 上的唯一基本解．

若 $a\neq 0$，令 $y=\mathrm{e}^{-ax}z$，则方程(8-4)化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\delta(x),$$

故通解为

$$y=(H(x)+C)\mathrm{e}^{-ax}. \tag{8-6}$$

若要求 $y\in\mathscr{S}'$ 为缓增广义函数，则当 $\mathrm{Re}\,a<0$ 时取 $C=-1$；当 $\mathrm{Re}\,a>0$ 时取 $C=0$；当 $\mathrm{Re}\,a=0$ 时 C 可以取任意值，即可以有无穷个 $\mathscr{S}'$ 中的基本解．

(2)高阶常系数线性微分方程的基本解

$$L(u)\equiv\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}x^m}+a_1\frac{\mathrm{d}^{m-1}u}{\mathrm{d}x^{m-1}}+\cdots+a_m u=\delta(x). \tag{8-7}$$

取 $U=\dfrac{(-x)^{m-1}}{(m-1)!}+O(1)x^m$，则 U 满足以下柯西问题

$$LU=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}^j U}{\mathrm{d}x^j}\right|_{x=0}=(-1)^j\delta_{j(m-1)},\quad 0\leqslant j\leqslant m-1,$$

这里 δ_{ij} 为克罗内克(Kronecker)符号．

令 $u=H(x)U(x)$，则由莱布尼兹(Leibnitz)公式可知

$$x^k\delta^{(l)}=0,k>l;\ x^k\delta^{(k)}=(-1)^k k!\delta,$$

以及当 $k<m$ 有

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(HU)=\delta^{(k-1)}U+\cdots+H\frac{\mathrm{d}^k U}{\mathrm{d}x^k}=H\frac{\mathrm{d}^k U}{\mathrm{d}x^k},$$

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(HU)=\delta^{(m-1)}U+\cdots+H\frac{\mathrm{d}^m U}{\mathrm{d}x^m}=\delta+H\frac{\mathrm{d}^m U}{\mathrm{d}x^m},$$

故 $L(u)=L(HU)=\delta+HLU=\delta$，$u=HU$ 为所求的基本解．

8.3 常系数偏微分方程的基本解

(1)柯西-黎曼方程的基本解

$$\frac{\partial E}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial E}{\partial y}=\delta(x,y). \tag{8-8}$$

两边先对 y 作傅里叶变换，得到一个关于 x 的常微分方程(η 视为参数)：

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{E}(x,\eta)}{\mathrm{d}x}-\eta\widehat{E}(x,\eta)=\delta(x),$$

故 $\widehat{E}(x,\eta)=(H(x)+C(\eta))\mathrm{e}^{\eta x}$，$C(\eta)$ 为依赖于 η 的任意常数．

为了让傅里叶变换有意义，需要 $\widehat{E}(x,\eta)$ 关于 η 为缓增的，故取

$$C(\eta)=-1,\text{当 }\eta>0;\ C(\eta)=0,\text{当 }\eta<0.$$

从而

$$\widehat{E}(x,\eta)=\begin{cases}-H(-x)e^{\eta x}, & \eta>0,\\ H(x)e^{\eta x}, & \eta<0.\end{cases}$$

最后得到

$$E(x,y)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\eta y}\widehat{E}(x,\eta)d\eta=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{x+iy}\tag{8-9}$$

为柯西-黎曼方程(8-8)的基本解.

(2)热传导方程的基本解

$$\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2}=\delta(t,x).\tag{8-10}$$

对 x 作傅里叶变换,有

$$\frac{d\widehat{E}(t,\xi)}{dt}+a^2|\xi|^2\widehat{E}(t,\xi)=\delta(t).$$

故 $$\widehat{E}(t,\xi)=H(t)\exp\{-a^2t|\xi|^2\},$$

最后得到

$$E(t,x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\xi}\widehat{E}(t,\xi)d\xi=(4\pi a^2t)^{-\frac{n}{2}}H(t)\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right\}\tag{8-11}$$

为热传导方程(8-10)的基本解.

(3)Schrödinger 方程的基本解

$$\frac{1}{i}\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2}=\delta(t,x),\tag{8-12}$$

对 x 作傅里叶变换后,有

$$\frac{1}{i}\frac{d\widehat{E}(t,\xi)}{dt}+a^2|\xi|^2\widehat{E}(t,\xi)=\delta(t),$$

故 $$\widehat{E}(t,\xi)=iH(t)\exp(-ia^2t|\xi|^2).$$

引进收敛因子 $\exp(-\varepsilon|\xi|^2),\varepsilon>0$,再取极限可得到

$$\begin{aligned}E(t,x)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(i(2\pi)^{-n}H(t)\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\xi}\exp\{-(\varepsilon+ia^2t)|\xi|^2\}d\xi\right)\\&=(4\pi a^2t)^{-\frac{n}{2}}H(t)\exp\left\{-i(n-2)\frac{\pi}{4}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4ia^2t}\right\}\end{aligned}\tag{8-13}$$

为 Schrödinger 方程(8-12)的基本解.

(4)拉普拉斯方程的基本解

$$\Delta E=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2}=\delta.\tag{8-14}$$

先引进径变量 $r=|x|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$,则 $\Delta E=\delta$ 化为一个关于 r 的常微分方程

$$\frac{d^2E}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{dE}{dr}=\delta(r),$$

令$\frac{dE}{dr}=w$,将上式两边同乘 r^{n-1},有

$$r^{n-1}\frac{dw}{dr}+(n-1)r^{n-2}w=r^{n-1}\delta(r)=0,$$

这表明 $r^{n-1}w=C$,从而

$$E=C_2\ln\frac{1}{r},\quad 当\ n=2;\quad E=C_nr^{2-n},当\ n\geqslant 3.$$

这里常数 C_2 和 C_n 均可计算出来:

$$C_2=-\frac{1}{2\pi},\quad C_n=-\frac{1}{(n-2)w_{n-1}},$$

其中 w_{n-1}为 $n-1$ 维单位球面的面积.故

$$E=\frac{1}{2\pi}\ln r,当\ n=2;\quad E=-\frac{1}{(n-2)w_{n-1}}r^{2-n},当\ n\geqslant 3 \tag{8-15}$$

为拉普拉斯方程(8-14)的基本解.

(5)双拉普拉斯算子的基本解

$$\Delta^2E=\delta. \tag{8-16}$$

令　$E_1=\Delta E$,则由以上结论有

$$E_1=\frac{1}{2\pi}\ln r,当\ n=2;E_1=-\frac{1}{(n-2)w_{n-1}}r^{2-n},n\geqslant 3.$$

利用 $\Delta=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}$,当 $n=2$ 时,积分后有

$$E=\frac{1}{8\pi}(r^2\ln r-r^2),$$

由于后面一项满足 $\Delta^2\left(-\frac{r^2}{8\pi}\right)=0$,故得到当 $n=2$ 时(8-16)式的基本解为

$$E=\frac{1}{8\pi}r^2\ln r. \tag{8-17}$$

类似地可得当 $n=2$ 时,偏微分算子 $\Delta^m(m\geqslant 1)$的基本解为

$$E=C_mr^{2m-2}\ln r, \tag{8-18}$$

这里 C_m 是仅与 m 有关的常数.

同样当 $n\geqslant 2$ 时,偏微分算子 Δ^m 的基本解为

$$E=\begin{cases}C_{m,n}r^{2m-n}\ln r & (2m-n\geqslant 0,且为偶数),\\ C_{m,n}r^{2m-n} & (其他情形).\end{cases} \tag{8-19}$$

其中 $C_{m,n}$是仅与 m 和 n 有关的常数.

(6) 波动方程的基本解

$$\frac{\partial^2E}{\partial t^2}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2E}{\partial x_j^2}=\delta(t,x). \tag{8-20}$$

求波动方程的基本解的推导较为复杂,我们需要在方程(8-19)两边同时对 x 和 t

进行傅里叶变换.这里我们仅给出最后结果.

取$(a,b)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$,且$a^2-|b|^2>0$,则波动方程(8-19)的基本解$E_+(t,x)$定义为如下的广义函数

$$\langle E_+,\varphi(-t,-x)\rangle=-(2\pi)^{-n-1}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau-ia,\xi-ib)}{(\tau-ia)^2-|\xi-ib|^2}d\tau d\xi$$
$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1}).\tag{8-21}$$

这里$C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$记在$\mathbf{R}^{n+1}$上具紧支集的无穷次可微函数空间.

对一般的常系数偏微分算子(8-1),其基本解的存在性已经被证明了,这表明对常系数偏微分方程来说,至少其局部解的存在性是可以保证的.

参 考 文 献

1 齐民友.线性偏微分算子引论:上册.北京:科学出版社,1986.
2 Treves F. Basic linear partial differential equations. New York: Academic Press, 1975
3 陈恕行.偏微分方程概论.北京:高等教育出版社,1981.
4 谷超豪,许政范等.数学物理方程.第2版.上海:上海科技出版社,1961.
5 齐民友.广义函数与数学物理方程.北京:高等教育出版社,1989.
6 梁昆森.数学物理方法.第2版.北京:人民教育出版社,1978.
7 南京工学院数学教研室.数学物理方程与特殊函数.第2版.北京:高等教育出版社,1982.
8 Dearson Carl E. Handbook of applied mathematics. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1974.

·经典数学卷·

第 14 篇

变分学

编　者　孙金海
审校者　周叔子

目　录

引　言

在处理自然科学和工程技术中出现的许多问题时，常常需要研究这样一种抽象的函数——泛函.在探讨泛函的极值问题时，导出一门新的数学分支——变分学，其研究对象就是确定泛函极值的普遍方法.凡有关求泛函极值的问题都叫做变分问题.变分学是一门古老的数学分支，在微积分学科形成的初期，变分问题就已经提出.变分学在1696年开始发展，对它的发展有巨大影响的就是所谓的最速降线问题、短程线问题以及等周问题.

变分学的典型问题是由积分所表示的泛函的极值问题.自从伯努利·约翰(Bernoulli Johann)、伯努利·雅各(Bernoulli Jacob)以及欧拉(Euler)等探讨变分学的种种具体问题以后，1760年，拉格朗日(Lagrange)把变分问题与力学相联系引进了变分问题的一般处理方法，于是以欧拉命名的方程才开始得到清楚的论述.

古典变分学主要探讨如何把泛函的极值问题转化成微分方程的边值问题，即推导出各种形式的欧拉方程及定解条件.现代变分学是利用变分问题来描述力学、物理学以及工程技术领域内的现象的理论性学科.近30年来，变分原理得到了迅速的发展，它促进了力学、物理学以及数学中某些分支学科的发展，它为各类离散方法和探讨解决工程技术领域内的疑难问题提供了系统的理论基础.

由于变分学有着广泛的应用，它的基础知识定为广大的数学和科技工作者所必需.限于篇幅，本篇只能介绍变分学的基本概念和方法，其中包括解变分问题时最为重要的直接法.

1　引论·固定边界的变分问题

求泛函极值的方法和求函数极值的方法是非常类似的.本章重点介绍固定边界的变分问题及各种形式的泛函取极值的条件.

1.1　著名的变分问题

1.最速降线问题

在所有连接位于不同铅垂线上两定点 $A(x_0,y_0)$ 及 $B(x_1,y_1)$ 的曲线中，求出一条曲线，使初速为零的质点，自 A 点在重力作用下沿着它滑行时，以最短时间到达 B 点.如图1-1所示.

这个问题的数学描述：

在所有满足边界条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 的曲线中选取一条光滑曲线 $y=y(x)$，使

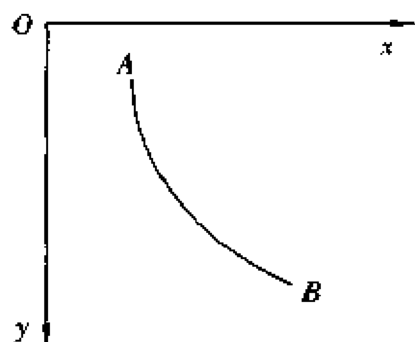


图 1-1

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} \mathrm{d}x \tag{1-1}$$

取最小值. 其中 g 为重力加速度.

2. 短程线问题

求曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上所给两点 $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$ 间长度最短的曲线(见图 1-2). 这条最短曲线称为短程线.

这个问题的数学描述:

在所有满足条件 $y(x_0)=y_0, z(x_0)=z_0; y(x_1)=y_1, z(x_1)=z_1$ 的曲线中, 选取一条光滑曲线: $y=y(x), z=z(x)$, 它不但要满足方程 $\varphi(x,y,z)=0$, 而且使

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2+(z')^2} \mathrm{d}x \tag{1-2}$$

取最小值.

3. 等周问题

求长度为一定的封闭平面曲线 l, 使其所围的面积 S 为最大.

由于所求的曲线是一条封闭的平面曲线, 因此, 用参数形式表示是方便的. 设其参数方程为 $x=x(t), y=y(t)(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$.

这个问题的数学描述:

在满足 $x(t_0)=x(t_1), y(t_0)=y(t_1)$ 和

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1-3}$$

保持定值的光滑曲线中, 选取一条曲线 $x=x(t), y=y(t)$, 使它所围成的面积

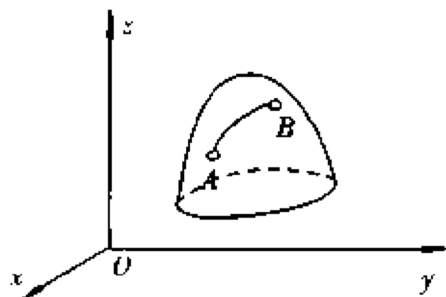


图 1-2

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \tag{1-4}$$

取最大值.

1.2　关于泛函极值的一些基本概念

(1)泛函　设 $\{y(x)\}$ 是给定的某一函数类, 若对于此函数类中的每一个函数 $y(x)$, 都有一个确定的实(或复)值 J 与之对应, 则称变量 J 为函数 $y(x)$ 的泛函, 记为 $J=J[y(x)]$. 函数类 $\{y(x)\}$ 称为泛函 J 的定义域.

(2)容许函数类　一个在其上定义了泛函的函数类, 称为该泛函的容许函数类(或可取函数类), 而它的图像叫做容许曲线类(或可取曲线类).

上述定义可推广到依赖于多个函数的泛函和定义在多元函数上的泛函.

以后,若不作声明,有关变量、函数或泛函均指实值.

(3)C^n 类函数 若函数 $y(x)$在区间$[x_0,x_1]$上连续,并且有直到 n 阶的连续导数,则称函数 $y(x)$(或曲线 $y=y(x)$)是属于 C^n 类的,通常表示为 $y(x)\in C^n[x_0,x_1]$.

对于多元函数也可给出类似的定义.

(4)**函数间的距离** 设函数 $y(x)$与 $y_0(x)\in C^n[x_0,x_1]$,则称

$$d_n(y,y_0)=\max_{0\leqslant j\leqslant n}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|y^{(j)}(x)-y_0^{(j)}(x)|$$

为函数 $y(x)$与 $y_0(x)$(或曲线 $y=y(x)$与 $y=y_0(x)$)在区间$[x_0,x_1]$上的 **n 级距离**.特别,当 $n=0$ 时,称

$$d_0(y,y_0)=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|y(x)-y_0(x)|$$

为函数 $y(x)$与 $y_0(x)$(或曲线 $y=y(x)$与 $y=y_0(x)$)在区间$[x_0,x_1]$上的**零级距离**;当 $n=1$ 时,称

$$d_1(y,y_0)=\max_{0\leqslant j\leqslant 1}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|y^{(j)}(x)-y_0^{(j)}(x)|$$

为函数 $y(x)$与 $y_0(x)$(或曲线 $y=y(x)$与 $y=y_0(x)$)在区间$[x_0,x_1]$上的**一级距离**.

这些概念可推广到多元函数.

(5)**函数的邻域** 称所有与函数 $y_0(x)$(或曲线 $y=y_0(x)$)($x_0\leqslant x\leqslant x_1$)的 n 级距离小于 ε 的函数 $y(x)$(或曲线 $y=y(x)$)的全体为函数 $y_0(x)$(或曲线 $y=y_0(x)$)的 **n 级ε-邻域**.

例如,函数 $y_0(x)$(或曲线 $y=y_0(x)$)的**零级 ε-邻域**,是由所有满足$|y(x)-y_0(x)|<\varepsilon$ 的函数$y(x)$(或曲线 $y=y(x)$)所组成.函数 $y_0(x)$(或曲线 $y=y_0(x)$)的**一级 ε-邻域**,是由满足$|y(x)-y_0(x)|<\varepsilon$ 及$|y'(x)-y'_0(x)|<\varepsilon$ 的函数$y(x)$(或曲线 $y=y(x)$)所组成.因而函数 $y_0(x)$(或曲线 $y=y_0(x)$)的一级 ε-邻域,实际上是函数 $y_0(x)$(或曲线 $y=y_0(x)$)的零级 ε-邻域的子域.

这些概念也可推广到多元函数.

(6)**绝对极值** 设 $y_0(x)$是泛函 $J[y(x)]$的容许函数类中的某一函数,若对于这类中的任一函数 $y(x)$,下式永远成立

$$J[y(x)]\geqslant J[y_0(x)],$$

则称泛函 $J[y(x)]$在函数 $y_0(x)$处取得**绝对极小值**.同样,可以定义**绝对极大值**.

(7)**相对极值** 若把作为比较的函数 $y(x)$局限于函数 $y_0(x)$的某一邻域内,并且有 $J[y(x)]\geqslant J[y_0(x)]$成立,则称泛函 $J[y(x)]$在函数 $y_0(x)$处取得**相对极小值**.类似地,可以定义**相对极大值**.

(8)**强的相对极值** 若对于在函数 $y_0(x)$的零级 ε-邻域内的所有容许函数 $y(x)$,都有

$$J[y(x)]\geqslant J[y_0(x)],$$

则称泛函 $J[y(x)]$在函数 $y_0(x)$处取得强的相对极小值.类似地,可以定义强的相

对极大值.

(9)**弱的相对极值**　若对于在函数 $y_0(x)$ 的一级 ε-邻域内的所有容许函数 $y(x)$,都有

$$J[y(x)] \geqslant J[y_0(x)],$$

则称泛函 $J[y(x)]$ 在函数 $y_0(x)$ 处取得弱的相对极小值.类似地,可以定义弱的相对极大值.

上述定义可推广到含多个函数的泛函和定义在多元函数上的泛函.

必须指出,每一个绝对极值同时是一个强与弱的相对极值;每一个强极值同时也是弱极值;但一般地说,反之不然.

1.3　变分法的最简问题·欧拉方程

寻求最简泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]\mathrm{d}x \tag{1-5}$$

的极值,其中容许函数 $y(x)$ 连续,且满足**固定边界条件** $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$,而函数 $F(x, y, y')$ 关于 x, y, y' 是二阶连续可微的.

1.3.1　变分

(1)**函数的变分**　函数 $y(x)$ 与另一函数 $y_1(x)$ 之差: $y_1(x) - y(x)$,称为函数 $y(x)$ 的变分,记作 δy,即

$$\delta y(x) = y_1(x) - y(x).$$

若函数 $y(x) \in C^n$,则下式成立:

$$(\delta y)' = \delta y', (\delta y)'' = \delta y'', \cdots, (\delta y)^{(n)} = \delta y^{(n)}.$$

(2)**泛函的变分**　如果泛函的增量

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)]$$

能够表示成如下的形式

$$\Delta J = L[y(x), \delta y(x)] + o(|\delta y(x)|),$$

其中 $L[y(x), \delta y(x)]$ 对于 $\delta y(x)$ 而言是线性的, $o(|\delta y(x)|)$ 表示关于 $|\delta y(x)|$ 的高阶无穷小,那么 $L[y(x), \delta y(x)]$ 是泛函 $J[y(x)]$ 增量的主要部分.

泛函 $J[y(x)]$ 增量的主部 $L[y(x), \delta y(x)]$ 称为泛函 $J[y(x)]$ 在 $y(x)$ 上的**一次变分**,简称**变分**,记作 δJ,即

$$\delta J = L[y(x), \delta y(x)].$$

若泛函 $J[y(x) + t\delta y(x)]$(其中 t 为参变量)对 t 可导,则泛函 $J[y(x)]$ 的变分也可以定义为

$$\delta J = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J[y(x) + t\delta y(x)]\bigg|_{t=0}.$$

(3)泛函变分的表示式

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \{ F_y[x,y,y']\delta y + F_{y'}[x,y,y']\delta y' \} \mathrm{d}x. \tag{1-6}$$

以上公式和定义可推广到含多个函数的泛函及含多自变量的泛函.

1.3.2 变分学的基本引理

引理 1 设函数 $\varphi(x) \in C[x_0, x_1]$,以及对于任意函数 $\eta(x) \in C^1[x_0, x_1]$,$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$,都有

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则在区间$[x_0, x_1]$上 $\varphi(x) \equiv 0$.该引理叫做拉格朗日引理.

引理 2 设函数 $\varphi(x) \in C[x_0, x_1]$,以及对于任意函数 $\eta(x) \in C^1[x_0, x_1]$,$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$,总有

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\eta'(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则在整个区间$[x_0, x_1]$上,$\varphi(x)$为常数.该引理称为黎曼(Riemann)引理.

这些引理可以推广到重积分.

1.3.3 欧拉方程

(1)泛函取极值的基本必要条件

定理 1 如果泛函 $J[y(x)]$在函数 $y(x)$处达到极值,那么泛函 $J[y(x)]$在 $y(x)$处的变分 $\delta J = 0$.

(2)变分的变换 由变分的表示式(1-6),易得

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} \right)\delta y \mathrm{d}x, \tag{1-7}$$

或

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_{y'} - N)\delta y' \mathrm{d}x, \tag{1-8}$$

其中 $N(x) = \int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}x$.

(3)欧拉方程 将拉格朗日引理应用于(1-7)式,可得**欧拉方程**

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0. \tag{1-9}$$

欧拉方程的展开式为

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0.$$

应用黎曼引理于(1-8)式,则得所谓欧拉方程的积分形式

$$F_{y'} - N = F_{y'} - \int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}x = C, \tag{1-10}$$

这里 C 是常数.

这个以欧拉命名的方程,是欧拉在1744年首先得到的.

(4)极值函数　满足欧拉方程的函数,通常把它叫做关于变分问题的**极值函数**,而它的图像则叫做**极值曲线**.只有在极值曲线上,泛函 $J[y]$ 才能达到极值.

定理2　设 $F(x,y,y')$ 及其二阶偏导数对于 $x(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$ 及任意的 y,y' 连续.若 $y(x)\in C^1[x_0,x_1]$ 给出泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的相对弱极值,则函数 $y(x)$ 满足欧拉方程(1-9),并且在 $F_{y'y'}\neq 0$ 的一切 x 值上,y'' 存在而且连续.

例1　求泛函

$$\begin{cases}J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y')^2-y^2]\mathrm{d}x,\\ y(0)=0,y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\end{cases}$$

的极值曲线.

解　欧拉方程为 $y''+y=0$,其通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.由边界条件得 $C_1=0,C_2=1$;因此,所求的极值曲线为 $y=\sin x$.

1.3.4　欧拉方程的几种特殊情形

(1) $F=F(x,y)$

此时,欧拉方程为 $F_y(x,y)=0$,一般讲,所论变分问题的解不存在.

(2) $F=F(x,y')$

此时,欧拉方程为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}(x,y')=0$,它的初积分为 $F_{y'}(x,y')=C_1$.

(3) $F=F(y,y')$

此时,欧拉方程有初积分 $F-y'F_{y'}=C_1$.

(4) $F=F(y')$

此时,极值曲线就是可能有的全部直线 $y=C_1x+C_2$.

(5) $F=M(x,y)+N(x,y)y'$

此时,欧拉方程为 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$,类似于情形(1).特别,当 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0$ 时,变分失去意义.

例2　最速降线问题

$$\begin{cases}T(y)=\int_0^a\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x,\\ y(0)=0,y(a)=b.\end{cases}$$

解　欧拉方程的初积分为

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}-\frac{(y')^2}{\sqrt{y[1+(y')^2]}}=C,$$

化简后成为

$$y[1+(y')^2]=C_1.$$

引入参数 t,使 $y'=\cot t$,就得

$$y=\frac{C_1}{1+\cot^2 t}=C_1\sin^2 t=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t),$$

从而 $dx=\frac{dy}{y'}=C_1(1-\cos 2t)dt$,于是

$$x=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t)+C_2.$$

因此,所求曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x-C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t), \\ y=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t). \end{cases}$$

若令 $\theta=2t$,并注意到所求曲线通过原点(0,0),则 $C_2=0$,于是得

$$\begin{cases} x=\frac{C_1}{2}(\theta-\sin\theta), \\ y=\frac{C_1}{2}(1-\cos\theta). \end{cases}$$

由此可见,最速降线问题的极值曲线是圆滚线,其中$\frac{C_1}{2}$为滚动圆的半径,常数 C_1 由条件 $y(a)=b$ 来确定.

1.3.5 极值必要条件

使泛函变分 $\delta J=0$ 的极值函数未必能使泛函达到相对极大值(或极小值).为使 $J[y]$在极值函数 $y(x)$上达到极值,还要考虑其他条件.

(1)泛函的二次变分 由函数 $F(x,y,y')$的泰勒(Taylor)级数展开式,并设 $\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$,可得

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[y+\delta y]-J[y] \\ &= \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')dx+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[F_{yy}(\delta y)^2+ \\ &\quad 2F_{yy'}\delta y\delta y'+F_{y'y'}(\delta y')^2]dx+\varepsilon,\end{aligned}$$

当函数 $y+\delta y$ 与 y 的一级距离充分小时,ε 是关于 $d_1^2(y+\delta y,y)$的高阶无穷小量.上式右边的第一项是泛函 $J[y]$的一次变分,第二项是泛函 $J[y]$的**二次变分**,记作 $\delta^2 J$,即

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[F_{yy}(\delta y)^2+2F_{yy'}\delta y\delta y'+F_{y'y'}(\delta y')^2]dx. \tag{1-11}$$

在探讨弱极值时,δy 和 $\delta y'$是充分小的量,由于 $\delta J=0$,此时 ΔJ 的符号由 $\delta^2 J$ 的符号来确定.即若函数 $y(x)\in C^1[x_0,x_1]$达到 $J[y]$的极小值(或极大值)时,则

对于任意的函数 $\delta y\in C^1[x_0,x_1]$,$\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$,二次变分 $\delta^2 J$ 非负(或者非正):

$$\delta^2 J\geqslant 0\quad(\text{或 }\delta^2 J\leqslant 0).$$

(2)二次变分的简化式为

$$\delta^2 J=\int_{x_0}^{x_1}[P(\delta y)^2+R(\delta y')^2]\mathrm{d}x,$$

其中 $P=\frac{1}{2}\left(F_{yy}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right)$,$R=\frac{1}{2}F_{y'y'}$.

定理 3　对于任何函数 $\delta y(x)\in C^1[x_0,x_1]$,$\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$,要使二次泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}[P(x)(\delta y)^2+R(x)(\delta y')^2]\mathrm{d}x$$

非负,必须在区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上恒有 $R(x)\geqslant 0$.

(3)勒让德(Legendre)条件　若极值曲线 $y=y(x)$ 使泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

达到极小值(或极大值),则沿着它必有不等式

$$F_{y'y'}\geqslant 0(\text{或 }F_{y'y'}\leqslant 0)$$

成立.

不等式 $F_{y'y'}\geqslant 0$(或 $F_{y'y'}\leqslant 0$)叫做**勒让德条件**,而不等式 $F_{y'y'}>0$(或 $F_{y'y'}<0$)叫做**勒让德加强条件**.

1.4　含多个函数和含高阶导数的泛函

1.4.1　含多个函数的泛函

(1)变分问题的数学描述　已给函数 $F(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)$,设 F 和它对所有变数的二阶以内的偏导数是连续的.在 $n+1$ 维空间里,在连接二定点 $A(x_0,y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0})$和 $B(x_1,y_{11},y_{21},\cdots,y_{n1})$的所有曲线

$$y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x),\ \cdots,\ y_n=y_n(x)$$

($y'_i(x)$连续)中,确定出某一曲线,使泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)\mathrm{d}x\qquad(1\text{-}12)$$

取极值.

(2)一次变分为

$$\delta J=\left[\sum_{i=1}^{n}F_{y'_i}\delta y_i\right]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{n}\left(F_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'_i}\right)\delta y_i\mathrm{d}x.$$

(3)极值的基本必要条件

定理 4 设容许函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 均属于 $C^2[x_0,x_1]$，且满足边界条件

$$y_i(x_0)=y_{i0},\quad y_i(x_1)=y_{i1},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

若函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 使泛函(1-12)取得极值，则它们必满足方程组：

$$F_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'}=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1-13}$$

设函数 $y(x)$ 及 $z(x)$ 均属于 $C^2[x_0,x_1]$，且满足边界条件 $y(x_0)=y_0,z(x_0)=z_0;y(x_1)=y_1,z(x_1)=z_1$. 若 $y(x),z(x)$ 使泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x;y,z;y',z')\mathrm{d}x \tag{1-14}$$

达到极值，则它们必满足方程组：

$$\begin{cases}F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0,\\ F_z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}=0.\end{cases} \tag{1-15}$$

例 3 试求泛函

$$\begin{cases}J[y,z]=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y')^2+(z')^2+2yz]\mathrm{d}x,\\ y(0)=0,z(0)=0,\\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1\end{cases}$$

的极值曲线.

解 欧拉方程组为 $y''-z=0,z''-y=0$，消去 z 得 y 的微分方程 $y^{(4)}-y=0$，由此得

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x,$$

$$z=y''=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x.$$

由边界条件得 $C_1=C_2=C_3=0,C_4=1$，因而，所求的极值曲线为

$$y=\sin x,\quad z=-\sin x.$$

例 4 求泛函 $J[y,z]=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}F(y',z')\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

解 欧拉方程组为

$$\begin{cases}F_{y'y'}y''+F_{y'z'}z''=0,\\ F_{y'z'}y''+F_{z'z'}z''=0.\end{cases}$$

假定 $F_{y'y'}F_{z'z'}-(F_{y'z'})^2\neq 0$，则由欧拉方程组得 $y''=0$ 和 $z''=0$，由此得

$$y=C_1x+C_2,\quad z=C_3x+C_4.$$

这是空间中的一条直线.

(4)勒让德条件　要极值曲线 $y_1=y_1(x),y_2=y_2(x),\cdots,y_n=y_n(x)$ 使泛函(1-12)达到极小，则在极值曲线的每一点上，下列不等式成立：

$$F_{y_1'y_1'} \geqslant 0, \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} \geqslant 0, \cdots, \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \cdots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \cdots & F_{y_2'y_n'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \cdots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

1.4.2　含高阶导数的泛函

(1)变分问题的数学描述　设 $y(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$，且满足边界条件：

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y'_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}.$$

试确定一个函数 $y(x)$，使泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \mathrm{d}x \tag{1-16}$$

达到极值，其中 F 对各个变量连续且有直到 $n+2$ 阶连续偏导数.

(2)欧拉-泊松(Euler-Poisson)方程

定理 5　若容许函数 $y(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$给出形如(1-16)式的泛函 J 的极值，则它必满足方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}} = 0. \tag{1-17}$$

例 5　确定泛函

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(y'')^2 - y^2 + x^2] \mathrm{d}x$$

满足边界条件

$$y(0) = 1, y'(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

的极值曲线.

解　欧拉-泊松方程为 $y^{(4)} - y = 0$，它的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. 由边界条件得 $C_1 = C_2 = C_4 = 0, C_3 = 1$. 故所求极值曲线为

$$y = \cos x.$$

1.4.3　更一般的情形

如果泛函具有

$$J[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x; y, y', \cdots, y^{(n)}; z, z', \cdots, z^{(m)}) \mathrm{d}x \tag{1-18}$$

的形式，那么使极值实现的两个函数 $y(x)$和 $z(x)$应当满足欧拉-泊松方程组：

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \cdots + (-1)^n \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_y^{(n)} = 0, \\ F_z - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} + \cdots + (-1)^m \dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}F_z^{(m)} = 0. \end{cases} \tag{1-19}$$

如果泛函具有

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_m]$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}F(x;y_1,y'_1,\cdots,y_1^{(n_1)};y_2,y'_2,\cdots,y_2^{(n_2)};\cdots;y_m,y'_m,\cdots,y_m^{(n_m)})\mathrm{d}x \tag{1-20}$$

的形式，那么欧拉-泊松方程组为

$$F_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'_i}+\cdots+(-1)^{n_i}\frac{\mathrm{d}^{n_i}}{\mathrm{d}x^{n_i}}F_{y_i^{(n_i)}}=0\ (i=1,2,\cdots,m). \tag{1-21}$$

1.5 含多元函数的泛函

1.5.1 含一个多元函数的情形

设泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_D F(x,y;u;u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1-22}$$

其中 u_x 及 u_y 分别表示函数 u 对 x 及 y 的偏导数，$F\in C^2$. 求函数 $u(x,y)\in C^2,(x,y)\in D$，且满足边界条件 $u|_l=g(x,y)$. 当泛函(1-22)在函数 u 处达到极值时，试确定 u 应满足的条件.

(1)一次变分

$$\delta J=\int_l\delta u(F_{u_x}\mathrm{d}y-F_{u_y}\mathrm{d}x)+\iint_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2)极值的基本必要条件　泛函实现极值的必要条件为 $\delta J=0$，又注意到 δu 在区域 D 的边界 l 上等于零及变分学的基本引理，得极值函数 $u(x,y)$ 所应满足的微分方程

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0. \tag{1-23}$$

(3)含二阶偏导数的泛函　若泛函具有

$$J[u(x,y)]=\iint_D F(x,y;u;u_x,u_y;u_{xx},u_{xy},u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-24}$$

的形式，则欧拉方程为

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}=0. \tag{1-25}$$

1.5.2 含两个或两个以上多元函数的情形

若泛函为

$$J[u(x,y),v(x,y)]=\iint_D F(x,y;u,v;u_x,v_x,u_y,v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1-26}$$

则欧拉方程组为

$$\begin{cases} F_u - \dfrac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \dfrac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0, \\ F_v - \dfrac{\partial}{\partial x}F_{v_x} - \dfrac{\partial}{\partial y}F_{v_y} = 0. \end{cases} \tag{1-27}$$

例 6 设泛函为

$$J[u] = \iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2uf(x,y,z) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $f(x,y,z)$ 为已知函数.易得欧拉方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z).$$

在数学物理方程中,该方程叫做泊松方程.若 $f \equiv 0$,则得拉普拉斯(Laplace)方程.

例 7 设泛函为

$$J[u] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - 2uf(x,y) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y)$ 为已知函数.易得欧拉方程:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x,y).$$

该方程称为重调和方程.

1.6 用参数形式表示的变分问题

考虑形如

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y; \dot{x}, \dot{y}) \mathrm{d}t \tag{1-28}$$

的泛函,其中 $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,被积函数 F 不显含自变量 t.为使泛函 J 不依赖于参变量的选择,设 F 对 $\dot{x}$ 及 $\dot{y}$ 是一次齐次函数,即对任何 k,有

$$F(x, y; k\dot{x}, k\dot{y}) = kF(x, y; \dot{x}, \dot{y}), \tag{1-29}$$

则泛函 J 只依赖于曲线的形状,而不依赖于其参数的表示式.将(1-29)式对 k 求导,然后令 $k=1$,得

$$F = \dot{x}F_{\dot{x}} + \dot{y}F_{\dot{y}}, \tag{1-30}$$

该式通常叫做齐次条件.

对于参数 t 的任何选择,函数 $x(t)$ 及 $y(t)$ 应满足欧拉方程组:

$$\begin{cases} F_x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}} = 0, \\ F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{y}} = 0. \end{cases} \tag{1-31}$$

这些方程不显含参变数 t,并且两个方程不是独立的,其中一个可由另一个推出.

因此,要求极值函数,只要从两个欧拉方程中拿出一个来,把它与确定参数的那个方程联立求积分即可.

1.7 泛函极值的充分条件

考虑泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y; y') \mathrm{d}x. \tag{1-32}$$

设 $F \in C^2[x_0, x_1]$, $y \in C^2[x_0, x_1]$,且 $y = y(x)$ 为泛函(1-32)满足边界条件

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \tag{1-33}$$

的极值曲线.假定边界点 $A(x_0, y_0)$ 和 $B(x_1, y_1)$ 是固定的.

1.7.1 极值曲线场

(1)固有场　如果对于(x, y)平面的某区域 D 内的每一点,有且仅有曲线族 $y = y(x, C)$ 中的一条曲线通过,那么,称这个曲线族在区域 D 内形成一个**固有场**.在曲线族 $y = y(x, C)$ 上的(x, y)处的切线斜率 $p(x, y)$,称为固有场在该处的斜率.

(2)中心场　如果曲线族 $y = y(x, C)$ 中的所有曲线都通过区域 D 内的同一点 $A(x_0, y_0)$,且除该点(称为曲线族的束心)外,区域 D 内任一点都有曲线族中的一条且只有一条曲线通过,那么,称此曲线族在区域 D 内形成一个**中心场**.

(3)极值曲线场　如果固有场或中心场是由某一变分问题的单参数极值曲线族所形成的,那么,称此场为**极值曲线场**.

设 $y = y(x)$ 是泛函 $J[y]$ 的极值曲线,如果可以找到一族极值曲线 $y = y(x, C)$,它形成一个场,且含有当值 $C = c_0$ 时这条极值曲线 $y = y(x)$,并且在族 $y = y(x, C)$ 所形成的场的域内 $y = y(x)$ 不在域 D 的境界上,那么,称 $y = y(x)$ 是被包含在极值曲线场之内.

1.7.2 共轭点·雅可比条件及雅可比方程

(1)共轭点　设有极值曲线族 $y = y(x, C)$,以 $A(x_0, y_0)$ 为束心;若当 $C = c_0$ 时的极值曲线 $y = y(x)$,与曲线族 $y = y(x, C)$ 的 C-判别曲线

$$\begin{cases} y = y(x, C), \\ \dfrac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

有公共点 A^*,则点 A^* 称为极值曲线 $y = y(x)$ 上 A 的**共轭点**.如图 1-3 所示.

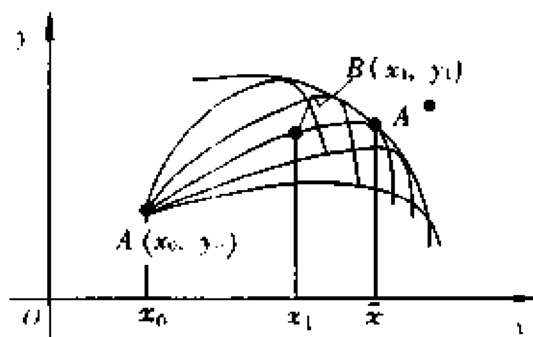


图 1-3

(2)雅可比(Jacobi)条件　若泛函(1-32)满足边界条件(1-33)的极值曲线 $y = y(x)$ 上的弧 $\widehat{AB}$ 不含 A 点的共轭点 A^*,则称该极值曲线满足**雅可比条件**.

(3)雅可比方程　方程

$$\left(F_{yy}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right)u-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u'F_{y'y'})=0 \tag{1-34}$$

称为相应于泛函(1-32)的**雅可比方程**.

在 $F_{y'y'}\neq 0$ 的假设下,若从点$(x_0,0)$作出的雅可比方程的积分曲线不与 x 轴在开区间 $x_0<x<x_1$ 内相交,则曲线 $y=y(x)$满足雅可比条件;不与 x 轴在右闭区间 $x_0<x\leqslant x_1$ 内相交,则称曲线 $y=y(x)$满足**雅可比加强条件**.

由于雅可比方程满足条件 $u(x_0)=0$ 的任何解 $u(x)$,与雅可比方程满足条件

$$u(x_0)=0,\quad u'(x_0)=1 \tag{1-35}$$

的解 $u_0(x)$只差一常数因子,因此,也可以说若对于开区间 $x_0<x<x_1$ 中的任何 x,恒有 $u_0(x)\neq 0$,则曲线 $y=y(x)$满足雅可比条件;若对于右闭区间 $x_0<x\leqslant x_1$ 中的任何 x,恒有 $u_0(x)\neq 0$,则曲线 $y=y(x)$满足雅可比加强条件.

1.7.3　E 函数

对于泛函(1-32),函数

$$E(x,y;y',p)=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p) \tag{1-36}$$

称为魏尔斯特拉斯(Weierstrass)函数,简称 E 函数.

1.7.4　弱极值的充分条件

定理6　泛函(1-32)在曲线 $y=y(x)$上达到弱极小的充分条件可叙述为如下3种形式:

第一种形式:

1° $y=y(x)$是极值曲线,且过 $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$;

2° 极值曲线 $y=y(x)$满足雅可比条件;

3° 在极值曲线 $y=y(x)$ $(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$上,$F_{y'y'}>0$.

第二种形式:

1° $y=y(x)$是极值曲线,且过 $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$;

2° 极值曲线 $y=y(x)$满足雅可比条件;

3° 在与极值曲线 $y=y(x)$相邻近的点(x,y)以及与 $p(x,y)$相邻近的 y'外,有 $E(x,y,y',p)\geqslant 0$.

第三种形式:

1° $y=y(x)$是极值曲线,且过 $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$;

2° 存在包含极值曲线 $y=y(x)$在内的极值曲线场;

3° 在与极值曲线 $y=y(x)$相邻近的点(x,y)以及与 $p(x,y)$相邻近的 y'处,有 $E(x,y,y',p)\geqslant 0$.

把不等号反转方向,则得对于极大的相当的条件.

定理7　泛函(1-32)在曲线 $y=y(x)$上达到强极小(或强极大)的充分条件是

1° $y=y(x)$是极值曲线,且过 $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$;

2° 极值曲线 $y=y(x)$被包含在由极值曲线族 $y=y(x,C)$所构成的极值曲线

场内；

3° 在极值曲线 $y=y(x)$ 的零级 ε-邻域内，对任意的 y'，有 $E(x,y,y',p)\geqslant 0$（或 $E(x,y,y',p)\leqslant 0$）.

为方便起见，条件 3° 可换成

$3^{\circ\prime}$ 在极值曲线 $y=y(x)$ 的零级 ε-邻域内，对任意的 y'，有 $F_{y'y'}(x,y,y')\geqslant 0$（或 $F_{y'y'}(x,y,y')\leqslant 0$）.

特别提请注意，用 $F_{y'y'}$ 代替 E 虽然简单，但是方法较粗糙.

例 8 讨论泛函

$$J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y')^2-y^2]\mathrm{d}x$$

的极值，其边界条件为 $y(0)=0,y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

解 欧拉方程为 $y''+y=0$，且其通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

利用边界条件，得 $y=\sin x$；泛函的雅可比方程为 $u''+u=0$，其通解为

$$u=B_1\cos x+B_2\sin x,$$

满足初始条件 $u(0)=0,u'(0)=1$ 的解为 $u_0(x)=\sin x$；对于区间 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 中的任何 x，$u_0(x)=\sin x\neq 0$，因而极值曲线 $y=\sin x$ 满足雅可比条件；由于在极值曲线 $y=\sin x$ 上，$F_{y'y'}=2>0$，因此，极值曲线 $y=\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 给出泛函的弱极小值.该极小值为

$$J[\sin x]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2x-\sin^2x)\mathrm{d}x=0.$$

例 9 讨论泛函

$$\begin{cases}J[y]=\int_0^1[yy'+(y')^2]\mathrm{d}x,\\ y(0)=0,\quad y(1)=2\end{cases}$$

的极值.

解 欧拉方程 $y''=0$ 的通解为 $y=C_1x+C_2$，满足边界条件 $y(0)=0,y(1)=2$ 的解为 $y=2x$；$y=C_1x$ 在 $[0,1]$ 上形成极值曲线中心场，且 $y=2x$ 被包含在这个极值曲线场之内；

$$\begin{aligned}E(x,y,y',p)&=yy'+(y')^2-(yp+p^2)-(y'-p)(y+2p)\\&=(y')^2-2y'p+p^2=(y'-p)^2\end{aligned}$$

对于任意的 y'，皆有 $E\geqslant 0$；因此，极值曲线 $y=2x$ 给出泛函的强极小值.该极小值为

$$J[2x]=\int_0^1(4x+4)\mathrm{d}x=6.$$

2 可动边界的变分问题及其他问题

对于固定边界及可动边界，作为极值函数都应当满足泛函的欧拉方程．对于可动边界来说，极值函数所欠的条件，就应当由泛函极值的必要条件 $\delta J=0$ 来补足，由此而得到的边界条件叫做极值函数的**自然边界条件**．

2.1 可动边界的最简问题

求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y;y')\mathrm{d}x \tag{2-1}$$

的极值．为方便起见，先假定点 $A(x_0,y_0)$ 固定，而点 $B(x_1,y_1)$ 是可动的．由实现极值的基本必要条件 $\delta J=0$，并考虑到极值函数已满足欧拉方程且 A 点固定，则得 B 点的边界条件

$$(F-y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1=0. \tag{2-2}$$

2.1.1 无关性

如果 δx_1 与 δy_1 是相互无关的，由于 δx_1 与 δy_1 的任意性，那么，由(2-2)式得

$$\begin{cases}(F-y'F_{y'})\big|_{x=x_1}=0,\\ F_{y'}\big|_{x=x_1}=0.\end{cases} \tag{2-3}$$

2.1.2 相关性

如果点 B 沿着某一曲线 $y_1=\varphi_2(x_1)$ 移动，将 $\delta y_1=\varphi'_2(x_1)\delta x_1$ 代入(2-2)式，由 δx_1 的任意性，那么得

$$[F+(\varphi'_2-y')F_{y'}]_{x=x_1}=0. \tag{2-4}$$

将(2-4)式与 $y_1=\varphi_2(x_1)$ 联立即可确定 x_1 与 y_1．当边界点 $B(x_1,y_1)$ 沿曲线 $y_1=\varphi_2(x_1)$ 移动时，(2-4)式建立了两条曲线在边界点处斜率 φ'_2 与 y' 之间的关系，且把这个关系叫做**斜截条件**．

如果边界点 $A(x_0,y_0)$ 沿着曲线 $y_0=\varphi_1(x_0)$ 移动，那么在点 $A(x_0,y_0)$ 处，有斜截条件

$$[F+(\varphi'_1-y')F_{y'}]_{x=x_0}=0. \tag{2-5}$$

2.1.3 广泛形式的斜截条件

当曲线 $y=y(x)$ 的两个端点 $A(x_0,y_0)$ 及 $B(x_1,y_1)$ 在由隐函数所表示的曲线 $\varphi_1(x,y)=0$，$\varphi_2(x,y)=0$ 上移动时，斜截条件为

$$\begin{cases}\left[(F-y'F_{y'})/\varphi_{1x}\right]_{x=x_0}=\left[F_{y'}/\varphi_{1y}\right]_{x=x_0},\\ \left[(F-y'F_{y'})/\varphi_{2x}\right]_{x=x_1}=\left[F_{y'}/\varphi_{2y}\right]_{x=x_1}.\end{cases}\tag{2-6}$$

这里,假定 φ_1 及 φ_2 有连续的偏导数,并且 $\varphi_{1x}^2+\varphi_{1y}^2>0$ 及 $\varphi_{2x}^2+\varphi_{2y}^2>0$.

特别,当两曲线为直线,且平行于 y 轴:$x=x_0$ 及 $x=x_1$,则斜截条件为

$$F_{y'}|_{x=x_0}=0,\quad F_{y'}|_{x=x_1}=0.$$

例 1 求泛函

$$\begin{cases}J[y]=\int_0^{x_1}\dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}\mathrm{d}x,\\ y(0)=0,y_1=x_1-5\end{cases}$$

的极值.如图 2-1 所示.

解 欧拉方程的初积分为

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}-\frac{(y')^2}{y\sqrt{1+(y')^2}}=C,$$

化简,得

$$y\sqrt{1+(y')^2}=C_1,$$

其中 $C_1=\dfrac{1}{C}$.

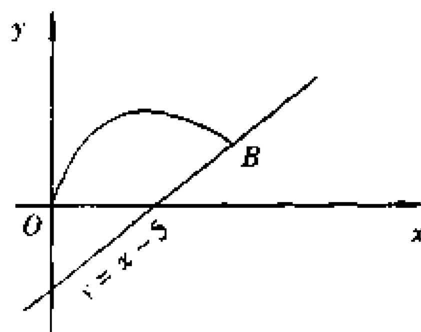


图 2-1

引入参数 t,使 $y'=\cot t$,就得

$$y=\frac{C_1}{\sqrt{1+\cot^2 t}}=C_1\sin t,$$

从而

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=C_1\sin t\mathrm{d}t,\quad x=-C_1\cos t+C_2.$$

因此,所求曲线的参数方程为

$$x-C_2=-C_1\cos t,\quad y=C_1\sin t.$$

消去参数 t,即得欧拉方程的积分曲线为圆:

$$(x-C_2)^2+y^2=C_1^2.$$

由第一个边界条件得出 $C_2=C_1$.

就此例而言,斜截条件(2-4)化为正交条件 $1+\varphi'y'=0$;由此知直线 $y_1=x_1-5$ 应该在圆的直径上,因此,所得圆的圆心是直线 $y_1=x_1-5$ 与横轴的交点(5,0).于是所求的圆为

$$(x-5)^2+y^2=5^2\quad 或\quad y=\pm\sqrt{10x-x^2}.$$

这就是说极值只能在 $y=\sqrt{10x-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{10x-x^2}$ 两圆弧上达到.

2.2 含多个函数的泛函的可动边界问题

如果在寻求泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z;y',z')\mathrm{d}x \tag{2-7}$$

的极值时，其边界点之一，例如 $B(x_1,y_1,z_1)$ 可以移动，而另一个边界点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 固定（或两个边界点都可以移动），那么，极值只能在欧拉方程组

$$\begin{cases}F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0,\\ F_z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}=0\end{cases}$$

的积分曲线上达到. 欧拉方程组的通解包含4个任意常数. 由于 A 点的坐标已知，一般可以减少两个任意常数，另外两个任意常数则由 $\delta J=0$ 得到的方程来确定. 而

$$\delta J=[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}|_{x=x_1}\delta z_1=0. \tag{2-8}$$

2.2.1　无关性

如果变分 $\delta x_1,\delta y_1,\delta z_1$ 是无关的，则得边界条件为

$$\begin{cases}[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]_{x=x_1}=0,\\ F_{y'}|_{x=x_1}=0,\\ F_{z'}|_{x=x_1}=0.\end{cases} \tag{2-9}$$

2.2.2　相关性

(1)如果点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 沿着某一曲线 $y_1=\varphi(x_1),z_1=\psi(x_1)$ 移动，于是

$$\delta y_1=\varphi'(x_1)\delta x_1,\quad \delta z_1=\psi'(x_1)\delta x_1,$$

将它们代入(2-8)式，由于 δx_1 是任意的，那么，得边界条件

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}+(\psi'-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0. \tag{2-10}$$

将 $y_1=\varphi(x_1),z_1=\psi(x_1)$ 与(2-10)式联立，即可确定点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 的位置.

若边界点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 是可动的，则仿 B 点同样处理.

(2)如果点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 沿某一曲面 $z_1=\varphi(x_1,y_1)$ 移动，由于

$$\delta z_1=\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi'_{y_1}\delta y_1,$$

且 $\delta x_1,\delta y_1$ 是任意的和无关的，那么，由(2-8)式得边界条件

$$\begin{cases}[F-y'F_{y'}+(\varphi'_x-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0,\\ [F_{y'}+\varphi'_yF_{z'}]_{x=x_1}=0.\end{cases} \tag{2-11}$$

将 $z_1=\varphi(x_1,y_1)$ 与(2-11)式联立，即可确定点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 的位置.

若边界点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 是可动的，则仿 B 点同样处理.

对于泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)\mathrm{d}x$$

来说，当点 $B(x_1,y_{11},y_{21},\cdots,y_{n1})$ 是可动的，则在该点有

$$\left(F-\sum_{i=1}^{n}y'_iF_{y'_i}\right)\Big|_{x=x_1}\delta x_1+\sum_{i=1}^{n}F_{y_i}\Big|_{x=x_1}\delta y_{i1}=0.$$

例 2 求泛函

$$J[y,z]=\int_0^{x_1}[(y')^2+(z')^2+2yz]\mathrm{d}x$$

的极值,已知 $y(0)=0,z(0)=0$ 且点(x_1,y_1,z_1)可以沿着平面 $x=x_1$ 移动.

解 因欧拉方程组为

$$\begin{cases}z''-y=0,\\ y''-z=0,\end{cases}$$

由此得 $y^{(4)}-y=0$,于是有

$$y=C_1\cosh x+C_2\sinh x+C_3\cos x+C_4\sin x,$$

$$z=y''=C_1\cosh x+C_2\sinh x-C_3\cos x-C_4\sin x.$$

由 $y(0)=z(0)=0$ 得 $C_1=C_3=0$;在点(x_1,y_1,z_1)处条件(2-8)化成条件

$$F_{y'}|_{x=x_1}=0 \quad 和 \quad F_{z'}|_{x=x_1}=0.$$

对于本例,则为

$$y'(x_1)=0 \quad 和 \quad z'(x_1)=0,$$

或

$$C_2\cosh x_1+C_4\cos x_1=0 \text{ 和 } C_2\cosh x_1-C_4\cos x_1=0.$$

两式相加,得 $C_2=0$;相减,得 $C_4\cos x_1=0$.若 $C_4=0$,则极值只能在直线 $y=0,z=0$ 上达到;当 $\cos x_1=0$,即 $x_1=n\pi+\frac{\pi}{2}$, n 为整数时, C_4 可以为任意常数,于是

$$y=C_4\sin x,\quad z=-C_4\sin x.$$

不难验证,对任意的 C_4 都有 $J[y,z]=0$.

2.3 含高阶导数的泛函的可动边界问题

比如,求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y;y',y'')\mathrm{d}x \tag{2-12}$$

的极值.为方便计,设 $y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0$ 是已知的,而端点 $B(x_1,y_1)$是可动的.所述泛函的欧拉-泊松方程的通解含有 4 个任意常数,其中两个由已知条件来确定,另外两个则要由 $\delta J=0$ 来确定,而

$$[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}]_{x=x_1}\delta x_1+[F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}]_{x=x_1}\delta y_1+F_{y''}|_{x=x_1}\delta y_1'=0. \tag{2-13}$$

2.3.1 无关性

若 $\delta x_1,\delta y_1$和 $\delta y_1'$之间是无关的,则得边界条件为

$$\begin{cases}[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}]_{x=x_1}=0,\\ [F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}]_{x=x_1}=0,\\ F_{y''}|_{x=x_1}=0.\end{cases}\tag{2-14}$$

2.3.2 相关性

(1)若 x_1,y_1,y'_1 之间满足 $y_1=\varphi(x_1),y'_1=\psi(x_1)$;由于

$$\delta y_1=\varphi'(x_1)\delta x_1,\quad \delta y'_1=\psi'(x_1)\delta x_1.$$

且代入(2-13)式,得

$$[F-(y'-\varphi')(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''})-(y''-\psi')F_{y''}]_{x=x_1}=0.\tag{2-15}$$

条件(2-15)与 $y_1=\varphi(x_1),y'_1=\psi(x_1)$一起可确定出 x_1,y_1 及 y'_1.

(2)若 x_1,y_1,y'_1 之间满足关系 $\varphi(x_1,y_1,y'_1)=0$,则在 $\delta x_1,\delta y_1$ 和 $\delta y'_1$ 中有两个可保持任意性,而第三个由方程

$$\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi'_{y_1}\delta_{y_1}+\varphi'_{y'_1}\delta y'_1=0$$

来确定.例如,当 $\varphi'_{y'_1}\neq 0$时,

$$\delta y'_1=-\frac{\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi'_{y_1}\delta y_1}{\varphi'_{y'_1}},$$

代入(2-13)式,得

$$\begin{cases}\left[F-y'(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''})-F_{y''}\left((y''+\frac{\varphi'_{x_1}}{\varphi'_{y'_1}}\right)\right]_{x=x_1}=0,\\ \left[F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}-\frac{F_{y''}\varphi'_{y_1}}{\varphi'_{y'_1}}\right]_{x=x_1}=0.\end{cases}\tag{2-16}$$

条件(2-16)与方程 $\varphi(x_1,y_1,y'_1)=0$一起可确定出 x_1,y_1,y'_1.

若点 $A(x_0,y_0)$是可动的,则对于 A 点而言可得同样的一些条件.

例3 求泛函

$$J[y]=\int_0^1[1+(y'')^2]\mathrm{d}x$$

的极值,已知 $y(0)=0,y'(0)=1,y(1)=1$,而 $y'(1)$是任意的.

解 因欧拉-泊松方程为$y^{(4)}=0$,由此可得

$$y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3.$$

由 $y(0)=0$,得 $C_1=0$;由 $y'(0)=1$,得 $C_2=1$;由 $y(1)=1$,得 $C_3+C_4=0$.由于$\delta x_1=0$和 $\delta y_1=0$,而 $\delta y'_1$ 是任意的,于是条件(2-13)化为

$$F_{y''}|_{x=x_1}=0\quad 或\quad y''(1)=0,$$

而 $y''=2C_3+6C_4x$;在 $x=1$ 时,有 $2C_3+6C_4=0$,并注意到 $C_3+C_4=0$,则得 $C_3=$

$C_4=0$. 因此,极值只能在直线 $y=x$ 上达到.

2.4 含多元函数的泛函的自然边界条件

以泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_D F(x,y;u;u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-17}$$

为例来推导自然边界条件.设曲面 $u=u(x,y)$ 使泛函(2-17)达到极值.该泛函的变分为

$$\delta J=\iint_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_l\left(F_{u_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-F_{u_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\delta u\mathrm{d}s,$$

由于极值函数 $u(x,y)$满足欧拉方程,极值的基本必要条件 $\delta J=0$ 及 δu 的任意性,于是在域 D 的边界线 l 上下式成立

$$F_{u_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-F_{u_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=0, \tag{2-18}$$

其中 s 是边界线 l 的弧长.

例 4 求泛函

$$J[u]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-x\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的欧拉方程及自然边界条件.

解 欧拉方程即是拉普拉斯方程:

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

自然边界条件为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-y\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}-x\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=0.$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\cos(\boldsymbol{n},x),\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=-\cos(\boldsymbol{n},y),$$

因而,自然边界条件化为

$$\frac{\partial u}{\partial n}=y\cos(\boldsymbol{n},x)+x\cos(\boldsymbol{n},y).$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 的方向是区域 D 的边界线 l 的外法线方向.

2.5 混合问题

泛函的形式是多种多样的.实际问题中有些泛函除了通常的积分外,还含有附加项,这些项依赖于函数在积分区域的端点或在积分区域的边界上的值.当研究这

类泛函时，依然得到以前的欧拉方程，附加项只对边界条件的形式有所影响.

(1) 考察泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y;y')\mathrm{d}x+\Phi(x_0,y_0,x_1,y_1),$$

其中 Φ 为连续可微函数.

由泛函取极值的基本必要条件 $\delta J=0$，以及极值函数依然满足欧拉方程，得

$$[(F-y'F_{y'})\delta x_1+F_{y'}\delta y_1]_{x=x_1}-[(F-y'F_{y'})\delta x_0+F_{y'}\delta y_0]_{x=x_0}+$$
$$\Phi_{x_0}\delta x_0+\Phi_{y_0}\delta y_0+\Phi_{x_1}\delta x_1+\Phi_{y_1}\delta y_1=0,\tag{2-19}$$

其中偏导数 $\Phi_{x_0},\Phi_{y_0},\Phi_{x_1},\Phi_{y_1}$ 都在 (x_0,y_0,x_1,y_1) 上取值.

若边界点 (x_0,y_0) 和 (x_1,y_1) 沿着已给曲线 $y_0=\varphi(x_0)$ 和 $y_1=\psi(x_1)$ 移动，则

$$\delta y_0=\varphi'(x_0)\delta x_0$$

和

$$\delta y_1=\psi'(x_1)\delta x_1,$$

将它们代入(2-19)式，并考虑到 δx_1 及 δy_1 的任意性，(2-19)式化为

$$\begin{cases}[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_0}-\Phi_{x_0}-\Phi_{y_0}\varphi'=0,\\ [F+(\psi'-y')F_{y'}]_{x=x_1}+\Phi_{x_1}+\Phi_{y_1}\psi'=0.\end{cases}\tag{2-20}$$

(2) 考察泛函

$$J[u]=\iint_D F(x,y;u;u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_l\Phi(s,u,u_s)\mathrm{d}s.$$

取从边界 l 的某定点算起的弧长作为曲线积分的自变量，u_s 为 u 沿边界 l 的导数. 自然边界条件为

$$\left[F_{u_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-F_{u_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\Phi_u-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi_{u_s}\right]_l=0.\tag{2-21}$$

例 5　考察泛函

$$J[u]=\iint_D(u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_l f(s)u\mathrm{d}s,$$

其中 $f(s)$ 是边界 l 上的已知函数.

解　欧拉方程为拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad (x,y)\in D.$$

自然边界条件为

$$\left[2u_x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-2u_y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+f(s)\right]=0,$$

由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ 是 l 的切线的方向余弦，因而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ 及 $\left(-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)$ 是 l 的外法线的方向余弦，则自然边界条件化为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_l=-\frac{1}{2}f(s).$$

2.6 具有角点的极值曲线

对于极值曲线和容许曲线，曾假定它们是光滑的，但在某些情况中却没有这样一条曲线给出某泛函的极值，因此，就需要考虑更广泛的函数类，以寻求达到极值的曲线. 比如，在这样的曲线类中，它在个别点没有切线，但有确定的左、右切线(**有角点的曲线**).

在泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y;y')\mathrm{d}x$$

的极值问题中，具有角点的解应满足如下定理：

定理 设在连接两点 $A(x_0,y_0)$ 及 $B(x_1,y_1)$ 的一切逐段光滑的曲线中(见图 2-2)，逐段光滑曲线：$y=y(x)$ 给泛函 J 以极值，则

1° 曲线是由有限个极值曲线弧组成；

2° 并且在曲线的每一个角点 $M(\xi,\eta)$ 上，满足条件

$$\begin{cases}[F-y'F_{y'}]_{x=\xi-0}=[F-y'F_{y'}]_{x=\xi+0},\\ F_{y'}|_{x=\xi-0}=F_{y'}|_{x=\xi+0}.\end{cases}\tag{2-22}$$

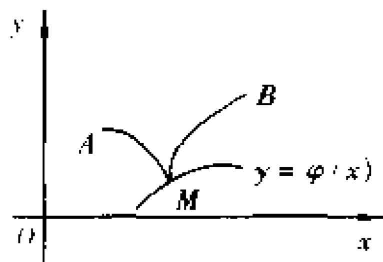


图 2-2

若角点 $M(\xi,\eta)$ 在曲线 $y=\varphi(x)$ 上移动，则得

$$[F-(y'-\varphi')F_{y'}]_{x=\xi-0}=[F-(y'-\varphi')F_{y'}]_{x=\xi+0}.\tag{2-23}$$

值得注意的是：以上各式两边的 y 都应满足欧拉方程，但两边的 y 一般具有不同的表示式.

例 6 求泛函

$$J[y]=\int_0^2(y')^2(1-y')^2\mathrm{d}x$$

具有角点的极值曲线，设边界条件为 $y(0)=0,y(2)=1$.

解 由于 $F=F(y')$，所以直线 $y=ax+b$ 为极值曲线. 角点所满足的条件为

$$\begin{cases}[-(y')^2(1-y')(1-3y')]_{x=\xi-0}\\ =[-(y')^2(1-y')(1-3y')]_{x=\xi+0},\\ [2y'(1-y')(1-2y')]_{x=\xi-0}\\ =[2y'(1-y')(1-2y')]_{x=\xi+0}.\end{cases}$$

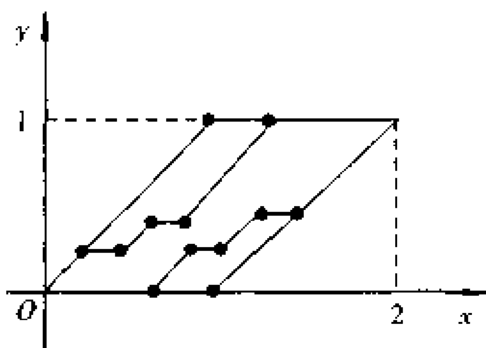


图 2-3

在 $y'(\xi-0)=0$ 和 $y'(\xi+0)=1$ 时或 $y'(\xi-0)=1$ 和 $y'(\xi+0)=0$ 时，上述两个条件是成立的. 因而，具有角点的极值曲线只能由属于 $y=C_1$ 和 $y=x+C_2$ 两族中的直线段所组成. 如图 2-3 所示.

2.7　单向变分问题

在某些泛函的变分问题中，容许曲线还需加上一些限制.例如，考虑泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y;y')\mathrm{d}x$$

在不等式

$$y(x)\geqslant\varphi(x)$$

约束条件下的极值问题，其中 $\varphi(x)$ 是给定的具有连续导数的函数.

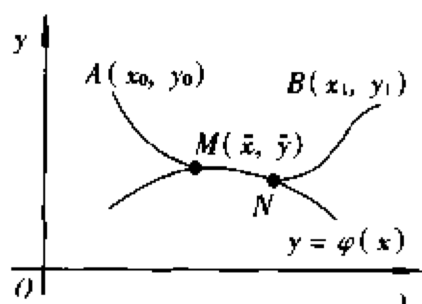


图 2-4

如图 2-4 所示，设曲线 $\widehat{AMNB}$ 使泛函 $J[y]$ 达到极值.由于 $\widehat{AM}$ 与 $\widehat{NB}$ 均为极值曲线，M 点与 N 点应满足如下的条件：

$\widehat{AM}$ 与曲线 $y=\varphi(x)$ 在点 M 应有公共切线，即 $y'(\bar{x})=\varphi'(\bar{x})$；在点 N 也有同样的情形.

3　条件极值的变分问题

所谓**条件极值的变分问题**就是这样的问题，在求泛函 J 的极值时，对它所依赖的函数附加了一些约束条件.求泛函的条件极值和求普通函数的条件极值相类似，即采用拉格朗日乘子法.

3.1　有限型约束条件

形如 $\varphi(x;y_1,y_2,\cdots,y_n)=0$ 的约束条件叫做**有限型约束条件**.

定理 1　泛函

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)\mathrm{d}x \tag{3-1}$$

在约束条件

$$\varphi_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_n)=0\qquad(i=1,2,\cdots,m;m<n) \tag{3-2}$$

及边界条件 $y_j(x_0)=y_{j0},y_j(x_1)=y_{j1}(j=1,2,\cdots,n)$ 下取得极值的函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，必满足由泛函

$$J^*=\int_{x_0}^{x_1}(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}F^*\mathrm{d}x \tag{3-3}$$

所给出的欧拉方程组：

$$F^{*}_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^{*}_{y'_j}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{3-4}$$

其中 $\lambda_i(x)$为 m 个**拉格朗日乘子**.在(3-3)式的变分中,把 $y_j(j=1,2,\cdots,n)$和 $\lambda_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$都看作是泛函 J^* 的自变量,所以 $\varphi_i=0(i=1,2,\cdots,m;m<n)$同样也可以看作是泛函 J^* 的欧拉方程.(3-4)式也可以写成

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_j}\right)=0 \quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{3-5}$$

例 1 短程线问题.

求在曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上两定点 $A(x_1,y_1,z_1)$和 $B(x_2,y_2,z_2)$间的最短距离.

解 这个问题归结为在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 及 $y(x_1)=y_1,z(x_1)=z_1,y(x_2)=y_2,z(x_2)=z_2$ 下,求泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,\mathrm{d}x$$

的极小值.取辅助泛函

$$J^*=\int_{x_1}^{x_2}\left[\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(x)\varphi(x,y,z)\right]\mathrm{d}x,$$

它的欧拉方程为

$$\begin{cases}\lambda\varphi_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0,\\[2ex]\lambda\varphi_z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0.\end{cases}$$

由这两个方程及约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 可以确定出因子 $\lambda(x)$及极值曲线 $y=y(x)$及 $z=z(x)$.

3.2 微分型约束条件

形如 $\varphi(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)=0$ 的约束条件叫做**微分型约束条件**.

定理 2 泛函(3-1)在约束条件

$$\varphi_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)=0 \quad (i=1,2,\cdots,m;m<n) \tag{3-6}$$

及边界条件 $y_j(x_0)=y_{j0},y_j(x_1)=y_{j1}(j=1,2,\cdots,n)$下取得极值的函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,必满足由泛函

$$J^*=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i\right)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}F^*\,\mathrm{d}x \tag{3-7}$$

所给出的欧拉方程组:

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'_j}\right)=0 \quad (j=1,2,\cdots,n), \tag{3-8}$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_j}\right)=0\quad (j=1,2,\cdots,n).\tag{3-9}$$

在(3-7)式的变分中,把 $y_j(j=1,2,\cdots,n)$和 $\lambda_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$都看作是泛函 J^* 的自变量,所以 $\varphi_i=0(i=1,2,\cdots,m;m<n)$也同样可以看作是泛函 J^* 的欧拉方程.

3.3　积分型约束条件

在一切有定长 l 的封闭平面曲线中,试求一条围成最大面积的曲线,这就是古典的等周问题.近代所谓等周问题,指的是更为一般的一类问题,即求泛函(3-1)的极值,使满足所谓的**等周条件**

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)\mathrm{d}x=l_i\quad(i=1,2,\cdots,m),\tag{3-10}$$

其中 l_i 是常数.形如(3-10)式的约束条件,叫做**积分型约束条件**.

定理3　泛函(3-1)在约束条件(3-10)及边界条件 $y_j(x_0)=y_{j0},y_j(x_1)=y_{j1}$ $(j=1,2,\cdots,n)$下取得极值的函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,必满足由泛函

$$J^*=\int_{x_0}^{x_1}(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{m}\lambda_il_i=\int_{x_0}^{x_1}F^*\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{m}\lambda_il_i\tag{3-11}$$

所给出的欧拉方程组:

$$F^*_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^*_{y'_j}=0\quad(j=1,2,\cdots,n),\tag{3-12}$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_j}\right)=0\quad(j=1,2,\cdots,n).\tag{3-13}$$

在(3-11)式的变分中,把 y_j 和$\lambda_i(j=1,2,\cdots,n;i=1,2,\cdots,m;m<n)$都看作泛函的自变量,但 λ_i 在这里是常量,所以(3-10)式同样也可以看作是泛函 J^* 的欧拉方程.

有下面的规则:为了得到等周问题(即在$\int_{x_0}^{x_1}\varphi_i\mathrm{d}x=l_i(i=1,2,\cdots,m)$关系下,寻求泛函 $J=\int_{x_0}^{x_1}F\mathrm{d}x$ 的极值的问题)的基本必要条件,只需作辅助泛函

$$J^{**}=\int_{x_0}^{x_1}(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i)\mathrm{d}x,\lambda_i\text{ 是常数},$$

并写出它的欧拉方程即可.

在欧拉方程组的通解里面的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_{2n}$以及常数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,由边界条件

$$y_j(x_0)=y_{j0},\quad y_j(x_1)=y_{j1}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

及等周条件 $\int_{x_0}^{x_1}\varphi_i\mathrm{d}x = l_i$ 来确定.

相关原理:在约束条件

$$\alpha_i = \int_{x_0}^{x_1}\varphi_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)\mathrm{d}x \ (i = 1,2,\cdots,m)$$

下求泛函

$$\alpha_0 = \int_{x_0}^{x_1}\varphi_0(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)\mathrm{d}x$$

极值的变分问题,和在约束条件

$$\alpha_i = \int_{x_0}^{x_1}\varphi_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)\mathrm{d}x$$

$$(i = 0,1,2,\cdots,s-1,s+1,\cdots,m)$$

下求泛函

$$\alpha_s = \int_{x_0}^{x_1}\varphi_s(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)\mathrm{d}x$$

极值的变分问题完全相同.

相关原理说明,在这种类型的泛函极值问题内,其中任一泛函在其余的泛函条件下的极值问题,都是由相同的欧拉方程相联系着的.例如,定长封闭平面曲线所围面积为极大的问题和围有定面积的封闭平面曲线的长为极小的问题,有相同的欧拉方程和公共的极值曲线族,这就是相关问题.

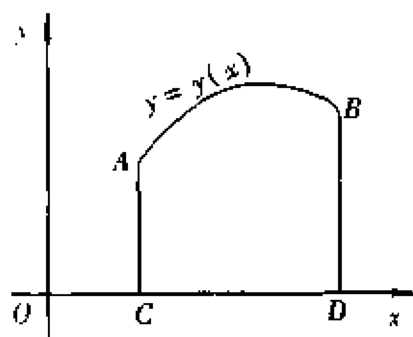


图 3-1

例 2 求长度为一定($= l$)的平面曲线 $y = y(x)$,使如图 3-1 所示的曲边梯形 $CABD$ 的面积为极大.

解 问题归结为:在等周条件

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x = l$$

下,求泛函

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y\mathrm{d}x,\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2$$

的极值.

作辅助泛函

$$S^{**} = \int_{x_1}^{x_2}(y + \lambda\sqrt{1+(y')^2})\mathrm{d}x.$$

该泛函的欧拉方程有初积分

$$y + \lambda\sqrt{1+(y')^2} - \frac{\lambda(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

或

$$y - C_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

引入参数 t,使 $y' = \tan t$,于是得

$$y - C_1 = -\lambda\cos t;$$

由于

$$dx = \frac{dy}{\tan t} = \lambda\cos t dt,$$

因而得 $x = \lambda\sin t + C_2$.这样就得到用参数形式表示的极值曲线:

$$\begin{cases} x - C_2 = \lambda\sin t, \\ y - C_1 = -\lambda\cos t. \end{cases}$$

消去 t,得一族圆:

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2.$$

常数 C_1, C_2 和 λ 由条件

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}dx = l$$

来确定.

例3 求泛函 $P = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(y')^2}dx$ 在约束条件

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}dx = l(=\text{常数})$$

下的极值.

解 作辅助泛函

$$P^{**} = \int_{x_1}^{x_2}(y+\lambda)\sqrt{1+(y')^2}dx,$$

该泛函的欧拉方程的初积分为

$$(y+\lambda)\sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y+\lambda)(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1,$$

于是得

$$y + \lambda = C_1\sqrt{1+(y')^2}.$$

令 $y' = \sinh t$,则

$$y + \lambda = C_1\cosh t,$$

$$dx = \frac{dy}{\sinh t} = C_1 dt,$$

于是得 $x = C_1 t + C_2$.消去 t,得

$$y + \lambda = C_1\cosh\frac{x - C_2}{C_1},$$

这是一族悬链线.

上面求等周问题的解的规则,可以推广到更为复杂的泛函上面去.

4 变分原理与变分问题的直接方法

许多物理、力学问题既可以化为微分方程的定解问题,也可以归结为变分问题,即某物理量的极值问题,相应的变分原理指出两种是等价的.由于求解微分方程通常是比较困难的,因而在求解变分问题时,希望不通过求解欧拉方程而直接从泛函出发,找出使泛函实现极值的函数或曲线的近似表达式,这种方法叫做变分问题的直接方法.如果对于微分方程的边值问题能给出相应的泛函极值问题,使泛函的欧拉方程即为所给的微分方程,就可以运用变分问题的直接解法.

4.1 哈密顿原理与最小位能原理

4.1.1 哈密顿原理

哈密顿(Hamilton)原理是指任何力学系统,若给定时刻 $t=t_0$ 的初始状态和时刻 $t=t_1$ 的终结状态,则真实运动与任何容许运动的区别,在于真实运动使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t \tag{4-1}$$

的变分 $\delta J=0$,其中 $L=T-U$,L 称为**拉格朗日函数**,T 和 U 分别表示力学系统在时刻 t 的**动能**和**位能**.如果用 T、U 和 L 分别表示系统在时刻 t 的动能密度、位能密度和拉格朗日密度函数,那么有

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\iiint_V L\mathrm{d}V, \tag{4-2}$$

其中 V 表示该系统所占据的空间区域.

应用这一原理,可推出实际运动所满足的微分方程.

例 1 已知质点系的质量为 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$,坐标为 (x_i,y_i,z_i),在质点 i 上作用着的力 F_i 是以 $-U$ 为力函数(即势函数)的:

$$F_{x_i}=-\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad F_{y_i}=-\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad F_{z_i}=-\frac{\partial U}{\partial z_i}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

而势函数 U 只依赖于质点的坐标,这是一保守力场,亦即

$$U=U(x_1,y_1,z_1;x_2,y_2,z_2;\cdots;x_n,y_n,z_n).$$

质点系的动能是

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2),$$

其中 $\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i$ 分别代表 $\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t}$.由哈密顿原理,泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\mathrm{d}t$$

的变分 $\delta J=0$，由此得欧拉-泊松方程组

$$m_i\ddot{x}_i=F_{x_i},\ m_i\ddot{y}_i=F_{y_i},\ m_i\ddot{z}_i=F_{z_i}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

这就是 n 个质点的 $3n$ 个牛顿(Newton)运动方程.

如果运动还受另外一组独立关系

$$\varphi_j(t,x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n;z_1,z_2,\cdots,z_n)=0$$
$$(j=1,2,\cdots,m;m<3n)$$

的约束，那么独立的变量只剩下 $3n-m$ 个. 如果用 $3n-m$ 个新的变量(或称广义坐标)

$$q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m}$$

来表示原来的变量 x_i,y_i,z_i，亦即

$$\begin{cases}x_i=x_i(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m},t)\\ y_i=y_i(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m},t)\\ z_i=z_i(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m},t)\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

则 U,T 应该写成

$$\begin{cases}U=U(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m},t),\\ T=T(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m};\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_{3n-m},t).\end{cases}$$

由哈密顿原理，得欧拉-泊松方程组

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)=0\quad(i=1,2,\cdots,3n-m),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,3n-m),$$

这个方程也叫做保守系统的拉格朗日方程组.

例 2 弦的微小横振动问题.

设有一根绷紧且其长度为 l 两端固定的柔软均匀的弦 AB，弦的单位长度的密度为 ρ，由于弦被拉紧，弦内出现张力为 N，因此弦就呈直线状态而静止，一旦弦上有任何一部分不是直线状态或不静止，由于张力的作用弦就开始振动，试求弦的振动规律.

解 设弦的横向位移为 $w(x,t)$，整个弦的动能为

$$T=\frac{\rho}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x,$$

而势能为

$$U=N\int_0^l\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}-1\right]\mathrm{d}x\cong N\int_0^l\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x.$$

为了寻找运动方程，应用哈密顿原理，即应该寻求 $w(x,t)$，使弦在 $t_0<t<t_1$ 中的作用量最小，亦即求泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2-N\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

的极值. 由 $\delta J=0$,得弦的振动方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\rho}{N}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.$$

4.1.2 最小位能原理

最小位能原理:在静止的平衡力学系统的所有容许位移中,真实的位移将使位能的变分为零,即

$$\delta U=0, \tag{4-3}$$

如果平衡状态是稳定的,则 U 取极小值.

例 3 梁在横向载荷下的弯曲问题.

设梁的抗弯刚度为 EI,两端固定,受分布载荷 $q(x)$ 作用后发生弯曲变形的垂直位移(或挠度)为 $w(x)$,如图 4-1 所示. 端点固定的条件为

$$\begin{cases} w(0)=w'(0)=0, \\ w(l)=w'(l)=0. \end{cases}$$

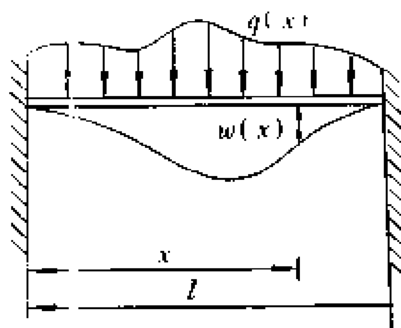


图 4-1

在梁达到平衡时,梁和载荷作为整体的位能达到最小值. 梁的位能等于梁在弯曲时所储存的弯曲能. 假定挠度很小,略去 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ 的高次项,则梁的位能为

$$U_{梁}=\int_0^l \frac{1}{2}EI\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

而载荷 $q(x)$ 在梁变形中做了功,它的势能降低,即

$$U_{载荷}=\int_0^l q(x)w(x)\mathrm{d}x.$$

所以,梁和载荷作为整体时的总势能为

$$U=U_{梁}-U_{载荷}=\int_0^l\left[\frac{1}{2}EI\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2-q(x)w(x)\right]\mathrm{d}x.$$

由最小位能原理,平衡条件为总势能达到最小值,即 $\delta U=0$. 由于

$$\delta U=\int_0^l\left[EI\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4}-q(x)\right]\delta w(x)\mathrm{d}x,$$

则得梁的平衡方程

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4}-q(x)=0.$$

例 4 膜的平衡问题.

设有界膜的平衡位置处于 xOy 平面内,边界固定,并设面密度为 $f(x,y)$ 的外载荷垂直向下作用于膜上,膜发生变形,$u(x,y)$ 表示膜对于平衡位置的垂直位移;设载荷很小,因而发生的形变也很小,略去 u_x、u_y 的高次项;设张力 T 为常数. 膜因偏离平衡位置变为曲面而获得的位能为

$$U_1 = T\iint_D \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

外载荷 $f(x,y)$ 在曲面变形中做了功，它的势能降低为

$$U_2 = \iint_D f(x,y)u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

总位能为

$$U = U_1 - U_2 = \iint_D \left[\frac{1}{2}T(u_x^2 + u_y^2) - fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由最小位能原理，易得膜的平衡方程

$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{1}{T}f(x,y)\quad (x,y)\in D,$$

由假定，有 $u|_l = 0$，这里 l 是区域 D 的边界.

4.2　微分方程边值问题的变分解法

把求解微分方程的边值问题化为与之等价的泛函的变分问题来处理，这叫做变分问题的反问题，这样的泛函又叫做原微分方程的能量积分. 并不是每个微分方程的边值问题都能找到相应的泛函，在一定条件下，算子方程

$$\mathrm{A}u = f$$

的求解问题，可以化为求某个泛函的极小值问题.

设 A 为定义在某个实希尔伯特(Hilbert)空间 H 内的某线性稠密集合 D_{A} 上的线性算子. 若对于每一对元素 $u,v\in D_{\mathrm{A}}$，有 $(\mathrm{A}u,v)=(u,\mathrm{A}v)$，则称 A 为对称算子；若对于 D_{A} 中的任何非零元素 u，都有 $(\mathrm{A}u,u)>0$，则称 A 是正算子，这里 (u,v) 表示 D_{A} 中两元素 u,v 的内积.

定理 1　设 A 是在 D_{A} 上的对称正算子. 若方程

$$\mathrm{A}u = f \tag{4-4}$$

在 D_{A} 上有解，则此解必使泛函

$$J[u] = (\mathrm{A}u,u) - 2(u,f) \tag{4-5}$$

取最小值；反之，在 D_{A} 上使泛函(4-5)取极小的元素，必是方程(4-4)的解.

4.2.1　与自共轭微分方程边值问题等价的变分问题

考虑二阶自共轭微分方程的边值问题：

$$\mathrm{L}y \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)y'] + q(x)y = f(x), \tag{4-6}$$

$$\begin{cases}[\alpha y' - \beta y]_{x=x_0} = 0,\\ [\gamma y' + \delta y]_{x=x_1} = 0.\end{cases} \tag{4-7}$$

其中

1° $p'(x)$，$q(x)$ 和 $f(x)$ 都属于 $C[x_0,x_1]$，

2° $p(x)>0, q(x)\geq 0$,

3° 常数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 非负,且 $\alpha^2+\beta^2\neq 0, \gamma^2+\delta^2\neq 0$,又当 $\alpha\neq 0,\gamma\neq 0$ 时 $\beta^2+\delta^2\neq 0$.

算子 L 的定义域 D_L 为函数集:

$$\{y(x)\mid y(x)\in C^2[x_0,x_1], \text{满足边界条件(4-7)}\}.$$

可以证明 L 是对称的正算子.

方程(4-6)在边界条件(4-7)下所对应的泛函的形式如下:

1° 当 $\alpha\neq 0,\gamma\neq 0$ 时

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}[p(y')^2+qy^2-2yf]\mathrm{d}x+\frac{\beta}{\alpha}p(x_0)y^2(x_0)+\frac{\delta}{\gamma}p(x_1)y^2(x_1). \tag{4-8}$$

2° 当 $\alpha=\gamma=0$ 时

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}[p(y')^2+qy^2-2yf]\mathrm{d}x. \tag{4-9}$$

4.2.2 与自共轭偏微分方程边值问题等价的变分问题

考虑二阶自共轭偏微分方程

$$\mathrm{L}u\equiv -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}+qu=f(x,y),\ (x,y)\in G \tag{4-10}$$

在 G 的边界 Γ 上(Γ 为逐段光滑的封闭曲线)满足下列条件之一

$$u|_\Gamma=0, \tag{4-11}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0, \tag{4-12}$$

$$\left[p\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_\Gamma=0 \tag{4-13}$$

的边值问题.其中,在 $\overline{G}$ 上 $p(x,y)>0, q(x,y)\geq 0, \sigma(x,y)\geq 0(\sigma\not\equiv 0)$; $p(x,y)\in C^1$, $q(x,y), f(x,y), \sigma(x,y)$ 都属于 C.

可以证明算子 L 是对称正算子.

(1)第一边值问题　当边界条件为(4-11)式时,与方程(4-10)相对应的泛函为

$$J[u]=\iint_G\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+qu^2-2fu\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4-14}$$

算子 L 的定义域为

$$M:\{u(x,y)\mid u(x,y)\in C^2(\overline{G}), u|_\Gamma=0\}.$$

(2)第二边值问题　当 $q(x,y)\not\equiv 0$ 时,在边界条件(4-12)下,与方程(4-10)相对应的泛函为

$$J[u]=\iint_G\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+qu^2-2fu\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4-15}$$

算子 L 的定义域为

$$M_0:\left\{u(x,y)\ \middle|\ u(x,y)\in C^2(\overline{G}), \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0\right\}.$$

当 $q(x,y)\equiv 0$ 时，在边界条件(4-12)下，与方程(4-10)相对应的泛函为

$$J[u]=\iint_G\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-2fu\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4-16}$$

算子 L 的定义域为

$$\widetilde{M}_0:\left\{u(x,y)\mid u(x,y)\in C^2(\overline{G}),\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0,\iint_G u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\right\}.$$

(3)第三边值问题　当边界条件为(4-13)式时，与方程(4-10)相对应的泛函为

$$J[u]=\iint_G\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+qu^2-2fu\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_\Gamma\sigma u^2\mathrm{d}s, \tag{4-17}$$

算子 L 的定义域为

$$M_\sigma:\left\{u(x,y)\mid u(x,y)\in C^2(\overline{G}),\left[p\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_\Gamma=0\right\}.$$

4.3 变分问题的直接方法

4.3.1 欧拉有限差分法

考虑泛函

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{4-18}$$

的极值，设边界条件为

$$y(a)=y_0,\quad y(b)=y_n.$$

有限差分的概念是在于不把泛函(4-18)的值在任意的曲线(即所考虑的变分问题的容许曲线)上来考虑，而只是在由 n 个(任给的)直线段所组成的折线上来考虑，如图 4-2 所示. 其步骤为

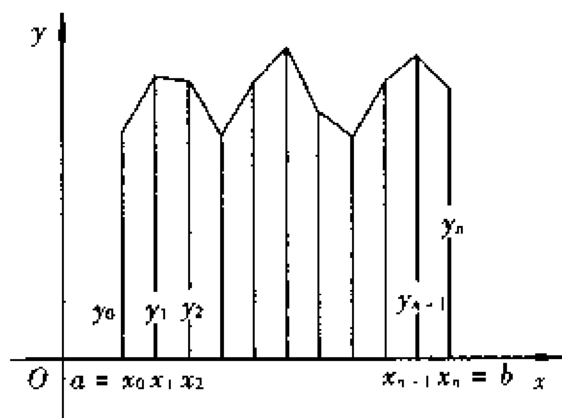


图 4-2

1° 将区间$[a,b]$分成 n 等分，分点为

$$x_0=a,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=b,$$

又
$$x_{i+1}-x_i=\Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

由于折线完全由它的顶点的纵坐标 $y_0,y_1,\cdots,y_n$ 所确定，因而在这折线上，泛函$J[y]$就转换成这些纵坐标的函数，即

$$J[y]\cong\varphi(y_0,y_1,\cdots,y_n)=\sum_{i=0}^{n-1}F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x. \tag{4-19}$$

2° 选取 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$，使 $\varphi(y_0,y_1,\cdots,y_n)$达到极值. 这就是由方程组

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0,\ \cdots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}}=0$$

来确定 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$.

由此,可以用所得到的折线表示变分问题的近似解.从理论上说,若将区间$[a,b]$分得愈细,则所得近似解就会愈精确.

4.3.2 极小化序列

设函数列 $w_1(x),w_2(x),\cdots,w_n(x),\cdots$是光滑的,且满足下列条件

1° 满足相应的边界条件;

2° 任意有限个函数都是线性无关的;

3° 具有完备性.

称 $w_1(x),w_2(x),\cdots,w_n(x),\cdots$为**坐标函数系**.

设泛函 $J[y]$在 $y=y(x)$上实现极小值 d.用坐标函数系构成一系列容许函数作为极值函数 $y(x)$的各级近似函数:

$$\begin{aligned}&y_1=a_1^{(1)}w_1,\\&y_2=a_1^{(2)}w_1+a_2^{(2)}w_2,\\&\cdots\\&y_n=a_1^{(n)}w_1+a_2^{(n)}w_2+\cdots+a_n^{(n)}w_n,\\&\cdots\end{aligned}$$

将 y_k 代入泛函,为使泛函 $J[y_k]$取极值,可由

$$\frac{\partial J[y_k]}{\partial a_i^{(k)}}=0\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

来确定常数 $a_i^{(k)}(i=1,2,\cdots,k)$.以 d 表示真正的极小值,则 $J[y_k]\geqslant d$.当用 y_{k+1}代替 y_k 时,由于 y_{k+1}比 y_k 多了一个可供选择的坐标函数,所以 $J[y_{k+1}]\leqslant J[y_k]$.如此继续下去,可得一列函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$使

$$J[y_1]\geqslant J[y_2]\geqslant\cdots\geqslant J[y_n]\geqslant\cdots\geqslant d,$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}J[y_n]=d$.这种能使泛函的各级近似值逐步逼近真正极值 d 的一系列函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$,称为泛函 $J[y]$的**极小化序列**.

4.3.3 里兹法

以最简泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y;y')\mathrm{d}x,y(x_0)=y(x_1)=0\tag{4-20}$$

为例来说明**里兹**(Ritz)**法**求解泛函变分问题的思路和步骤.里兹法的概念是不把泛函 $J[y]$的值放在变分问题里的任意的容许曲线上来考虑,而是放在具有常系数的线性组合式

$$y_n=a_1^{(n)}w_1(x)+a_2^{(n)}w_2(x)+\cdots+a_n^{(n)}w_n(x)$$

上来考虑,即在有限维子空间上求极小值作为泛函变分问题(4-20)的近似极小值.步骤如下:

(1)选取一适当的坐标函数系

$$w_1(x),w_2(x),\cdots,w_n(x),\cdots$$

作出前 n 个坐标函数的线性组合式：

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} w_i(x), \tag{4-21}$$

并将 y_n 代入 $J[y]$，得

$$J[y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F\left[x, \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} w_i(x), \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} w'_i(x)\right] \mathrm{d}x$$
$$= \varphi(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)}).$$

(2)对于确定的 n，选取适当的 $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)}$，使函数 $\varphi(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)})$ 达到极值，也就是 $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)}$ 应由方程组

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i^{(n)}} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4-22}$$

来确定，把由(4-22)式求得的 $a_i^{(n)}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 代入(4-21)式，所得 y_n 即为变分问题(4-20)的近似解.

里兹法也适用于泛函 $J[z(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$ 和依赖于多个函数的泛函.

当 n 愈大时，所得近似解也就愈精确.

例 5　求泛函

$$J[y] = \int_0^1 [(y')^2 - y^2 - 2xy] \mathrm{d}x, y(0) = y(1) = 0$$

的近似解.

解　选取坐标函数系

$$w_i(x) = (1 - x)x^i \quad (i = 1, 2, \cdots, n, \cdots),$$

其中每个函数都满足所给的边界条件.设待求的近似解为

$$y_2 = a_1^{(2)}(1 - x)x + a_2^{(2)}(1 - x)x^2.$$

代入泛函 $J[y]$，计算出积分，并令

$$\frac{\partial J[y_2]}{\partial a_1^{(2)}} = 0, \quad \frac{\partial J[y_2]}{\partial a_2^{(2)}} = 0,$$

由此可得 $a_1^{(2)} = 71/369, a_2^{(2)} = \frac{7}{41}$，于是得近似解为

$$y_2 = \frac{71}{369}(1 - x)x + \frac{7}{41}(1 - x)x^2.$$

例 6　求下列问题的近似解

$$\begin{cases} -(u_{xx} + u_{yy}) = 2, \\ u|_l = 0, \end{cases}$$

其中 l 为矩形域 $D: -a \leqslant x \leqslant a, -b \leqslant y \leqslant b$ 的边界.

解　由(4-14)式得

$$J[u] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 4u\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于方程及边界条件关于坐标是对称的，因此解关于坐标轴也应是对称的，于

是取坐标函数系为

$$w_1(x,y)=(a^2-x^2)(b^2-y^2),w_2(x,y)=w_1x^2,w_3=w_1y^2,\cdots.$$

设待求的函数为 $u_1=a_1(a^2-x^2)(b^2-y^2)$，代入 $J[u]$中，计算积分，并令 $\frac{\partial J[u_1]}{\partial a_1}=0$，得

$$\frac{256}{45}(a^2+b^2)a^3b^3a_1-\frac{64}{9}a^3b^3=0.$$

由此得 $a_1=\frac{5}{4(a^2+b^2)}$，因此所求的近似解为

$$u_1=\frac{5}{4}\frac{(a^2-x^2)(b^2-y^2)}{a^2+b^2}.$$

坐标函数的选择不是唯一的，对于例 6，还可以取

$$\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b}\quad(m,n=1,2,\cdots)$$

作为坐标函数系，这些函数中的每一个及它们的线性组合式在区域的边界上都满足齐次边界条件.

如果边界条件是非齐次的，那么，可选取适当的满足非齐次边界条件的光滑函数，设为 w_0，如果原来的容许函数为 y，通过代换 $y=u+w_0$，这时 u 将具有齐次边界条件. 将 $y=u+w_0$ 代入 $J[y]$，则得新的泛函 $I[u]=J[u+w_0]$，再用前述方法求出泛函 $I[u]$的近似解，最后得原泛函 $J[y]$的近似解 $y_n=u_n+w_0$.

当选取的坐标函数系 $w_1,w_2,\cdots,w_n,\cdots$不限于光滑函数时，里兹法就发展成为有限元法.

4.3.4 康托洛维奇法

康托洛维奇(Kantorovič)法用于多自变量的情形，它在本质上与里兹法相同，但在近似解式中将里兹法所使用的待定系数改为某一自变量的待定函数，因而是里兹法的推广. 由于增加了灵活性，因此一般可望得到较好的结果.

考虑泛函

$$J[z(x,y)]=\int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}F(x,y,z;\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4-23}$$

的极值，它展布在由二曲线 $y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$ 和二直线 $x=x_0$，$x=x_1$ 所围成的区域 D 上，如图 4-3 所示. 并设在区域 D 的边界上函数 $z(x,y)$的值已经给出. 康托洛维奇法的步骤如下：

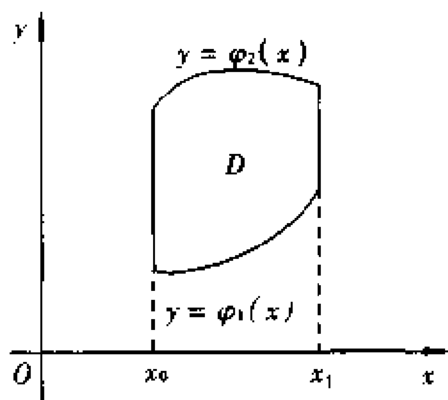


图 4-3

1° 选取坐标函数系

$$w_1(x,y),w_2(x,y),\cdots,w_n(x,y),\cdots,$$

并作出它的前 n 个函数的组合式

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) w_i(x, y), \tag{4-24}$$

其中 $u_i(x)$是待定函数,将(4-24)式代入泛函(4-23),得

$$J[z_n] = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, z_n; \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) \mathrm{d}y,$$

由于被积函数是 y 的已知函数,对 y 积分得

$$J[z_n] = \int_{x_0}^{x_1} \varphi[x, u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x); u'_1(x), u'_2(x), \cdots, u'_n(x)] \mathrm{d}x.$$

2° 选取函数 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$,使泛函 $J[z_n]$达到极值;因此,$u_i(x)$应满足欧拉方程组

$$\varphi_{u_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \varphi_{u_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

而任意常数的选取是要使 $z_n(x, y)$在直线 $x = x_0, x = x_1$ 上满足所给的边界条件.

例 7　求泛函

$$J[z(x, y)] = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 4z \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

的近似值,这里积分区域是矩形域 $D: -a \leqslant x \leqslant a, -b \leqslant y \leqslant b$,在积分区域的边界上 $z = 0$.

解　设所求的解为

$$z_1 = (b^2 - y^2) u(x),$$

在直线 $y = \pm b$ 上这个解满足所给的边界条件.将 z_1 代入泛函,得

$$J[z_1] = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \{ (b^2 - y^2)^2 [u'(x)]^2 + 4y^2 u^2(x) - 4(b^2 - y^2) u(x) \} \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

该式对 y 积分,则得

$$J[z_1] = \int_{-a}^{a} \left[\frac{16}{15} b^5 (u')^2 + \frac{8}{3} b^3 u^2 - \frac{16}{3} b^3 u \right] \mathrm{d}x.$$

这个泛函的欧拉方程为

$$u''(x) - \frac{5}{2b^2} u(x) = -\frac{5}{2b^2},$$

该方程的通解为

$$u(x) = C_1 \cosh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b} + C_2 \sinh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b} + \frac{1}{2},$$

其中常数 C_1, C_2 由边界条件 $u(\pm a) = 0$ 来确定.

最后得近似解

$$z_1(x, y) = \left(1 - \frac{\cosh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}}{\cosh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}} \right) \frac{(b^2 - y^2)}{2}.$$

如果需要更准确的答案,可令

$$z_2=(b^2-y^2)u_1(x)+(b^2-y^2)^2u_2(x).$$

例 8 求方程 $\Delta z=-1$ 的解，使在由直线 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $x=b$ 所围的等腰三角形域 D 内(见图 4-4)为连续，且在这个域的边界上为零.

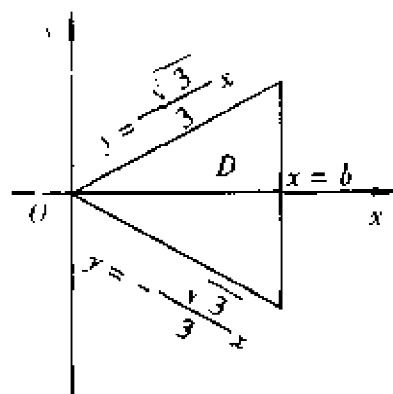


图 4-4

解 由(4-14)式得

$$J[z]=\int_0^b\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

设所求的近似解为

$$z_1=\left[y^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2\right]u(x),$$

代入泛函 $J[z]$，对 y 积分后，得

$$J[z_1]=\frac{8\sqrt{3}}{405}\int_0^b[2x^5(u')^2+10x^4uu'+30x^3u^2+15x^3u]\mathrm{d}x.$$

该泛函的欧拉方程是

$$x^2u''+5xu'-5u=\frac{15}{4},$$

这个方程的通解为

$$u(x)=C_1x+C_2x^{-5}-\frac{3}{4}.$$

由于在 $x=0$ 附近解 u 应有界，所以 $C_2=0$，且由 $u(b)=0$，得 $C_1=\frac{3}{4b}$. 于是

$$z_1(x,y)=-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(y^2-\frac{1}{3}x^2\right).$$

参 考 文 献

1 艾利斯哥尔兹 ЛЭ 著. 变分法. 李世晋译. 上海：商务印书馆，1956.

2 拉弗林契叶夫 MA，留斯切尔涅克 ЛА 著. 变分学教程. 曾鼎铄，邓汉英，王梓坤译. 北京：高等教育出版社，1955.

3 钱伟长著. 变分法及有限元：上册. 北京：科学出版社，1980.

4 斯米尔诺夫 ВИ 著. 高等数学教程：第四卷第一分册. 陈传璋译. 北京：高等教育出版社，1958.

5 牛岸均著. 现代变分原理. 北京：北京工业大学出版社，1992.

·经典数学卷·

第15篇

计算数论

编　者　黄连生
审校者　王萼芳

目　录

引　言

初等数论是研究整数的基本性质的数学分支．它主要是采用算术方法来进行研究的．初等数论可称得上是源远流长．早在公元前3世纪，古希腊数学家欧几里德(Euclid)证明了素数有无穷多个，并给出了求两个正整数的最大公因数的辗转相除法．我国古代(公元4世纪)的《孙子算经》中给出了解一次同余式组的算法，即著名的孙子定理，国外称为中国剩余定理．从17世纪到19世纪，很多数学大师如费马(Fermat)、欧拉(Euler)、勒让德(Legendre)、高斯(Gauss)等人都在初等数论这块肥沃的数学园地上辛勤地耕耘过，给后人留下了丰富的成果．

初等数论因其问题和方法的多样性而被称为锻炼数学素养和培育数学人才的思维的体操．而在当代，更因为它在计算机科学、组合数学、代数编码、密码学、数字信号处理等领域得到广泛应用，从而使它成为不仅是数学工作者，同时也是广大科技工作者应该了解的工具．

本篇称之为计算数论，仅着重介绍初等数论中一些问题的算法和应用(如整除、同余、二次剩余与原根、数论函数及数论变换等)，以及与密码学关系密切的某些内容．

因受篇幅的限制，本篇只对部分定理给出证明．

1　整数的除法

1.1　良序性公理与归纳原理

全体整数的集合用 **Z** 表示，$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$．全体**自然数**的集合用 **N** 表示，$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$．全体正整数的集合用 $\mathbf{Z}^+$ 表示．全体实数的集合用 **R** 表示．

良序性公理　有下界的整数的非空集合有最小元．

显然，自然数的非空集合有最小元．

定理1(归纳原理)　设 $S\subseteq\mathbf{N}$．若 S 满足下列条件，则 $S=\mathbf{N}$．

1° $0\in S$；

2° 若 $n\in S$，则 $n+1\in S$．

证　用良序性公理证明归纳原理．反证法假设：$S\neq\mathbf{N}$．令 $T=\mathbf{N}-S$．由反证法假设，$T\neq\varnothing$．由良序性公理，T 有最小元，设为 t_0．因 $0\in S$，故 $t_0>0$．因 t_0 是 T 的最小元，故 $t_0-1\in S$．从而 $t_0-1+1=t_0\in S$，此与 $t_0\in T$ 矛盾．所以，$S=\mathbf{N}$．

利用归纳原理可证数学归纳法的正确性．

数学归纳法1　设 $p(n)$ 是关于自然数 n 的一种性质．若下列条件成立，则

$p(n)$对所有的自然数 n 成立.

1° $p(0)$成立;

2° 若 $p(n)$成立,则 $p(n+1)$成立.

条件 1° 称为**归纳基础**,条件 2°称为**归纳过程**. 条件 1° 在某些情况下会代之以 $p(k_0)$成立,k_0 是某个正整数. 相应地,结论也就变成对大于等于 k_0 的所有自然数 n,$p(n)$成立.

数学归纳法 2 设 $p(n)$是关于自然数 n 的一种性质. 若下列条件成立,则 $p(n)$对所有大于等于 k_0 的自然数 n 成立.

1° $p(k_0)$成立;

2° 若对所有大于等于 k_0 小于 n 的自然数 k,$p(k)$成立,则 $p(n)$成立.

对于全体自然数的集合 $\mathbf{N}$,良序性公理与归纳原理是等价的. 也就是说,若承认归纳原理正确,则可证良序性公理成立.

良序性公理也称为**最小元原理**. 可由此证明对应的**最大元原理**. 最大元原理是说,非空有上界的自然数集合有最大元.

设 $x\in\mathbf{R}$,用$\lfloor x\rfloor$表示不大于 x 的最大整数,用$\lceil x\rceil$表示不小于 x 的最小整数,令

$$\{x\}=x-\lfloor x\rfloor.$$

有

$$0\leqslant\{x\}<1.$$

$$\lfloor 2.1\rfloor,\lfloor -2.1\rfloor=-3,\{2.1\}=0.1,\{-2.1\}=0.9,\lceil 2.1\rceil=3.$$

设 $x,y\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{Z}$. 以下是与上述定义有关的简单性质:

1° $\lfloor x\rfloor<x<\lceil x\rceil$,若 $x\notin\mathbf{Z}$;

$\lfloor x\rfloor=x=\lceil x\rceil$,若 $x\in\mathbf{Z}$.

2° $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$;

$\lceil x+n\rceil=\lceil x\rceil+n$.

3° $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x+y\rfloor\leqslant x+y\leqslant\lceil x+y\rceil\leqslant\lceil x\rceil+\lceil y\rceil$.

4° $\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor}{n}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor$;

$\left\lceil\frac{\lceil x\rceil}{n}\right\rceil=\left\lceil\frac{x}{n}\right\rceil$.

鸽巢原理 设 $n\in\mathbf{Z}^+$. 将 $n+1$ 个物体放到 n 个盒子里去,必有一个盒子里的物体不少于 2 个.

1.2 整除、素数与合数

定义 1 设 $a,b\in\mathbf{Z}$, $b\neq0$. 若存在 $q\in\mathbf{Z}$,使得 $a=bq$,则称 b 整除 a(或 a 可被 b 整除),记作 $b\mid a$. b 称为 a 的**因数**(或约数,因子),a 称为 b 的**倍数**. 若不存在这样的 q,则称 b 不整除 a,记作 $b\nmid a$.

由整除的定义,可知以下简单性质:

1° 若 $c \mid b$, $b \mid a$,则 $c \mid a$.

2° 若 c 是非零整数,则 $b \mid a \Leftrightarrow cb \mid ca$.

3° 若 $c \mid a$, $c \mid b$, $m,n\in\mathbf{Z}$,则 $c \mid ma+nb$.

4° 若 $b \mid a$, $a\neq 0$,则 $|b|\leqslant|a|$.

设 $a\in\mathbf{Z}$, $a\neq 0$. ± 1, $\pm b$ 显然是 b 的因数, b 的其他因数称为 b 的**真因数**.

定义 2 设 p 是大于 1 的整数. 若 p 没有真因数,则称 p 为**素数**(质数). 有真因数的非零整数称为**合数**.

例如 2,3,5,7 是素数;4,6,8,9 是合数.

定理 2 大于 1 的整数可以表示成素数的乘积,或者本身就是素数.

证 设 n 是大于 1 的整数. 对 n 用数学归纳法 2. 当 $n=2$ 时,结论成立. 假设对大于 1 小于 n 的整数,结论成立. 对于 n,若 n 是素数,结论成立;否则 n 是合数,设 $n=n_1n_2$, n_1, n_2 是 n 的真因数,它们都小于 n,由归纳假设, n_1, n_2 本身是素数或可表示成素数的乘积,从而 n 可以表示成素数的乘积.

设 $p_i(i=1,2,\cdots,k)$是素数, $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_k$, $a=p_1p_2\cdots p_k$. 于是 $p_1\leqslant a^{1/k}$. 由此可以设计一个构造素数表的有效算法. 这个算法的基本思想是用不超过 $N^{1/2}$ 的素数把不超过 N 的合数全部删去,就得到 N 以内的素数表. 用这种方法容易找出 10 以内的素数:2,3,5,7. 利用这 4 个素数可以找出 10^2(= 100)以内的所有 25 个素数:2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97. 利用这 25 个素数进而可以找出 100^2(= 10 000)以内的所有素数. 这种构造素数表的方法叫做**厄拉多塞**(Eratosthenes)**筛法**.

用反证法容易证明以下定理:

定理 3 素数有无穷多个.

证 假定素数的个数有限,全部素数依次是 $p_1,p_2,\cdots,p_k$. 令 $n=p_1p_2\cdots p_k+1$. 根据定理 1,存在 $p_i(1\leqslant i\leqslant k)$, $p_i\mid n-p_1p_2\cdots p_k$,即 $p_i\mid 1$,矛盾. 故素数有无穷多个.

设 p 是素数,形如 $M_p=2^p-1$ 的数称为**梅森**(Mersenne)**数**, M_p 为素数时又称为梅森素数. 前 10 个梅森素数对应的 p 依次是 2,3,5,7,13,17,19,31,61,89. 近一二十年来,由于计算机和计算机网络的飞速发展,寻找当时最大素数的工作不断进展,而这些迄今最大的素数都是在梅森数中发现的.

形如 $F_n=2^{2^n}+1$ 的数称为**费马**(Fermat)**数**. F_n 为素数时称为费马素数. 迄今只知 5 个费马素数: $F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, $F_4=65537$, $F_5=4294967297$.

是否有无穷多个梅森素数和费马素数都是尚未解决的问题. 梅森素数和费马素数在数论变换中有用.

1.3 带余除法

任给 $a,b\in\mathbf{Z}$, $b\neq 0$,可能有 $b\mid a$ 或 $b\nmid a$. 可用**带余除法**统一处理. 带余除法在初等数论中有重要意义.

定理4　设 $a,b\in\mathbf{Z},b\neq0$. 存在唯一的 q 与唯一的 r,使得

$$a=bq+r,0\leqslant r<|b|. \tag{1-1}$$

证　先证可表示性. 令 $S=\{x\mid x=a-bk,k\in\mathbf{Z},x\geqslant0\}$,显然,$S\subseteq\mathbf{N}$,且 $S\neq\varnothing$. 例如,令 $k=-|a|b$,则 $x=a+|a|b^2\geqslant0,x\in S$. 设 r_0 为 S 的最小元,应有 $0\leqslant r_0<|b|$. 否则,若 $r\geqslant|b|$. 令 $r_1=r_0-|b|$,显然,$r_1<r_0,r_1\in S$. 这与 r_0 是 S 的最小元矛盾.

再证表示的唯一性. 若表示不唯一,设 $a=bq+r=bq'+r',r\neq r'$(不妨设 $r'>r$). 于是,$|b|\leqslant|b(q-q')|=r'-r<|b|$,矛盾. 故表示是唯一的.

在(1-1)式中,a 称为被除数,b 称为除数,q 称为不完全商,简称商,r 称为 b 除 a 的**非负最小剩余**.

一般地,设 $a,b,c\in\mathbf{Z},b\neq0$. 存在唯一的 q 与唯一的 r,使得

$$a=bq+r,c\leqslant r<|b|+c. \tag{1-2}$$

取 $c=-\frac{|b|}{2}+1$,便有

$$a=bq+r,\quad -\frac{|b|}{2}<r\leqslant\frac{|b|}{2} \tag{1-3}$$

这样的 r 称为 b 除 a 的**绝对最小剩余**. 取 $c=1$ 所得的 r 称为 b 除 a 的**最小正剩余**,非负最小剩余与绝对最小剩余是经常用到的.

1.4　最大公因数与最小公倍数

定义3　设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是不全为零的整数. 若 $d\mid a_i(i=1,2,\cdots,k)$,则称 d 为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的公因数(公约数),所有公因数中最大的称为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的**最大公因数**,记作 $d=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$. 因为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的公因数集合非空(至少 ±1 属于这个集合),且有上界(以任一非零的 $|a_i|(1\leqslant i\leqslant k)$ 为上界),故有最大元,即最大公因数. 当 $d=1$ 时,称 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ **互素**.

定义4　设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是非零整数,m 是它们共同的正倍数中的最小者,称为它们的**最小公倍数**,记作 $m=[a_1,a_2,\cdots,a_k]$. 它们的共同正倍数集合非空($|a_1|\cdot|a_2|\cdot\cdots\cdot|a_k|$ 属于这个集合),且有下界(以任一 $|a_i|(1\leqslant i\leqslant k)$ 为下界),故有最小元,即最小公倍数.

定理5　设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是给定的不全为零的整数,$S=\{x\mid x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k,x_1,x_2,\cdots,x_k\in\mathbf{Z}\}$,$S^+$ 是 S 中正整数的集合. l 是 S^+ 的最小元,$d=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$. 依照所设,有

1° $S=\{lk\mid k\in\mathbf{Z}\}$;

2° $l=d$;

3° $c\mid a_i(i=1,2,\cdots,k)\Leftrightarrow c\mid d$.

证　显然,$S^+\neq\varnothing$,S^+ 有最小元(l).

1° 任给 $x\in S$,设 $x=lq+r,0\leqslant r<l$. 应有 $r=0$,否则,$0<r<l,r\in S^+$,这与 l 是 S^+ 的最小元矛盾,即任给 $x\in S$,都有 $l\mid x$.

2° 显然，$a_i \in S(i=1,2,\cdots,k)$. 由 1°，$l \mid a_i(i=1,2,\cdots,k)$. 于是，$l$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的公因数，$l \leqslant d$. 另一方面 $d \mid a_i(i=1,2,\cdots,k)$，从而 $d \mid l$，$d \leqslant l$. 所以，$l=d$.

3° $c \mid a_i(i=1,2,\cdots,k) \Rightarrow c \mid l \Rightarrow c \mid d$. 而 $c \mid d$，由 $d=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 知 $c \mid a_i(i=1,2,\cdots,k)$.

1.5 辗转相除法

根据带余除法的性质可以设计**辗转相除法**(欧几里德算法). 辗转相除法在求最大公因数、解一次不定方程等方面都很有用，而辗转相除法的下列表述方式是比较简明、好用的.

定理 6 设 r_{n+1}, r_n 是非零整数，则有

$$\begin{aligned}
&r_{n+1}+r_nq_n=r_{n-1},\\
&r_n+r_{n-1}q_{n-1}=r_{n-2},\\
&\cdots\\
&r_2+r_1q_1=r_0,\\
&r_0 \mid r_1;\\
&p_0=1, p_1=q_1,\\
&p_k=q_kp_{k-1}+p_{k-2}, k=2,3,\cdots,n.
\end{aligned}$$

依照所设，有

1° $r_{n+1}p_{n-1}+r_n p_n=r_0$;

2° $(r_{n+1},r_n)=|r_0|$.

证 1° 对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，

$$r_{n+1}p_{n-1}+r_1p_1=r_2+r_1q_1=r_0,$$

结论成立. 假设对 $n-1$，结论成立，即

$$r_np_{n-2}+r_{n-1}p_{n-1}=r_0.$$

对于 n，有

$$\begin{aligned}
r_{n+1}p_{n-1}+r_n p_n&=r_{n+1}p_{n-1}+r_n(q_n p_{n-1}+p_{n-2})\\
&=(r_{n+1}+r_n q_n)p_{n-1}+r_n p_{n-2}\\
&=r_{n-1}p_{n-1}+r_n p_{n-2}\\
&=r_0.
\end{aligned}$$

因此对所有的正整数 n，结论成立. 这里的 n 就是做带余除法的次数. 这里的余数采用哪一类，未做限制，实际计算时用绝对最小剩余较快.

2° 对 n 用归纳法. 当 $n=0$ 时，由 $r_0 \mid r_1$ 知 $(r_1,r_0)=|r_0|$. 假设对 $n-1$，结论成立，即

$$(r_n,r_{n-1})=|r_0|.$$

对于 n，有

$$(r_{n+1},r_n)=(r_{n+1}+r_nq_n,r_n)=(r_{n-1},r_n)=|r_0|.$$

下面举例说明计算表格.在实际计算中表格的设计很重要,表格应简明、紧凑、好用.

例1 求解 $24871x+3468y=(24871,3468)$.

解 根据定理6列出如下表格:

k	4	3	2	1	0
$r_{k-1}q_{k-1}$	-24 276	-3 570	-612		
r_k	24 871	3 468	595	-102	-17
q_k		-7	-6	6	
p_k		251	-35	6	1

$$24871\times(-35)+3468\times 251=-17,$$
$$24871\times 35+3468\times(-251)=17,$$
$$x=35,y=-251,(24871,3468)=17.$$

上述表格说明了数据之间的关系.实际计算时可简化为下列格式,

-24 276	-3 570	-612		
24 871	3 468	595	-102	-17
	-7	-6	6	
	251	-35	6	1

1.6 唯一分解定理

整数的唯一分解定理,即算术基本定理,在数论中占有重要地位.

引理1 设 $p;p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是素数.若 $p\mid p_1p_2\cdots p_k$,则存在 $p_i(1\leqslant i\leqslant k)$,使得 $p=p_i$.

证 对 k 用数学归纳法.当 $k=1$ 时,由 $p\mid p_1$ 知 $p=p_1$,结论成立.假设对 $k-1$,结论成立.对于 k,若 $p=p_k$,则结论成立,否则 $(p,p_k)=1$,由定理5,存在整数 x,y,使得 $px+p_ky=1$,从而有

$$pp_1\cdots p_{k-1}x+p_1p_2\cdots p_{k-1}p_ky=p_1p_2\cdots p_{k-1}.$$

因 $p\mid pp_1\cdots p_{k-1}$ 与 $p\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}p_k$,故 $p\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}$,由归纳假设,存在 p_i,使得 $p=p_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$.所以,对一切正整数 k,结论成立.

定理7(唯一分解定理即算术基本定理) 任给整数 $a>1$,必有

$$a=p_1p_2\cdots p_k, \tag{1-4}$$

其中 $p_i(1\leqslant i\leqslant k)$是素数,在不计次序的意义下,表示是唯一的.

证 由定理2知,对于 $a>1$,可表示性是成立的.下证表示是唯一的.设

$$a = p_1 p_2 \cdots p_k = q_1 q_2 \cdots q_l,$$

要证 $k = l, p_i = q_i (1 \leqslant i \leqslant k)$. 不妨设 $k \leqslant l$. 对 k 用归纳法. 当 $k = 1$ 时, $p_1 = q_1 q_2 \cdots q_l$, 显然, $l = 1, p_1 = q_1$, 结论成立. 假设对于 $k - 1$, 结论成立. 对于 k, 由 $a = p_1 p_2 \cdots p_{k-1} \cdot p_k = q_1 q_2 \cdots q_{l-1} q_l$ 知 $p_k \mid q_1 q_2 \cdots q_{l-1} q_l$, 根据引理 1, 有 $p_k = q_j (1 \leqslant j \leqslant l)$. 若设 $p_k = q_l$, 于是, $p_1 p_2 \cdots p_{k-1} = q_1 q_2 \cdots q_{l-1}$. 由归纳假设 $k - 1 = l - 1, p_i = q_i (1 \leqslant i \leqslant k - 1)$. 所以有 $k = l, p_i = q_i (1 \leqslant i \leqslant k)$. 即表示唯一.

把(1-4)式中相同的素数用乘幂的形式表示, 可得

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}. \tag{1-5}$$

此式称为 a 的**标准素因数分解式**. 其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不同的素数, $\alpha_i \in \mathbf{Z}^+ (1 \leqslant i \leqslant k)$.

有时为了叙述方便, 容许分解式中的指数取 0. 设

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k},$$

其中 $\alpha_i, \beta_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 之一可取 0. 设

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i) \\ \delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i) \end{array}\right\} \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

则

$$(a, b) = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_k^{\delta_k}, \tag{1-6}$$

$$[a, b] = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k}. \tag{1-7}$$

设 d 是 a 的因数, 则有

$$d = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}, \tag{1-8}$$

其中 $0 \leqslant e_i \leqslant \alpha_i (1 \leqslant i \leqslant k)$.

设 $a \in \mathbf{Z}^+$, $\tau(a)$ 表示 a 的正因数的个数. 若 $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \mathbf{N} (1 \leqslant i \leqslant k)$, 则

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1). \tag{1-9}$$

例如,

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5,$$
$$\tau(360) = (3+1)(2+1)(1+1) = 24.$$

1.7 一次不定方程

不定方程是数论研究中的重要课题, 下面讨论一次不定方程.

定理 8 设 $a, b, c \in \mathbf{Z}$. 不定方程

$$ax + by = c \tag{1-10}$$

有整数解的充要条件是 $(a, b) \mid c$. 若 $(a, b) \mid c$, 设 $(a, b) = d$, $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $c = c_1 d$. $x = x_0, y = y_0$ 是(1-10)式的一组特解, 则 $x = x_0 + b_1 t$, $y = y_0 - a_1 t (t \in \mathbf{Z})$ 是(1-10)式的通解.

证 根据定理 5, 可知(1-10)式有整数解的充要条件是 $(a, b) \mid c$. 根据所设, $x = x_0 + b_0 t$, $y = y_0 - a_0 t$ 显然是(1-10)式的解. 设 $x = x_1, y = y_1$ 是(1-10)式的一组解, 有

$$a_1x_1 + b_1y_1 = c_1.$$

另一方面有

$$a_1x_0 + b_1y_0 = c_1,$$

即

$$a_1(x_1 - x_0) = b_1(y_0 - y_1).$$

由$(a_1, b_1) = 1$,知 $a_1 | (y_0 - y_1)$,即

$$y_0 - y_1 = a_1t_1, \quad y_1 = y_0 - a_1t_1,$$

从而

$$x_1 = x_0 + b_1t_1.$$

求特解的算法已由定理 6 给出.

例 2　求解 $907x + 731y = 2107$.

解　计算表格如下:

−731	−704	−189	−26		
907	731	176	27	−13	1
	−1	−4	−7	2	
	−67	54	−13	2	1

$$907 \times 54 + 731 \times (-67) = 1.$$

$$\begin{cases} x_0 = 54 \times 2107 = 113778, \\ y_0 = (-67) \times 2107 = -141169 \end{cases}$$

是一组特解.

$$\begin{cases} x = 113778 + 731t, \\ y = -141169 - 907t \end{cases}$$

是通解.

$$\begin{cases} x_1 = -258, \\ y_1 = 323 \end{cases}$$

是另一组特解.

下面是定理 5 的推论:

定理 9　设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是非零整数.不定方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = b \tag{1-11}$$

有解的充分必要条件是$(a_1, a_2, \cdots, a_k) | b$.

例 3　求 $9x + 24y - 5z = 4$ 的整数解.

解　$(9,24,5) = 1|4$,故有解.

$$(9,24) = 3,$$

$$9x + 24y = 3t,$$

$$3x + 8y = t.$$

$$\begin{cases} x = 3t + 8u, \\ y = -t - 3u. \end{cases}$$

$$3t - 5z = 4,$$

$$\begin{cases} t = 3 + 5v, \\ z = 1 + 3v. \end{cases}$$

所以原方程的通解是

$$\begin{cases} x = 9 + 15v + 8u, \\ y = -3 - 5v - 3u, \\ z = 1 + 3v. \end{cases}$$

2 同 余 式

2.1 同余的定义和基本性质

定义 1 设 $a, b, m \in \mathbf{Z}$,若 $m \mid (a-b)$,则称 a 与 b 模 m 同余,记作 $a \equiv b \bmod m$,否则($m \nmid (a-b)$),则称 a 与 b 模 m 不同余,记作 $a \not\equiv b \bmod m$.

下面只讨论模 $m \in \mathbf{Z}^+$ 的情况.

根据上述定义可知以下简单性质.设 $a \equiv b \bmod m$, $c \equiv d \bmod m$,有

1° $a + c \equiv b + d \bmod m$.

2° $ac \equiv bd \bmod m$.

3° $a^n \equiv b^n \bmod m$.

4° 若 $f(x)$ 是整系数多项式,则 $f(a) \equiv f(b) \bmod m$.

5° 若 $ac \equiv bc \bmod m$,则 $a \equiv b \bmod m/(c, m)$.

6° 若 $d \mid m$, $a \equiv b \bmod m$,则 $a \equiv b \bmod d$.

7° 若 $a \equiv b \bmod m_i (1 \leqslant i \leqslant k)$,则 $a \equiv b \bmod [m_1, m_2, \cdots, m_k]$.

8° $(a, m) = (b, m)$.

2.2 剩余类和完系

根据定义 1 可知,对于一个给定的模 m,同余关系是 $\mathbf{Z}$ 上的一个等价关系.这个等价关系将 $\mathbf{Z}$ 划分成 m 个等价类.设 $\bar{r} = \{a \mid a \in \mathbf{Z}, a \equiv r \bmod m\}$.则 $\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{m-1}$ 就是这 m 个等价类.任一整数必属于且仅属于其中一个等价类.从每个等价类中各取一个元素组成的集合,称为模 m 的一个**完系**.常用的完系有由所有非负最小剩余组成的集合及由所有绝对最小剩余组成的集合.

上述的模 m 的 m 个等价类称为模 m 的**剩余类**(同余类).两个模 m 的剩余类要么相等,要么无公共元素.

定理 1 设 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 是模 m 的完系,若 $(k, m) = 1$,则 $\{ka_1, ka_2, \cdots, ka_m\}$ 也是模 m 的完系.

证 $ka_i \equiv ka_j \bmod m \Rightarrow a_i \equiv a_j \bmod m$.

根据鸽巢原理 $m + 1$ 个整数中,至少有两个整数模 m 同余.

定理2　设$(m_1,m_2)=1$，若x_1取遍模m_1的完系，x_2取遍模m_2的完系，则$m_1x_2+m_2x_1$取遍模m_1m_2的完系.

证　依照所设，形如$m_1x_2+m_2x_1$的整数共有m_1m_2个.而模m_1m_2的完系也共有m_1m_2个元素.下证这两部分在模m_1m_2同余的意义下是一一对应的.

$$m_1x_2+m_2x_1\equiv m_1x_2'+m_2x_1' \bmod m_1m_2$$

$$\Rightarrow m_1x_2+m_2x_1\equiv m_1x_2'+m_2x_1' \bmod m_1,$$

且

$$m_1x_2+m_2x_1\equiv m_1x_2'+m_2x_1' \bmod m_2$$

$$\Rightarrow x_1\equiv x_1' \bmod m_1 \text{ 且 } x_2\equiv x_2' \bmod m_2.$$

因此结论成立.

定义模m的剩余类的加法及乘法如下：

$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{(a+b)},\quad \bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{a\cdot b}.$$

于是模m的剩余类关于加法构成群，关于乘法构成交换业群，关于加法及乘法构成环.

2.3　缩　　系

设r是模m的一个剩余类.若$(r,m)=1$，则$\bar{r}$称为模m的缩剩余类.从模m的所有缩剩余类中各取一个元素组成的集合称为模m的缩系.模m的缩剩余类的个数或模m的缩系中元素的个数记作$\varphi(m)$，称为m的欧拉(Euler)函数(值).根据这个定义，

$$\varphi(1)=1,\varphi(2)=1,\varphi(3)=2,\varphi(4)=2,\varphi(5)=4,\varphi(6)=2.$$

定理3　设$(m_1,m_2)=1$.若x_1取遍模m_1的缩系，x_2取遍模m_2的缩系，则$m_1x_2+m_2x_1$取遍模m_1m_2的缩系.从而$\varphi(m_1m_2)=\varphi(m_1)\varphi(m_2)$.

证　设x_1,x_2分别是模m_1，模m_2的缩系中的元素.

$$(m_1,m_2)=(m_1,x_1)=1\Rightarrow(m_1,m_2x_1)=1\Rightarrow(m_1,m_2x_1+m_1x_2)=1.$$

同理，

$$(m_2,m_1x_2+m_2x_1)=1.$$

因而，

$$(m_1m_2,m_1x_2+m_2x_1)=1.$$

再由定理2可知$\varphi(m_1)\varphi(m_2)\leqslant\varphi(m_1m_2)$.

另一方面，对于任取模m_1m_2的缩系中的一个元素a，$m_1x=a \bmod m_2$及$m_2x\equiv a \bmod m_1$都只有一个解，分别设为x_2,x_1.x_1,x_2分别是模m_1，模m_2的缩系中的元素.

$$m_2x_1\equiv a \bmod m_1\Rightarrow m_2x_1+m_1x_2\equiv a \bmod m_1.$$

同理，

$$m_2x_1+m_1x_2\equiv a \bmod m_2.$$

于是，

$$m_2x_1+m_1x_2\equiv a \bmod m_1m_2,$$

再由定理2可知

$$\varphi(m_1m_2)\leqslant\varphi(m_1)\varphi(m_2).$$

合起来有
$$\varphi(m_1m_2)=\varphi(m_1)\varphi(m_2).$$

模 m 的缩剩余类关于乘法构成群.

设 p 是素数,显然有 $\varphi(p)=p-1$.

设 p 是素数,α 是正整数,显然有
$$\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha}-p^{\alpha-1}=p^{\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

定理 4 设 $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 a 的标准分解式,则
$$\varphi(a)=a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

证
$$\begin{aligned}\varphi(a)&=\varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2})\cdots\varphi(p_k^{\alpha_k})\\&=p_1^{\alpha_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)p_2^{\alpha_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots p_k^{\alpha_k}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\\&=a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).\end{aligned}$$

定理 5(欧拉定理) 设 $m\in\mathbf{Z}^+$.若$(a,m)=1$,则 $a^{\varphi(m)}\equiv 1 \bmod m$.

证 设$\{b_1,b_2,\cdots,b_s\}$是模 m 的缩系,$s=\varphi(m)$,则$\{ab_1,ab_2,\cdots,ab_s\}$也是模 m 的缩系.从而,
$$(ab_1)(ab_2)\cdots(ab_s)\equiv b_1b_2\cdots b_s \bmod m,$$
$$a^s(b_1b_2\cdots b_s)\equiv b_1b_2\cdots b_s \bmod m.$$

因此
$$a^s\equiv 1 \bmod m.$$

在定理 5 中,取 m 为素数 p,则得到费马小定理.

定理 6(费马小定理) 设 p 是素数.若$(a,p)=1$,则 $a^{p-1}\equiv 1 \bmod p$.或者对任意整数 a,都有 $a^p\equiv a \bmod p$.

设 p 是奇素数.显然 $x^2\equiv 1 \bmod p$ 有两个解 $x\equiv\pm 1 \bmod p$.$\{\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm(p-1)/2\}$是模 p 的缩系.$\{1,2,\cdots,p-1\}$也是模 p 的缩系,其中 1 与 $p-1$ 的逆元是自身,其他 $p-3$ 个元两两互为逆元,于是有以下定理.

定理 7(威尔森(Wilson)定理) 设 p 为素数.则$(p-1)!\equiv -1 \bmod p$.

2.4 一次同余方程

定义 2 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x_1+a_0$,$m,n\in\mathbf{Z}^+$,$a_i\in\mathbf{Z}(0\leqslant i\leqslant n)$.若 $m\nmid a_n$,则
$$f(x)\equiv 0 \bmod m \tag{2-1}$$
称为模 m 的 n 次**同余方程**,n 称为$f(x)$关于模 m 的次数.若 x_1 满足 $f(x_1)\equiv 0 \bmod m$,则称 $x\equiv x_1 \bmod m$ 为同余(2-1)式的解,模 m 同余的解看作是相同的,不同余的解看作是不同的.求(2-1)式的解可采用穷举模 m 的完系的方法,但当 m 较大时,这个方法就不实用了.

设 $k\geqslant 2$,$F(x_1,x_2,\cdots,x_k)$是整系数 k 元多项式,同余方程
$$F(x_1,x_2,\cdots,x_k)\equiv 0 \bmod m \tag{2-2}$$

的解的定义与定义 2 相似. 若 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_k)$ 都满足(2-2)式, 且至少有一个 i, 使得 $a_i \not\equiv b_i \bmod m (1 \leqslant i \leqslant k)$, 它们才称为不同的解.

解一次同余方程

$$ax \equiv b \bmod m \tag{2-3}$$

与解不定方程 $ax + my = b$ 等价. 根据 1.7 节定理 8 可得

定理 8 (2-3)式有解的充要条件是 $(a, m) \mid b$. 若有解, 设 $(a, m) = d$, $a = da_1$, $m = dm_1$, $x \equiv x_0 \bmod m$ 是一个解, 则(2-3)式的所有解是

$$x \equiv x_0 + m_1 t \bmod m, t = 0, 1, \cdots, d-1.$$

解一次不定方程的方法也可以用于解一次同余式.

例 1 解 $4x \equiv 6 \bmod 14$.

解 计算表格如下:

-12			$2\mid 6$
14	4	2	有 2 个解
	-3		
	-3	1	

$x \equiv -3 \times \left(\frac{6}{2}\right) \equiv -9 \equiv 5 \bmod 14$ 是原同余的一个解, 另一个解是 $x \equiv 5 - \left(\frac{14}{2}\right) \equiv -2 \bmod 14$.

设 a 是模 m 的缩系中的一个元素, 在此条件下 $ax \equiv 1 \bmod m$ 有一解, 这个解称为 a 关于模 m 的逆元, 记作 $a^{-1} \bmod m$.

2.5 孙子定理

定理 9(孙子定理) 设 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是两两互素的正整数, $a_1, a_2, \cdots, a_k \in$ **Z**, 则一次同余方程组

$$x \equiv a_i \bmod m_i \quad (1 \leqslant i \leqslant k) \tag{2-4}$$

有一个解

$$x \equiv M_1 M_1^{-1} a_1 + M_2 M_2^{-1} a_2 + \cdots + M_k M_k^{-1} a_k \bmod m, \tag{2-5}$$

其中

$$m = m_1 m_2 \cdots m_k, M_i = m / m_i, M_i M_i^{-1} \equiv 1 \bmod m_i (1 \leqslant i \leqslant k).$$

证 容易验证(2-5)式是(2-4)式的解. 若 b_1, b_2 都是(2-4)式的解, 则 $b_1 \equiv b_2 \bmod m_i (1 \leqslant i \leqslant k)$. 于是 $b_1 \equiv b_2 \bmod m$.

不难看出在(2-5)式中, 若 a_i 取遍模 $m_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 的完系, 则 x 取遍模 m 的完系.

大约在公元五六世纪, 我国南北朝时期有一部著名的算术书《孙子算经》. 里面有一道题, 用现在数论的语言说, 就是要解下列同余组:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 3, \\ x \equiv 3 \bmod 5, \\ x \equiv 2 \bmod 7. \end{cases}$$

按照定理 9 的算法，相应数据如下：

$$m_1 = 3, \quad m_2 = 5, \quad m_3 = 7;$$

$$M_1 = 35, \ M_2 = 21, \ M_3 = 15;$$

$$M_1^{-1} = 2, \ M_2^{-1} = 1, \ M_3^{-1} = 1;$$

$$x \equiv 35 \times 2 \times 2 + 21 \times 1 \times 3 + 15 \times 1 \times 2 \equiv 233 \equiv 23 \bmod 105.$$

这里的解法与《孙子算经》中该题的解法实际上是一样的.由此可见我们祖先的智慧.因此国内一般将定理 9 称为孙子定理，国际上则称为中国剩余定理.这个定理在数论中是很重要的.

定理 10 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式，p 是素数，$p \nmid a_n$.若 $f(x) \equiv 0 \bmod p$ 有解，则解的个数不大于 n.

证 对 n 用归纳法.当 $n = 1$ 时，因 $(a_n, p) = 1$，$a_1 x + a_0 \equiv 0 \bmod p$ 有一个解.假设命题对 $n-1$ 成立.设 $x \equiv x_1 \bmod p$ 是 $f(x) \equiv 0 \bmod p$ 的解，

$$f(x) = (x - x_1)g(x) + r.$$

由 $f(x_1) \equiv 0 \bmod p$ 知 $r \equiv 0 \bmod p$.设 $x \equiv x_2 \bmod p$ 是 $f(x) \equiv 0 \bmod p$ 的另一个解，则

$$f(x_2) \equiv (x_2 - x_1)g(x_2) \equiv 0 \bmod p.$$

由 $x_2 \not\equiv x_1 \bmod p$，知 $g(x_2) \equiv 0 \bmod p$. $g(x)$的次数为 $n-1$，首项系数为 a_n. $f(x) \equiv 0 \bmod p$ 的所有不同于 $x \equiv x_1 \bmod p$ 的解都是 $g(x) \equiv 0 \bmod p$ 的解，由归纳假设 $g(x) \equiv 0 \bmod p$ 的解的个数不超过 $n-1$，因而 $f(x) \equiv 0 \bmod p$ 的解的个数不超过 n.

3 数论函数

自变量是正整数的数值函数称为**数论函数**(算术函数).数论函数在数论及一些相关数学分支中有重要作用.

3.1 积性函数

定义 1 设 $m, n \in \mathbf{Z}^+$，f 是数论函数.若 $(m, n) = 1$，则 $f(mn) = f(m)f(n)$，就称 f 为**积性函数**.若不论是否有 $(m, n) = 1$，都有 $f(mn) = f(m)f(n)$，就称 f 为**完全积性函数**.

例如：

1° 欧拉函数 φ 是积性函数.

2° 任给 $x \in \mathbf{Z}^+$，$U(x) = 1$. U 是完全积性函数.

3° 任给 $x \in \mathbf{Z}^+$，$I(x) = \begin{cases} 1, 若\ x = 1, \\ 0, 若\ x > 1. \end{cases}$ I 是完全积性函数.

4° 任给 $x \in \mathbf{Z}^+$, $N(x) = x$. N 是完全积性函数.

5° 任给 $x \in \mathbf{Z}^+$, **默比乌斯(Möbius)函数**

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x = 1, \\ 0, & \text{若 } x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, p_1, p_2, \cdots, p_k \text{ 是不同的素数,存在 } \alpha_i \geqslant 2, \\ (-1)^k, & \text{若 } x = p_1 p_2 \cdots p_k, p_1, p_2, \cdots, p_k \text{ 是不同的素数}. \end{cases}$$

μ 是积性函数.

6° 任给 $n \in \mathbf{Z}^+$, $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d \mid n} d^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{N}$. σ_α 是积性函数.

数论函数 f 是积性函数的充要条件是

$$f(1) = 1, f(x) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \cdots f(p_k^{\alpha_k}) \ (x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}).$$

f 是完全积性函数的充要条件是

$$f(1) = 1, f(x) = f^{\alpha_1}(p_1) f^{\alpha_2}(p_2) \cdots f^{\alpha_k}(p_k).$$

3.2 狄利克雷卷积

设 f, g 是数论函数, f 与 g 的**狄利克雷(Dirichlet)卷积** $f * g$ 定义如下:

$$f * g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

数论函数在"*"运算下构成交换亚群,即满足结合律,交换律,并有单位元.单位元即 3.1 节中 3° 的 I. 下面列出一些有用的例子.

例 1 $U * \mu = I$.

证 用 $C(k, j)$ 表示集合 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的 j 元组合(或 j 元子集)的集合. 设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式, $n' = p_1 p_2 \cdots p_k (n > 1)$, 则

$$\begin{aligned} U * \mu(n) &= \sum_{d \mid n} \mu(d) = \sum_{d \mid n'} \mu(d) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{J \in C(k, j)} \mu\left(\prod_{i \in J} p_i\right) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \\ &= (1 - 1)^k = 0. \end{aligned}$$

当 $n = 1$ 时, $$U * \mu(1) = 1.$$

因此 $$U * \mu = I.$$

例 2 数论函数 f 有逆元(在"*"下)的充要条件是 $f(1) \neq 0$. 显然,积性函数都有逆元.

例 3 $U * \varphi = N$.

证 设 $S = \left\{ \frac{k}{n} \middle| k = 1, 2, \cdots, n \right\}$. S 中的分数都有其既约形式,即 $S = \left\{ \frac{k}{d} \middle| d \mid n, (k, d) = 1, d, k \in \mathbf{Z}^+ \right\}$. 因此, $|S| = n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$, 即 $U * \varphi(n) = N(n)$.

例 4 $\mu * N = \varphi$.

证 $\mu * N = \mu * (U * \varphi) = (\mu * U) * \varphi = I * \varphi = \varphi.$

例 5 若 f, g 都是积性函数，则 $f * g$ 也是积性函数.

证 设 $(m,n)=1, d \mid mn, d = d_1 d_2, d_1 = (d,m), d_2 = (d,n)$. 于是

$$\begin{aligned} f * g(mn) &= \sum_{d \mid mn} f(d) g\left(\frac{mn}{d}\right) \\ &= \sum_{d_1 \mid m} \sum_{d_2 \mid n} f(d_1 d_2) g\left(\frac{m}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2}\right) \\ &= \left[\sum_{d_1 \mid m} f(d_1) g\left(\frac{m}{d_1}\right)\right] \cdot \left[\sum_{d_2 \mid n} f(d_2) g\left(\frac{n}{d_2}\right)\right] \\ &= f * g(m) \cdot f * g(n). \end{aligned}$$

3.3 默比乌斯反演公式

定理 1(默比乌斯反演公式) 设 f, g 是数论函数，则 $f = g * U \Leftrightarrow g = f * \mu$，即 $f(n) = \sum_{d \mid n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$.

在上面的定理中，f 称为 g 的默比乌斯变换，g 称为 f 的默比乌斯逆变换.

例 6 曼哥特(Mangoldt) 函数定义如下：

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{若 } n = p^{\alpha}, p \text{ 是素数}, \alpha \in \mathbf{Z}^+; \\ 0, & \text{其余情况}. \end{cases}$$

当 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 时，

$$\sum_{d \mid n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \Lambda(p_i^j) = \sum_{i=1}^{k} \ln p_i^{\alpha_i} = \ln n.$$

由定理 1

$$\Lambda(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \ln\left(\frac{n}{d}\right) = \ln n \sum_{d \mid n} \mu(d) - \sum_{d \mid n} \mu(d) \ln d = -\sum_{d \mid n} \mu(d) \ln d.$$

例 7 可重圆排列问题 设 $S = \{1, 2, \cdots, m\}$，用 S 中的元素构成长度为 n 的可重线排列，其个数为 m^n. 若一个圆排列可由一个长度为 k 的线排列重复若干次构成，则这样的 k 中的最小数称为该圆排列的周期. 长度与周期都是 d 的圆排列可在 d 处断开构成 d 个线排列. 设长度与周期都为 d 的圆排列的个数为 $M(d)$，由长度为 n 的可重线排列的个数 m^n 得知

$$\sum_{d \mid n} d M(d) = m^n.$$

从而

$$M(n) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) m^{\frac{n}{d}}.$$

设圆排列的长度为 n，圆排列的个数为 $T(n)$，则

$$T(n) = \sum_{d \mid n} \frac{1}{d} \sum_{d_1 \mid d} \mu(d_1) m^{\frac{d}{d_1}} = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) m^d.$$

当 $n = 7, m = 2$ 时，

$$T(7) = \frac{1}{7}[\varphi(7) \times 2 + \varphi(1) \times 2^7] = \frac{1}{7}[6 \times 2 + 128] = \frac{1}{7} \times 140 = 20.$$

4 二次剩余

4.1 二次剩余

定义1 设 p 是奇素数，$p \nmid a$. 若同余方程

$$x^2 \equiv a \bmod p \tag{4-1}$$

有解，则称 a 为模 p 的二次剩余；若无解，则称 a 为模 p 的二次非剩余.

设 p 是奇素数，则 $\{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \frac{p-1}{2}\}$ 是模 p 的缩系，$\{1^2, 2^2, \cdots, \frac{(p-1)^2}{4}\}$ 是模 p 的全部二次剩余.

定理1 设 p 是奇素数，则模 p 的二次剩余与二次非剩余各有 $\frac{1-p}{2}$ 个.

定理2(欧拉判据) 设 p 是奇素数，则有

$$a^{(p-1)/2} \equiv \begin{cases} 0 \bmod p, & \text{当且仅当 } p \mid a, \\ 1 \bmod p, & \text{当且仅当 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩余}, \\ -1 \bmod p, & \text{当且仅当 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次非剩余}. \end{cases}$$

证 显然，当且仅当 $p \mid a$ 时，

$$a^{(p-1)/2} \equiv 0 \bmod p.$$

设 a 是模 p 的二次剩余，由定义，存在

$$c^2 \equiv a \bmod p,$$

于是

$$a^{(p-1)/2} \equiv c^{2 \cdot (p-1)/2} \equiv 1 \bmod p.$$

设 a 是模 p 的二次非剩余，在模 p 的缩系上定义函数 $f: x_i \mapsto y_i$，使得

$$x_i y_i \equiv a \bmod p (i = 1, 2, \cdots, (p-1)/2).$$

由假设 $x_i \not\equiv y_i \bmod p$ 知 f 是模 p 缩系上的一一对应，从而将模 p 的缩系中的元素配成 $(p-1)/2$ 对，因此有

$$(x_1 y_1)(x_2 y_2) \cdots (x_k y_k) \equiv 1 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \equiv -1 \bmod p, k = \frac{(p-1)}{2}.$$

定义2 设 p 是奇素数，a 是整数. a 对 p 的勒让德(Legendre)符号 $\left(\frac{a}{p}\right)$ 定义如下：

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{当 } p \mid a, \\ 1, & \text{当 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩余}, \\ -1, & \text{当 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次非剩余}. \end{cases}$$

显然，根据定理2和定义2，可以得到

$$\left(\frac{a}{p}\right)=a^{(p-1)/2}\bmod p,$$

勒让德符号还有以下简单性质：

1° $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)$，当 $a\equiv b\bmod p$；

2° $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$；

3° $\left(\frac{a^2}{p}\right)=1$，当 $p\nmid a$；

4° $\left(\frac{1}{p}\right)=1$；

5° $\left(\frac{-1}{p}\right)=\langle p\rangle_4$，$\langle p\rangle_4$ 表示 p 模 4 的绝对最小剩余.

定理 3 设 p 是奇素数，$p\nmid a$，$p_1=(p-1)/2$，$\langle x\rangle_p$ 表示 x 模 p 的绝对最小剩余，$S=\{\langle a\rangle_p,\langle 2a\rangle_p,\cdots,\langle p_1a\rangle_p\}$，$S$ 中取负值的元素的个数为 s，则 $\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^s$.

证 设 $u_1,u_2,\cdots,u_s$ 是 S 中取负值的元素，$v_1,v_2,\cdots,v_t$ 是 S 中取正值的元素. 则 $s+t=p_1$，$-u_1,-u_2,\cdots,-u_s,v_1,v_2,\cdots,v_t$ 是 $1,2,\cdots,p_1$ 的一个排列. 所以

$$(-u_1)(-u_2)\cdots(-u_s)(v_1)(v_2)\cdots(v_t)\equiv p_1!\ \equiv a\cdot 2a\cdot\cdots\cdot p_1a(-1)^s$$
$$\equiv p_1!\ a^{p_1}(-1)^s\bmod p,$$

从而
$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{p_1}\equiv(-1)^s\bmod p.$$

定理 4 设 $p\nmid a$，$p_1=(p-1)/2$，p 是奇素数，则

1° 若 $2\nmid a$，则 $\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^s$，$s=\sum_{k=1}^{p_1}\lfloor\frac{ak}{p}\rfloor$；

2° 当 $a=2$ 时，$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}$.

证 设 $ak=p\lfloor\frac{ak}{p}\rfloor+\langle ak\rangle_p$，$k=1,2,\cdots,p_1$，$\langle ak\rangle_p$ 表示 ak 模 p 的非负最小剩余.

$$S=\{\langle ak\rangle_p\mid k=1,2,\cdots,p_1\}=\{u_1,u_2,\cdots,u_s,v_1,v_2,\cdots,v_t\},$$

其中 $p/2<u_1,u_2,\cdots,u_s<p$，$0<v_1,v_2,\cdots,v_t<p/2$，$s+t=p_1$. 从而 $p-u_1,p-u_2,\cdots,p-u_s,v_1,v_2,\cdots,v_t$ 是 $1,2,\cdots,p_1$ 的一个排列. 于是

$$\sum_{k=1}^{p_1}ak=a\sum_{k=1}^{p_1}k=\frac{a(p^2-1)}{8}=p\sum_{k=1}^{p_1}\lfloor\frac{ak}{p}\rfloor+\sum_{i=1}^{s}u_i+\sum_{j=1}^{t}v_j$$
$$=p\sum_{k=1}^{p_1}\lfloor\frac{ak}{p}\rfloor+\sum_{i=1}^{s}(p-u_i)+2\sum_{i=1}^{s}u_i-sp+\sum_{j=1}^{t}v_j$$
$$=p\sum_{k=1}^{p_1}\lfloor\frac{ak}{p}\rfloor+\frac{p^2-1}{8}+2\sum_{i=1}^{s}u_i-sp.$$

所以

$$(a-1)\frac{p^2-1}{8}=p\sum_{k=1}^{p_1}\left\lfloor\frac{ak}{p}\right\rfloor-sp+2\sum_{i=1}^{s}u_i.$$

1° 当 $2\nmid a$ 时，$2\mid(a-1)$，因而

$$s\equiv\sum_{k=1}^{p_1}\left\lfloor\frac{ak}{p}\right\rfloor \bmod 2,$$

这样就有 $\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^s$，

2° 当 $a=2$ 时，$\left\lfloor\frac{2k}{p}\right\rfloor=0\ (k=1,2,\cdots,p_1)$，从而 $\frac{p^2-1}{8}=-sp+2\sum_{i=1}^{s}u_i$，因此，$\frac{p^2-1}{8}\equiv s \bmod 2$. 这样就有

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}=\begin{cases}1, & 当\ p\equiv\pm1 \bmod 8,\\ -1, & 当\ p\equiv\pm3 \bmod 8.\end{cases}$$

定理 5(二次互反律)　设 p,q 是不同的奇素数，则

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$
$$=\begin{cases}-1, & 当\ p\equiv q\equiv-1 \bmod 4,\\ 1, & 其他.\end{cases}$$

证　设 $\frac{p-1}{2}=p_1,\ \frac{q-1}{2}=q_1$.

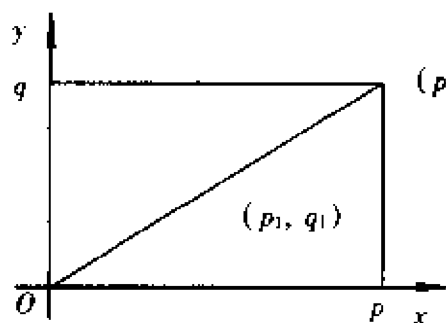


图 4-1

在图 4-1 中，满足 $1\leqslant x\leqslant p_1,1\leqslant y\leqslant q_1$ 的整点 (x,y) 的个数为 $p_1q_1=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$. 直线 $y=\frac{q}{p}x\ (x=1,2,\cdots,p_1)$ 下方的整点的个数为 $\sum_{x=1}^{p_1}\left\lfloor\frac{qx}{p}\right\rfloor$，而其上方的整点的个数为 $\sum_{y=1}^{q_1}\left\lfloor\frac{py}{q}\right\rfloor$. 这二者之和恰好是 $p_1q_1=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$. 根据定理 4 中的 1°，得到

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

而 $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}\equiv\begin{cases}-1, & 当\ p\equiv q\equiv-1 \bmod 4,\\ 1, & 其他.\end{cases}$

定义 3　设 $m=p_1p_2\cdots p_t,p_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是奇素数，定义 $\left(\frac{a}{m}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{a}{p_t}\right)$，其中 $\left(\frac{a}{p_i}\right)$ 是勒让德符号. $\left(\frac{a}{m}\right)$ 称为 a 对 m 的**雅可比(Jacobi)符号**.

雅可比符号是勒让德符号的推广. 由定义和勒让德符号的性质，可知雅可比符

号的以下性质：

1° $\left(\frac{1}{m}\right)=1$；

2° $\left(\frac{a}{m}\right)=0$，当$(a,m)>1$；

3° $\left(\frac{a}{m}\right)=\left(\frac{b}{m}\right)$，当 $a\equiv b \bmod m$；

4° $\left(\frac{ab}{m}\right)=\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{b}{m}\right)$；

5° $\left(\frac{a^2}{m}\right)=1$；

6° $\left(\frac{a}{m_1m_2}\right)=\left(\frac{a}{m_1}\right)\left(\frac{a}{m_2}\right)$.

定理 6 $\left(\frac{-1}{m}\right)=(-1)^{(m-1)/2}=\begin{cases}1, & 当\ m\equiv 1 \bmod 4,\\ -1, & 当\ m\equiv -1 \bmod 4.\end{cases}$

证 设 $m=p_1p_2\cdots p_t$，$p_i(i=1,2,\cdots,t)$是奇素数，可以写成

$$m=(1+(p_1-1))(1+(p_2-1))\cdots(1+(p_t-1)),$$

p_i-1 是偶数，

$$m=1+\sum(p_i-1)+\sum(p_i-1)(p_j-1)+\cdots.$$

于是

$$m-1\equiv\sum(p_i-1) \bmod 4.$$

$$\frac{m-1}{2}\equiv\sum\frac{p_i-1}{2} \bmod 2.$$

所以

$$\left(\frac{-1}{m}\right)=\left(\frac{-1}{p_1}\right)\left(\frac{-1}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{-1}{p_t}\right)=(-1)^{\sum(p_i-1)/2}=(-1)^{(m-1)/2}.$$

定理 7 $\left(\frac{2}{m}\right)=(-1)^{(m^2-1)/8}=\begin{cases}1, & 当\ m\equiv\pm 1 \bmod 8,\\ -1 & 当\ m\equiv\pm 3 \bmod 8.\end{cases}$

证 设

$$m^2=p_1^2p_2^2\cdots p_t^2=(1+(p_1^2-1))(1+(p_2^2-1))\cdots(1+(p_t^2-1)),t\geqslant 2.$$

易知 $8\mid(p_i^2-1)$，于是

$$m^2=1+\sum(p_i^2-1)+\sum(p_i^2-1)(p_j^2-1)+\cdots,$$

$$m^2-1\equiv\sum(p_i^2-1) \bmod 64.$$

$$\frac{m^2-1}{8}\equiv\sum\frac{p_i^2-1}{8} \bmod 2.$$

因而

$$\left(\frac{2}{m}\right)=\left(\frac{2}{p_1}\right)\left(\frac{2}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{2}{p_t}\right)=(-1)^{\sum(p_i^2-1)/8}=(-1)^{(m^2-1)/8}$$

$$=\begin{cases}1, & 当\ m\equiv\pm 1 \bmod 8.\\ -1 & 当\ m\equiv\pm 3 \bmod 8.\end{cases}$$

定理 8 设 m, n 是大于 1 的奇数，$(m,n)=1$. 则

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}.$$

证 设 $m=\prod p_i, n=\prod q_j$, p_i, q_j 是奇素数. 于是

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=\prod_{i,j}\left(\frac{q_j}{p_i}\right)\left(\frac{p_i}{q_j}\right)=(-1)^f,$$

其中 $f=\sum\frac{1}{2}(p_i-1)\frac{1}{2}(q_j-1)$.
在定理 6 中证明了

$$\sum\frac{1}{2}(p_i-1)\equiv\frac{1}{2}(m-1)\bmod 2,$$

$$\sum\frac{1}{2}(q_j-1)\equiv\frac{1}{2}(n-1)\bmod 2.$$

因而 $$f\equiv\frac{1}{2}(m-1)\frac{1}{2}(n-1)\bmod 2.$$

因此 $$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}=\begin{cases}-1, & 当\ m\equiv n\equiv -1\bmod 4,\\ 1, & 其他.\end{cases}$$

雅可比符号与勒让德符号的计算方法很相似. 但要注意，当 $\left(\frac{a}{m}\right)=-1$ 时，$x^2\equiv a\bmod m$ 无解，当 $\left(\frac{a}{m}\right)=1$ 时，$x^2=a\bmod m$ 不一定有解，例如 $\left(\frac{2}{9}\right)=1$，但 $x^2\equiv 2\bmod 9$ 无解，因为 $\left(\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=(-1)^2=1$.

4.2 二次同余方程

先讨论模是奇素数的**二次同余方程**. 只要把(4-1)式的解法搞清楚，其他情况就好办了.

定理 9 设 $\left(\frac{a}{p}\right)=1$,

1° 若 $p=4k-1$，则(4-1)式的解为 $x\equiv\pm a^{(p+1)/4}\bmod p$;

2° 若 $p=8k-3$，则(4-1)式的解为

$$x\equiv\begin{cases}\pm a^{(p+3)/8}\bmod p, & 当\ a^{(p-1)/4}\equiv 1\bmod p,\\ \pm 2^{(p-1)/4}a^{(p+3)/8}, & 当\ a^{(p-1)/4}\equiv -1\bmod p.\end{cases}$$

证 1° 由于 $$a^{(p-1)/2}\equiv a^{2k-1}\equiv 1\bmod p,$$
于是
$$a^{2k}\equiv a\bmod p,$$
所以(4-1)式的解为
$$x\equiv\pm a^{(p+1)/4}\bmod p,$$

2° 因 $$a^{(p-1)/2}\equiv a^{4k-2},$$
若 $$a^{2k-1}\equiv 1\bmod p,$$

则
$$a^{2k} \equiv a \bmod p,$$
即(4-1)式的解为
$$x \equiv \pm a^{(p+3)/8} \bmod p;$$
若
$$a^{2k-1} \equiv -1 \bmod p,$$
则因
$$2^{(p-1)/2} \equiv 2^{4k-2} \equiv -1,$$
得
$$2^{2(2k-1)} a^{2k-1} \equiv (-1)^2 \equiv 1 \bmod p,$$
因此
$$2^{2(2k-1)} a^{2k} \equiv a \bmod p,$$
即(4-1)式的解是
$$x \equiv \pm 2^{(p-1)/4} a^{(p+3)/8} \bmod p.$$

唯一比较麻烦的情况是 $p = 8k + 1$. 下面举例说明解法. 关键在于找一个模 p 的非剩余.

例 1　解 $x^2 \equiv 5 \bmod 41$.

解　因 $\left(\frac{5}{41}\right) = \left(\frac{41}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) = 1$. 故此同余方程有解. 又
$$41 = 2^3 \times 5 + 1,$$
$$5^{(41-1)/4} \equiv 5^{10} \equiv -1 \bmod 41,$$
$$\left(\frac{3}{41}\right) = \left(\frac{41}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1 \equiv 3^{(41-1)/2} \equiv 3^{2^2 \times 5} \bmod 41.$$
所以 3 是模 41 的二次非剩余.
$$3^{20} \times 5^{10} \equiv 1 \bmod 41,$$
$$3^{10} \times 5^5 \equiv 3^{4\times 2} \times 3^2 \times 5^3 \times 5^2 \equiv (-1)^2 \times 9 \times 2 \times 25 \equiv -1 \bmod 41,$$
$$3^{20+10} \times 5^5 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \bmod 41,$$
$$3^{30} \times 5^6 \equiv 5 \bmod 41,$$
$$3^{15} \times 5^3 \equiv 3^{4\times 3} \times 3^3 \times 2 \equiv (-1)^3 \times 27 \times 2 \equiv 13 \bmod 41.$$
因此, 方程的解是
$$x \equiv \pm 13 \bmod 41.$$

下面用两种方法给出模是素数幂的二次同余方程.

设　$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ n \geqslant 2$.

$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ 为 $f(x)$ 的导函数,
$$f(x) \equiv 0 \bmod p^{\alpha}, \tag{4-2}$$
$$f(x) \equiv 0 \bmod p^{\alpha-1}, \tag{4-3}$$
其中 p 是素数, $\alpha \geqslant 2$.

定理 10　设 $x \equiv x_{\alpha-1} \bmod p^{\alpha-1}$ 是(4-3)式的解, $p \nmid f'(x_{\alpha-1})$, 则(4-2)式的解是
$$x \equiv x_{\alpha-1} + p^{\alpha-1} t_{\alpha-1} \bmod p^{\alpha},$$
其中 $y \equiv t_{\alpha-1} \bmod p$ 是
$$f'(x_{\alpha-1}) y \equiv -\frac{f(x_{\alpha-1})}{p^{\alpha-1}} \bmod p$$
的解.

证　设(4-2)式的解为　$x \equiv x_\alpha \bmod p^\alpha$,

即
$$f(x_\alpha) \equiv 0 \bmod p^\alpha.$$
从而
$$f(x_\alpha) \equiv 0 \bmod p^{\alpha-1},$$
于是
$$x_\alpha = x_{\alpha-1} + p^{\alpha-1}y, y \in \mathbf{Z}.$$
$$f(x_\alpha) = f(x_{\alpha-1} + p^{\alpha-1}y).$$
由
$$f(x_{\alpha-1} + p^{\alpha-1}y) \equiv 0 \bmod p^\alpha,$$
知
$$f(x_{\alpha-1}) + p^{\alpha-1}f'(x_{\alpha-1})y \equiv 0 \bmod p^\alpha.$$
由
$$f(x_{\alpha-1}) \equiv 0 \bmod p^{\alpha-1},$$
知 $p^{\alpha-1} \mid f(x_{\alpha-1})$. 从而
$$f'(x_{\alpha-1})y \equiv \frac{-f(x_{\alpha-1})}{p^{\alpha-1}} \bmod p.$$
因 $p \nmid f'(x_{\alpha-1})$, 知 $f'(x_{\alpha-1})$ 模 p 有逆元, 因此
$$y \equiv -\frac{f(x_{\alpha-1})}{p^{\alpha-1}f'(x_{\alpha-1})} \bmod p.$$

例 2　解 $x^2 \equiv 39 \bmod 125$.

解　先解 $x^2 \equiv 39 \bmod 5$. 因 $\left(\frac{39}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right) = 1$, 故 $x^2 = 39 \bmod 5$ 有解. 即 $x \equiv \pm 2 \bmod 5$ 是解.

根据定理 10 知
$$x \equiv \pm (2 - (4 - 39)\langle 4^{-1}\rangle_5) \bmod 25$$
是 $x^2 \equiv 39 \bmod 25$ 的解, 即
$$x \equiv \pm 33 \bmod 25, x \equiv \pm 8 \bmod 25.$$
经验证正确. $x \equiv \pm (8 - (64 - 39)\langle 16^{-1}\rangle_5) \bmod 125$, 即 $x \equiv \pm (8 - 25\langle 16^{-1}\rangle_5) \bmod 125$, 所以 $x \equiv \pm 17 \bmod 125$ 是同余方程的解. 验证正确.

使用类似的方法可以证明下面的定理:

定理 11　设
$$x^2 \equiv a \bmod 2^\alpha, \alpha \geqslant 3, \tag{4-4}$$
(4-4) 式有解的充要条件是 $a \equiv 1 \bmod 8$. 若 $x \equiv x_\alpha \bmod 2^\alpha$ 是(4-4)式的一个特解, 则其所有的解是 $x = \pm (x_\alpha + 2^{\alpha-1}t_\alpha), t_\alpha \in \mathbf{Z}$. 共有 4 个解.

例 3　解 $x^2 \equiv 25 \bmod 64$.

解　因 $25 \equiv 1 \bmod 8$, 故有 4 个解. 对模从 2^4 到 2^6 逐次处理. 因 $x \equiv 1 \bmod 8$ 是 $x^2 \equiv 25 \bmod 8$ 的一个特解,
$$(1 + 4t_3)^2 \equiv 25 \bmod 16,$$
$$t_3 \equiv 1 \bmod 2.$$
故
$$x = \pm (1 + 4(1 + 2t_4)) = \pm (5 + 8t_4)$$
是 $x^2 \equiv 25 \bmod 16$ 的所有解. 由
$$(5 + 8t_4)^2 \equiv 25 \bmod 32,$$
得
$$t_4 \equiv 0 \bmod 2.$$

知
$$x = \pm(5 + 8 \times 2t_5)$$
是 $x^2 \equiv 25 \bmod 32$ 的解.最后又由
$$(5 + 16t_5)^2 \equiv 25 \bmod 64,$$
得
$$t_5 \equiv 0 \bmod 2.$$
故 $x = \pm(5 + 32t_6)$ 是原方程的所有解,即
$$x \equiv \pm 5, \quad \pm 27 \bmod 64.$$

把所有的情况综合起来,就得到下面的定理.

定理 12　设
$$x^2 \equiv a \bmod m, \tag{4-5}$$
$$m = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, (a, m) = 1.$$
(4-5) 式有解的必要条件是 1°、2° 同时成立:

1° 当 $\alpha = 2$ 时, $a \equiv 1 \bmod 4$;当 $\alpha \geqslant 3$ 时, $a \equiv 1 \bmod 8$.

2° $\left(\dfrac{a}{p_i}\right) = 1, i = 1, 2, \cdots, k$. 若上述条件成立,则当 $\alpha = 0, 1$ 时,解数为 2^k;当 $\alpha = 2$ 时,解数为 2^{k+1};当 $\alpha \geqslant 3$ 时,解数为 2^{k+2}.

可以与定理 10 起相似作用的是下面的定理:

定理 13　设 p 为奇素数, $p \nmid a$, $\left(\dfrac{a}{p}\right) = 1$, $\alpha \geqslant 2$, $x \equiv x_1 \bmod p$ 是 $x^2 \equiv a \bmod p$ 的一个特解.则 $x^2 \equiv a \bmod p^{\alpha}$ 的所有解是 $x \equiv \pm PQ^{-1} \bmod p^{\alpha}$. 其中
$$P = \frac{(x_1 + \sqrt{a})^{\alpha} + (x_1 - \sqrt{a})^{\alpha}}{2},$$
$$Q = \frac{(x_1 + \sqrt{a})^{\alpha} - (x_1 - \sqrt{a})^{\alpha}}{2\sqrt{a}}.$$
Q^{-1} 是 Q 模 p^{α} 的逆元.

例 4　解 $x^2 \equiv 1 \bmod 400$.

解　因 $400 = 2^4 \times 5^2$. 故 $x^2 \equiv 1 \bmod 2^4$ 的解是
$$x \equiv \pm 1, \pm 7 \bmod 2^4,$$
$x^2 \equiv 1 \bmod 5^2$ 的解是
$$x \equiv \pm 1 \bmod 5^2.$$
由孙子定理,知 $x^2 \equiv 1 \bmod 400$ 的解是
$$x \equiv 16 \times 11 \times (\pm 1) + 25(-7)(\pm 1, \pm 7)$$
$$\equiv \pm 1, \pm 49, \pm 151, \pm 199 \bmod 400.$$
其中数据如下:

-32	-14	6		
25	16	-7	2	-1
	-2	2	3	
	-11	7	3	1

$$16 \times (-11) + 25 \times 7 = -1, \quad 16 \times 11 + 25(-7) = 1.$$

5 指数、原根与指标

5.1 指 数

设 $m \in \mathbf{Z}^+$，$(a, m) = 1$. 由 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m$，知道有

$$t_0 = \min\{t \mid a^t \equiv 1 \bmod m, t \in \mathbf{Z}^+\}.$$

定义1 设 $m \in \mathbf{Z}^+$，$(a, m) = 1$. $a^t \equiv 1 \bmod m$ 的最小正整数 t 称为 a 模 m 的**指数**(阶)，记作 $\delta_m(a)$. 当 $\delta_m(a) = \varphi(m)$ 时，称 a 为模 m 的**原根**.

例如，若 $m = 5$，$\varphi(5) = 4$. $\delta_5(1) = 1$，$\delta_5(2) = 4$，$\delta_5(-1) = 2$，$\delta_5(-2) = 4$. 则 ± 2 都是模 5 的原根.

例如，若 $m = 8$，$\varphi(8) = 4$. $\delta_8(1) = 1$，$\delta_8(-1) = 2$，$\delta_8(\pm 3) = 2$. 则模 8 无原根.

下面是指数的一些简单性质：

1° 若 $a^t \equiv 1 \bmod m$，则 $\delta_m(a) \mid t$，$\delta_m(a) \mid \varphi(m)$.

2° 若 $m = 2^{\alpha}$，$\alpha \geqslant 3$，$(a, m) = 1$，则 $\delta_m(a) \mid 2^{\alpha-2}$.

3° 若 $\delta_m(a) = \varphi(m)$，则 $a^0, a, \cdots, a^{\varphi(m)-1}$ 构成模 m 的缩系.

4° 设 $k \in \mathbf{N}$，则 $\delta_m(a^k) = \dfrac{\delta_m(a)}{(\delta_m(a), k)}$. 在模 m 的缩系中至少有 $\varphi(\delta_m(a))$ 个数阶为 $\delta_m(a)$.

证 设 $\delta = \delta_m(a)$，$\delta_1 = \dfrac{\delta}{(\delta, k)}$，$\delta_2 = \delta_m(a^k)$.

$$(a^k)^{\delta_2} \equiv 1 \bmod m \Rightarrow \delta \mid k\delta_2 \Rightarrow \frac{\delta}{(\delta, k)} \,\Big|\, \frac{k}{(\delta, k)}\delta_2$$

$$\Rightarrow \delta_1 \mid \delta_2,$$

$$(a^k)^{\delta_1} \equiv a^{\delta k/(\delta, k)} \equiv 1 \bmod m \Rightarrow \delta_2 \mid \delta_1,$$

因此 $\delta_1 = \delta_2$.

5° $\delta_m(ab) = \delta_m(a)\delta_m(b) \Leftrightarrow (\delta_m(a), \delta_m(b)) = 1$.

证 设 $\delta = \delta_m(ab)$，$\delta_1 = \delta_m(a)$，$\delta_2 = \delta_m(b)$，$\eta = [\delta_m(a), \delta_m(b)]$.

"$\Leftarrow$"： $(ab)^{\delta\delta_2} \equiv a^{\delta\delta_2} \equiv 1 \bmod m \Rightarrow \delta_1 \mid \delta\delta_2 \Rightarrow \delta_1 \mid \delta$;

同理 $$\delta_2 \mid \delta,$$

所以 $$\delta_1\delta_2 \mid \delta.$$

$$(ab)^{\delta_1\delta_2} \equiv 1 \bmod m \Rightarrow \delta \mid \delta_1\delta_2.$$

因此 $$\delta = \delta_1\delta_2.$$

"$\Rightarrow$"： $$(ab)^{\eta} \equiv 1 \bmod m \Rightarrow \delta \mid \eta,$$

同时 $$\eta \mid \delta_1\delta_2 = \delta,$$

所以 $$\eta = \delta_1\delta_2.$$

故有 $$(\delta_1, \delta_2) = 1.$$

6° 若 $n \mid m$，则 $\delta_n(a) \mid \delta_m(a)$.

证 $a^{\delta_m(a)} \equiv 1 \bmod m \Rightarrow a^{\delta_m(a)} \equiv 1 \bmod n \Rightarrow \delta_n(a) \mid \delta_m(a)$.

7° 若 $(n,m)=1$，则 $\delta_{mn}(a) = [\delta_m(a), \delta_n(a)]$.

证 因
$$\delta_m(a) \mid \delta_{mn}(a),\ \delta_n(a) \mid \delta_{mn}(a).$$
设 $\eta = [\delta_m(a), \delta_n(a)]$，$\eta \mid \delta_{mn}(a)$，另一方面，设
$$\eta = [\delta_m(a), \delta_n(a)],\quad a^{\eta} \equiv 1 \bmod m,\ a^{\eta} \equiv 1 \bmod n,$$
故 $a^{\eta} \equiv 1 \bmod mn$，所以有 $\delta_{mn}(a) \mid \eta$.
所以
$$\delta_{mn}(a) = \eta.$$

8° 设 $(m,n)=1$，$(a,m)=(b,m)=1$. 则有 c 满足 $\delta_{mn}(c) = [\delta_m(a), \delta_n(b)]$.

证 设 $x \equiv c \bmod mn$ 是同余方程组
$$x \equiv a \bmod m,\quad x \equiv b \bmod n$$
的解. 显然
$$\delta_m(c) = \delta_m(a),\quad \delta_n(c) = \delta_n(b),$$
由性质 7° 有 $\delta_{mn}(c) = [\delta_m(a), \delta_n(b)]$.

9° 设 $(a,m)=(b,m)=1$. 存在 c，满足 $\delta_m(c) = [\delta_m(a), \delta_m(b)]$.

证 设
$$\delta_1 = \delta_m(a) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$
$$\delta_2 = \delta_m(b) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k},$$
$$\eta = [\delta_1, \delta_2] = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k},$$
$$\eta_1 = p_1^{e_1\alpha_1} p_2^{e_2\alpha_2} \cdots p_k^{e_k\alpha_k},$$
其中
$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } \alpha_i = \gamma_i, \\ 0, & \text{当 } \alpha_i < \gamma_i, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,k,$$
$$\eta_2 = \eta/\eta_1,\quad \delta_1 = \tau_1\eta_1,\quad \delta_2 = \tau_2\eta_2.$$
于是 $(\eta_1, \eta_2) = 1$.
由性质 5° 有
$$\delta_m(a^{\tau_1} b^{\tau_2}) = \delta_m(a^{\tau_1}) \cdot \delta_m(b^{\tau_2}) = \eta_1\eta_2 = \eta.$$

设 $m = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$，$\lambda(m) = [2^{c_0}, \varphi(p_1^{\alpha_1}), \cdots, \varphi(p_k^{\alpha_k})]$，
其中
$$c_0 = \begin{cases} 0, & \text{当 } \alpha_0 = 0,1, \\ 1, & \text{当 } \alpha_0 = 2, \\ \alpha_0 - 2, & \text{当 } \alpha_0 \geqslant 3. \end{cases}$$

模 m 存在原根的必要条件是
$$\varphi(m) = \lambda(m).$$

5.2 原　　根

定理 1 设 p 是素数，则模 p 有原根.

证 设 $\delta = [\delta_p(1), \delta_p(2), \cdots, \delta_p(p-1)]$. 由 5.1 节性质 9° 知，存在 g，使得 $\delta_p(g) = \delta$，显然 $\delta \mid p-1$. 另一方面 $x^{\delta} - 1 \equiv 0 \bmod p$，有解 $x \equiv 1,2,\cdots,p-1 \bmod$

p. 而解的个数不高于多项式的次数,从而 $p-1 \leqslant \delta$. 所以,$\delta = p-1$.

另外可以证明任给正整数 $d \mid p-1$,必有模 p 阶为 d 的整数,这样的整数在模 p 的一个缩系中恰有 $\varphi(d)$ 个.

证　设在模 p 的一个缩系中阶为 d 的元的个数为 $\psi(d)$, $p-1 = dk$. 于是

$$x^{p-1}-1 = (x^d-1)(x^{d(k-1)}+x^{d(k-2)}+\cdots+x^d+1),$$

由 2.3 节的定理 6 知,$x^{p-1}-1 \equiv 0 \bmod p$ 的全部解是 $1,2,\cdots,p-1$,由 2.4 的定理 10 知,$x^d-1 \equiv 0 \bmod p$ 的解数为 d. 若 $\delta_p(a) = d$,则 $a^0, a^1, \cdots, a^{d-1}$ 是 $x^d-1 \equiv 0 \bmod p$ 的全部解,且所有模 p 阶为 d 的元都在 $a^0, a^1, \cdots, a^{d-1}$ 中,由 5.1 节的性质 4° 知,阶为 d 的元的个数恰为 $\varphi(d)$. 因此

$$\psi(d) = \begin{cases} \varphi(d), & \text{若存在模 } p \text{ 阶为 } d \text{ 的元}, \\ 0, & \text{若不存在模 } p \text{ 阶为 } d \text{ 的元}. \end{cases}$$

总之 $\psi(d) \leqslant \varphi(d)$. 显然,

$$\sum_{d \mid p-1} \psi(d) = p-1.$$

由 3.2 节的例 3 知,

$$\sum_{d \mid p-1} \varphi(d) = p-1.$$

所以

$$p-1 = \sum_{d \mid p-1} \psi(d) \leqslant \sum_{d \mid p-1} \varphi(d) = p-1.$$

只要存在 d,便得 $0 = \psi(d) < \varphi(d)$,就有

$$p-1 = \sum_{d \mid p-1} \psi(d) < \sum_{d \mid p-1} \psi(d) = p-1,$$

矛盾. 因此,任给 $d \mid p-1$,都有 $\psi(d) = \varphi(d)$. 特别地,有 $\psi(p-1) = \varphi(p-1)$,即模 p 有原根,原根的个数为 $\varphi(\varphi(p))$.

定理 2　设 p 是奇素数,$\alpha \geqslant 1$. 则模 p^α 有原根. 存在 g_1 是模 p^α 与模 $2p^\alpha$ 的公共原根.

先证明几个命题,再证明定理 2.

1° 设 p 是奇素数,$\alpha \in \mathbf{Z}^+$. 若 $g^{\varphi(p)} \not\equiv 1 \bmod p^2$,则 $g^{\varphi(p^\alpha)} \not\equiv 1 \bmod p^{\alpha+1}$.

证　对 α 用归纳法. 当 $\alpha = 1$ 时,命题成立. 假设对 $\alpha-1(\alpha \geqslant 2)$,命题成立. 即

$$g^{\varphi(p^{\alpha-1})} \not\equiv 1 \bmod p^\alpha.$$

由 2.3 节定理 5 知

$$\begin{aligned} g^{\varphi(p^{\alpha-1})} \equiv 1 \bmod p^{\alpha-1} &\Rightarrow g^{\varphi(p^{\alpha-1})} = 1 + kp^{\alpha-1} (p \nmid k) \Rightarrow g^{\varphi(p^\alpha)} = (1+kp^{\alpha-1})^p \\ &= 1 + kp^\alpha + p(p-1)k^2p^{2(\alpha-1)}/2 + \cdots \equiv 1 + kp^\alpha \not\equiv 1 \bmod p^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

2° 设 p 是奇素数,$\alpha \in \mathbf{Z}^+$, g 是模 p 的原根,

$$g_1 = \begin{cases} g, & \text{若 } g^{\varphi(p)} \not\equiv 1 \bmod p^2, \\ g+p, & \text{若 } g^{\varphi(p)} \equiv 1 \bmod p^2. \end{cases}$$

则 g_1 是模 p^α 的原根.

证　设 $\delta_{p^\alpha}(g_1) = \delta$. 显然,$g_1$ 是模 p 的原根.

$$g_1^{\delta} \equiv 1 \bmod p^{\alpha} \Rightarrow g_1^{\delta} \equiv 1 \bmod p \Rightarrow \varphi(p) \mid \delta,$$
$$\delta = \varphi(p)k \Rightarrow \varphi(p)k \mid \varphi(p^{\alpha}) \Rightarrow k \mid p^{\alpha-1}.$$

设 $k = p^{\beta}, \beta \leqslant \alpha - 1$. 若 $\beta \leqslant \alpha - 2$,则

$$\delta \mid \varphi(p^{\alpha-1}) \Rightarrow g_1^{\varphi(p^{\alpha-1})} \equiv 1 \bmod p^{\alpha}.$$

但
$$g_1^{\varphi(p)} \not\equiv 1 \bmod p^2,$$

由命题 1°有
$$g_1^{\varphi(p^{\alpha-1})} \not\equiv 1 \bmod p^{\alpha},$$

矛盾. 因此,$\beta = \alpha - 1$,即 $\delta = \varphi(p^{\alpha})$. 所以,$g_1$ 是模 p^{α} 的原根.

3° 设 p 是奇素数,$\alpha \in \mathbf{Z}^+$,g 是模 p^{α} 的原根. 若 g 是奇数,则 g 是模 $2p^{\alpha}$ 的原根.

证 设 $\delta_{2p^{\alpha}}(g) = \delta$. 则

$$(g, 2p^{\alpha}) = 1 \Rightarrow g^{\varphi(2p^{\alpha})} \equiv 1 \bmod 2p^{\alpha} \Rightarrow \delta \mid \varphi(2p^{\alpha}) = \varphi(p^{\alpha});$$
$$g^{\delta} \equiv 1 \bmod 2p^{\alpha} \Rightarrow g^{\delta} \equiv 1 \bmod p^{\alpha} \Rightarrow \varphi(p^{\alpha}) \mid \delta.$$

所以
$$\delta = \varphi(p^{\alpha}) = \varphi(2p^{\alpha}),$$

故 g 是模 $2p^{\alpha}$ 的原根.

定理 2 的**证明** 由定理 1 知,模 p 有原根. 由命题 2°知,模 p^{α} 有原根,设为 g,令

$$g_1 = \begin{cases} g, & \text{若 } g \text{ 是奇数,} \\ g + p^{\alpha}, & \text{若 } g \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

则 g_1 是模 p^{α} 的原根,且是奇数,由命题 3°知,g_1 是模 $2p^{\alpha}$ 的原根.

由上述综合起来就得到下面的结论:

定理 3 模 m 有原根的充要条件是 $m = 1, 2, 4, p^{\alpha}$ 或 $2p^{\alpha}$, p 是奇素数,$\alpha \in \mathbf{Z}^+$.

定理 4 设 $2 \nmid a, k \geqslant 3$,则 $a^{2^{k-2}} \equiv 1 \bmod 2^k$.

证 对 k 用归纳法. 当 $k = 3$ 时,设 $a = 4t \pm 1$. 从而

$$a^2 = 16t^2 \pm 8t + 1 \equiv 1 \bmod 8.$$

假设对 k,结论成立,即

$$a^{2^{k-2}} \equiv 1 \bmod 2^k, \quad \text{或} \quad a^{2^{k-2}} = 1 + d \cdot 2^k, \quad d \in \mathbf{Z}.$$
$$(a^{2^{k-2}})^2 = (1 + d \cdot 2^k)^2 = 1 + d \cdot 2^{k+1} + d^2 2^{2k} \equiv 1 \bmod 2^{k+1}.$$

即对 $k+1$,结论成立.

定理 5 设 $k \geqslant 3$. 5 模 2^k 的阶为 2^{k-2}.

5.3 指　　标

设模 m 有原根 g, $(a, m) = 1$. 若 $a \equiv g^{\gamma} \bmod m, 0 \leqslant \gamma \leqslant \varphi(m)$,则称 a 模 m 以 g 为底的**指标**是 γ,记作 $\gamma_{m,g}(a) = \gamma$,简记作 $\gamma_g(a) = \gamma$,或 $\gamma(a) = \gamma$.

设 g 是模 m 的原根,$(a, m) = (b, m) = 1$. 则有以下性质:

1° $\gamma(ab) \equiv \gamma(a) + \gamma(b) \bmod \varphi(m)$.

2° 若 $k \in \mathbf{Z}^+$,则 $\gamma(a^k) \equiv k\gamma(a) \bmod \varphi(m)$.

3° 若 g' 是模 m 的另一个原根,则 $\gamma_{g'}(a) \equiv \gamma_{g'}(g)\gamma_g(a) \bmod \varphi(m)$. 特别地,

$\gamma_{g'}(g)\cdot\gamma_g(g')\equiv 1 \bmod \varphi(m)$.

4° $\delta(a)=\dfrac{\varphi(m)}{(\gamma(a),\varphi(m))}$.

设 $\alpha\geqslant 3$，g_0 是模 2^α 的阶最大元(例如，可取 $g_0=5$)，则模 2^α 的缩系是 $\{\pm g_0,\pm g_0^3,\cdots,\pm g_0^{2^{\alpha-2}-1}\}$，即任给 $a\in\mathbf{Z}$，$2\nmid a$，都有

$$a\equiv(-1)^{\gamma_{-1}}g_0^{\gamma_0} \bmod 2^\alpha,\quad 0\leqslant\gamma_{-1}\leqslant 1,\quad 0\leqslant\gamma_0<2^{\alpha-2},$$

其中 γ_{-1}，γ_0 称为 a 模 2^α 以 -1，g_0 为底的指标组.

更一般地，设

$$m=2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},\quad \alpha\geqslant 0,\alpha_i\geqslant 1,1\leqslant i\leqslant k.$$

则

$$h=\begin{cases}0, & 0\leqslant\alpha\leqslant 1,\\ 1, & \alpha=2,\\ 2, & \alpha\geqslant 3.\end{cases}$$

5° 在上述假设中，模 m 的缩系中的任一个元 a 可用 $h+k$ 个数的乘幂表示. 这 $h+k$ 个幂指数称为 a 模 m 的指标组.

6° 设 $m,k\in\mathbf{Z}^+$，$(a,m)=1$，模 m 有原根，则二项同余方程 $x^k\equiv a \bmod m$ 有解的充要条件是，$(k,\varphi(m))\mid\gamma(a)$. 若有解，则解的个数为 $(k,\varphi(m))$.

例 设 $m=40=8\times 5$，$a\equiv(-1)^{\gamma_{-1}}(-3)^{\gamma_0}(7)^{\gamma_1} \bmod 40$，$0\leqslant\gamma_{-1}\leqslant 1$，$0\leqslant\gamma_0\leqslant 1$，$0\leqslant\gamma_1\leqslant 3$，则其数据如表所示.

γ_{-1}	γ_0	γ_1	a	γ_{-1}	γ_0	γ_1	a	γ_{-1}	γ_0	γ_1	a
0	0	0	1	0	1	3	11	1	1	2	-13
0	0	1	7	1	0	0	-1	1	1	3	-11
0	0	2	9	1	0	1	-7				
0	0	3	-17	1	0	2	-9				
0	1	0	-3	1	0	3	17				
0	1	1	19	1	1	0	3				
0	1	2	13	1	1	1	-19				

6 连 分 数

6.1 连分数的基本性质

定义 1 设 $a_0,a_1,\cdots$ 是无穷实数序列，当 $i\geqslant 1$ 时，$a_i>0$，称(6-1)式

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\cdots+a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}} \tag{6-1}$$

为 n 阶**有限连分数**，当 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是整数时称之为**有限简单连分数**. 为了方便，把(6-1)式记作 $\langle a_0,a_1,\cdots,a_n\rangle$. 设 $0\leqslant k\leqslant n$，则 $\langle a_0,a_1,\cdots,a_k\rangle$ 称为(6-1)式的第 k 个**渐近分数**. $a_i(0\leqslant i\leqslant n)$ 称为(6-1)式的第 i 个部分商. 当(6-1)式中的 $n\to\infty$ 时，称之为**无限连分数**，若 $a_i(i\geqslant0)$ 都是整数，则称之为**无限简单连分数**. 若有极限

$$\lim_{k\to\infty}\langle a_0,a_1,\cdots,a_k\rangle=\theta, \tag{6-2}$$

则称此无限连分数是收敛的，θ 称为 $\langle a_0,a_1,\cdots\rangle$ 的值，记作 $\langle a_0,a_1,\cdots\rangle=\theta$，若此极限不存在，则称 $\langle a_0,a_1,\cdots\rangle$ 是发散的.

连分数的一些基本性质如下：

1° 设 $n,r\geqslant1$，则

$$\begin{aligned}&\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+r}\rangle\\&=\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},\langle a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+r}\rangle\rangle\\&=\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n+1/\langle a_{n+1},\cdots,a_{n+r}\rangle\rangle\end{aligned} \tag{6-3}$$

2° 任给实数 $\eta>0$，整数 $n\geqslant0$，则

$$\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n\rangle>\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n+\eta\rangle,2\nmid n. \tag{6-4}$$

$$\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n\rangle<\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n+\eta\rangle,2\mid n. \tag{6-5}$$

3° 记 $\alpha^{(n)}=\langle a_0,a_1,\cdots,a_n\rangle$，则有

$$\alpha^{(n)}>\alpha^{(n+r)},\ 2\nmid n,r\geqslant1;$$
$$\alpha^{(n)}<\alpha^{(n+r)},\ 2\mid n,r\geqslant1;$$
$$\alpha^{(0)}<\alpha^{(2)}<\alpha^{(4)}<\cdots<\alpha^{(2t)}<\cdots;$$
$$\alpha^{(1)}>\alpha^{(3)}>\alpha^{(5)}>\cdots>\alpha^{(2t-1)},\cdots.$$

4° 设 $a_0,a_1,\cdots$ 是无穷实数序列，$a_i>0(i\geqslant1)$，$P_0=a_0$，$P_1=a_1a_0+1$，$Q_0=1$，$Q_1=a_1$，$P_n=a_nP_{n-1}+P_{n-2}$，$Q_n=a_nQ_{n-1}+Q_{n-2}$，$n\geqslant2$. 则

$$\langle a_0,a_1,\cdots,a_n\rangle=P_n/Q_n,\qquad n\geqslant0. \tag{6-6}$$

$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(-1)^{n+1},\quad n\geqslant1, \tag{6-7}$$

$$P_nQ_{n-2}-P_{n-2}Q_n=(-1)^na_n,\quad n\geqslant2. \tag{6-8}$$

$$\langle a_0,a_1,\cdots,a_n\rangle-\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\rangle=(-1)^{n+1}(Q_nQ_{n-1})^{-1},\quad n\geqslant1, \tag{6-9}$$

$$\langle a_0,a_1,\cdots,a_n\rangle-\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n-2}\rangle=(-1)^na_n(Q_nQ_{n-2})^{-1},\quad n\geqslant2. \tag{6-10}$$

对 n 用归纳法，便可证明以上各式.

5° 有限简单连分数 $\langle a_0,a_1,\cdots,a_n\rangle$ 表示一个有理数，若 $a_n>1$，则表示是唯一的.

例 1 求 $\frac{209}{121}$ 的有限简单连分数及其各渐近分数，并比较它们之间的大小.

解 $\frac{209}{121}=\langle1,1,2,1,2\rangle$，

k			0	1	2	3	4
a_k			1	1	2	1	2
P_k	0	1	1	2	5	7	19
Q_k	1	0	1	1	3	4	11

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{209}{121} = \frac{19}{11} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}.$$

6.2　无限简单连分数

设$\langle a_0, a_1, \cdots \rangle$是无限简单连分数，它有下列性质：

1° 无限简单连分数是收敛的，收敛于无理数.

证　设 $\alpha^{(n)} = \langle a_0, a_1, \cdots, a_n \rangle$是$\langle a_0, a_1, \cdots \rangle$的第 n 个渐近分数. $\alpha^{(0)}, \alpha^{(2)}, \cdots$ $\alpha^{(2k)}, \cdots$是严格递增序列. $\alpha^{(1)}, \alpha^{(3)}, \cdots, \alpha^{(2k+1)}, \cdots$是严格递减序列. Q_n 如 6.1 节性质 4°所设，则 $Q_1, Q_2, \cdots$是严格递增序列. 显然

$$\alpha^{(2k)} < \alpha^{(1)}, \quad \alpha^{(2k+1)} > \alpha^{(0)}, \quad \lim_{n\to\infty} Q_n = \infty.$$

设$\lim\limits_{k\to\infty} \alpha^{(2k+1)} = \theta_1$, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha^{(2k)} = \theta_2$. 那么

$$\alpha^{(2k)} < \theta_2 \leqslant \theta_1 < \alpha^{(2k+1)}.$$

$$\theta_1 - \theta_2 < \alpha^{(2k+1)} - \alpha^{(2k)} = (Q_{2k+1} Q_{2k})^{-1}.$$

因此 $\theta_1 = \theta_2$. 令 $\theta = \theta_1 = \theta_2$，有

$$\lim_{k\to\infty} \alpha^{(k)} = \theta.$$

若 $\theta = P/Q$ 是有理数，则任给正整数 k，

$$0 < |\theta - \alpha^{(k)}| < |\alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)}| = (Q_k Q_{k+1})^{-1}.$$

$$\left| \frac{P}{Q} - \frac{P_k}{Q_k} \right| = \frac{|PQ_k - QP_k|}{QQ_k} < (Q_k Q_{k+1})^{-1},$$

由 $1 \leqslant |PQ_k - QP_k|$，知$|Q| > Q_{k+1}$，矛盾. 故 θ 是无理数.

2° 设$\langle a_0, a_1, \cdots \rangle$是无限简单连分数，$\theta_n = \langle a_n, a_{n+1}, \cdots \rangle$，$n \geqslant 0$，则 $a_n = \lfloor \theta_n \rfloor$，$n \geqslant 0$，$\langle a_0, a_1, \cdots \rangle = \langle a_0, a_1, \cdots, a_n, \theta_{n+1} \rangle$.

3° $\langle a_0, a_1, \cdots \rangle$，$\langle b_0, b_1, \cdots \rangle$是无限简单连分式. 若$\langle a_0, a_1, \cdots \rangle = \langle b_0, b_1, \cdots \rangle$，则 $a_i = b_i$，$i \geqslant 0$.

4° 任一无理数ξ_0 都可以表示成无限简单连分数$\langle a_0, a_1, \cdots \rangle$. 其中 $\xi_0 = \lfloor \xi_0 \rfloor + \{\xi_0\}$，$a_i = \lfloor \xi_i \rfloor$，$\xi_{i+1} = 1/\{\xi_i\}$，$i \geqslant 0$.

例 2　求$\langle 1, 1, \cdots \rangle$的值.

解　设 $\theta = \langle 1, 1, \cdots \rangle$. $\theta = \langle 1, \theta \rangle = 1 + \dfrac{1}{\theta}$. 从而

$$\theta^2 - \theta - 1 = 0.$$

因 $\theta>1$,故

$$\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5° 设无理数 ξ_0 的无限简单连分数为 $\langle a_0,a_1,\cdots\rangle$, $\alpha^{(n)}=\langle a_0,a_1,\cdots,a_n\rangle$. 则

$$\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})}<|\xi_0-\alpha^{(n)}|<\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}.$$

证 因

$$\xi_0=\langle a_0,a_1,\cdots,a_n,\xi_{n+1}\rangle=\frac{\xi_{n+1}P_n+P_{n-1}}{\xi_{n+1}Q_n+Q_{n-1}}\quad(n\geqslant 0),$$

$$\xi_0-\alpha^{(n)}=\xi_0-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}Q_n-P_nQ_{n-1}}{Q_n(\xi_{n+1}Q_n+Q_{n-1})}\quad(n\geqslant 0).$$

由 $a_{n+1}<\xi_{n+1}<a_{n+1}+1$,知

$$\begin{aligned}Q_{n+1}&=a_{n+1}Q_n+Q_{n-1}<\xi_{n+1}Q_n+Q_{n-1}<a_{n+1}Q_n+Q_{n-1}+Q_n\\&=Q_{n+1}+Q_n.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})}<|\xi_0-\alpha^{(n)}|<\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}.$$

由性质 5°及 $Q_n+Q_{n+1}\leqslant Q_{n+2}$,知

$$|\xi_0-\alpha^{(n+1)}|<\frac{1}{Q_{n+1}Q_{n+2}}\leqslant\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})}<|\xi_0-\alpha^{(n)}|,$$

即渐近分数 $\alpha^{(n)}$越来越逼近 ξ_0.

6° 设 $a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{Z}^+$. P_n, Q_n 如前所设. 若 $|\xi_0b-a|<|\xi_0Q_n-P_n|$,则 $b\geqslant Q_{n+1}$. 从而,若 $|\xi_0-a/b|<|\xi_0-P_n/Q_n|(n\geqslant 1)$,则 $b>Q_n$.

证 由 $Q_nP_{n+1}-Q_{n+1}P_n=(-1)^n$ 知

$$\begin{cases}xQ_n+yQ_{n+1}=b,\\xP_n+yP_{n+1}=a\end{cases}$$

有解

$$\begin{cases}x=(-1)^n(bP_{n+1}-aQ_{n+1}),\\y=(-1)^n(-bP_n+aQ_n).\end{cases}$$

因而有 x,y 使得

$$\xi_0b-a=x(\xi_0Q_n-P_n)+y(\xi_0Q_{n+1}-P_{n+1}).$$

若 $0<b<Q_{n+1}$,则 $xy<0$,从而 $x(\xi_0Q_n-P_n)$与 $y(\xi_0Q_{n+1}-P_{n+1})$同号((ξ_0-P_n/Q_n)与(ξ_0-P_{n+1}/Q_{n+1})异号),所以

$$|\xi_0b-a|=|x|\cdot|\xi_0Q_n-P_n|+|y||\xi_0Q_{n+1}-P_{n+1}|>|\xi_nQ_n-P_n|,$$

矛盾. 容易看出 $xy\neq 0$,若 $xy>0$,则

$$b=|x|Q_n+|y|Q_{n+1}>Q_{n+1},$$

矛盾. 因此

$$b\geqslant Q_{n+1}.$$

由 $\left|\xi_0-\frac{a}{b}\right|<\left|\xi_0-\frac{P_n}{Q_n}\right|\Leftrightarrow|\xi_0b-a|<\frac{b}{Q_n}|\xi_0Q_n-P_n|$. 若 $b\leqslant Q_n$,则 $b\geqslant$

Q_{n+1},矛盾.因此,

$$b > Q_n.$$

7° 设 ξ_0 是无理数,$a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{Z}^+$.若 $|\xi_0 - a/b| < (2b^2)^{-1}$,则 a/b 是 ξ_0 的渐近分数.

证　设存在 Q_n,使 $b = Q_n$.否则,设 $Q_n < b < Q_{n+1}$,a/b 不是渐近分数.从而,

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{a}{b}\right| \geqslant (Q_n b)^{-1}(\text{由性质 } 6°),$$

$$|\xi_0 Q_n - P_n| \leqslant |\xi_0 b - a| < (2b^2)^{-1}.$$

$$(Q_n b)^{-1} \leqslant \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| + \left|\xi_0 - \frac{a}{b}\right| < (2Q_n b)^{-1} + (2b^2)^{-1},$$

因而 $b < Q_n$,矛盾.故 $b = Q_n$.因此

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{a}{Q_n}\right| < |P_n - a| < Q_n^{-1},\quad a = P_n.$$

所以$\dfrac{a}{b} = \dfrac{P_n}{Q_n}$是 ξ_0 的渐近分数.

8° 设 $d\in\mathbf{Z}^+$,不是平方数.若不定方程 $x^2 - dy^2 = \pm 1$ 有正整数解 $x = x_0$, $y = y_0$,则 x_0/y_0 是$\sqrt{d}$的渐近分数.

证　若不定方程有解,则 $x_0 \geqslant y_0$,否则,

$$x_0 < y_0,$$

$$x_0^2 - dy_0^2 < y_0^2 - dy_0^2 < -y_0^2 \leqslant -1,$$

矛盾,由 $x_0 \geqslant y_0$,知

$$\left|\frac{x_0}{y_0} - \sqrt{d}\right| = \frac{1}{y_0^2(x_0/y_0 + \sqrt{d})} < (2y_0^2)^{-1}.$$

由性质 7°知$\dfrac{x_0}{y_0}$是$\sqrt{d}$的渐近分数.由$(x_0, y_0) = 1$,有 $x_0 = P_n$, $y_0 = Q_n$.

9° 设$\dfrac{P_n}{Q_n}$,$\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$是无理数 ξ_0 的渐近分数.则

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{2Q_n^2}\quad \text{及}\quad \left|\xi_0 - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2Q_{n+1}^2}$$

至少有一个成立.

证　若两式都不成立,则

$$\frac{1}{2Q_n^2} + \frac{1}{2Q_{n+1}^2} \leqslant \left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| + \left|\xi_0 - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

从而　$$2Q_n Q_{n+1} \geqslant Q_n^2 + Q_{n+1}^2,\quad Q_n = Q_{n+1}.$$

因此　$$n = 0, Q_0 = Q_1 = a_1 = 1, P_0 = a_0, P_1 = a_1 a_0 + 1,$$

从而
$$a_0+\frac{1}{2}<\xi_0<a_0+1,$$
$$\left|\xi_0-\frac{P_1}{Q_1}\right|<\frac{1}{2Q_1^2}=\frac{1}{2}.$$
矛盾.所以$\left|\xi_0-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{1}{2Q_n^2}$及$\left|\xi_0-\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right|<\frac{1}{2Q_{n+1}^2}$至少有一个成立.

由性质9°知,存在无穷多个有理数$\frac{a}{b}$满足$\left|\xi_0-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{2b^2}$.

6.3 循环连分数

设 $ax^2+bx+c=0$ 是整系数二次方程,$b^2-4ac>0$ 但不是平方数,α 是这个方程的根,这样的 α 称为**实二次无理数**.

以下是关于实二次无理数的一些基本性质.

1° α 是实二次无理数当且仅当$\alpha=r+s\sqrt{d}$,其中 r,s 是有理数,d 是非平方正整数.

设 $\alpha=r+s\sqrt{d}$,$\alpha'=r-s\sqrt{d}$是实二次无理数,则称 α' 为α 的**共轭数**.显然,α 也是α'的共轭数.

若对于无限简单连分数 $\xi_0=\langle a_0,a_1,\cdots\rangle$,存在正整数 k,任给 $j\in\mathbf{N}$,都有 $a_{j+k}=a_j$,则称 ξ_0 为纯循环简单连分数,简称**纯循环连分数**.这样的 k 中最小的称为纯循环连分数ξ_0 的周期.

2° 设 l 是纯循环连分数$\xi_0=\langle a_0,a_1,\cdots\rangle$的周期.若存在 $k\in\mathbf{Z}^+$,任给 $j\in\mathbf{N}$,都有 $a_{j+k}=a_j$,则 $l\mid k$;且任给 $n\in\mathbf{N}$,ξ_n 也是纯循环连分数,周期仍为 l.

若存在 $m\in\mathbf{N}$,使得 ξ_m 是纯循环连分数,则称 ξ_0 是**循环连分数**;设这样的 m 中的最小者为 m_0,ξ_{m_0}称为 ξ_0 的最大纯循环部分.ξ_{m_0}的周期称为 ξ_0 的周期.显然,若 ξ_0 是循环连分数,则任给 $n\in\mathbf{N}$,ξ_n 也是循环连分数,其周期与 ξ_0 相同.若 ξ_0 是纯循环连分数,周期为 l,则记 $\xi_0=\langle\overline{a_0,a_1,\cdots,a_{l-1}}\rangle$.若 ξ_0 是循环连分数,其周期为 l,其最大纯循环部分为 ξ_{m_0},则记 $\xi_0=\langle a_0,a_1,\cdots,a_{m_0-1},\overline{a_{m_0},a_{m_0+1},\cdots,a_{m_0+l-1}}\rangle$.例如,$\langle 1,1,\cdots\rangle=\langle\overline{1}\rangle$;$\langle 1,1,2,1,2,\cdots\rangle=\langle 1,\overline{1,2}\rangle$.

3° 纯循环连分数ξ_0 是实二次无理数.且 $\xi_0>1$,其共轭数 $\xi_0'\in(-1,0)$;循环连分数是实二次无理数.

证 设 $\xi_0=\langle\overline{a_0,a_1,\cdots,a_{l-1}}\rangle=\langle a_0,a_1,\cdots,a_{l-1},\xi_0\rangle$.于是
$$\xi_0=\frac{\xi_0P_{l-1}+P_{l-2}}{\xi_0Q_{l-1}+Q_{l-2}},$$
ξ_0 是$f(x)=Q_{l-1}x^2+(Q_{l-2}-P_{l-1})x-P_{l-2}=0$ 的一个根.因 ξ_0 是一个无理数,故这个方程的判别式不是平方数,从而 ξ_0 是实二次无理数.因 $a_0=a_l\geqslant 1$,故 $\xi_0>1$;而
$$f(0)=-P_{l-2}\leqslant -1,$$

$$f(-1)=Q_{l-1}-Q_{l-2}+P_{l-1}-P_{l-2}$$
$$=a_{l-1}Q_{l-2}+Q_{l-3}-Q_{l-2}+a_{l-1}P_{l-2}+P_{l-3}-P_{l-2}$$
$$\geqslant Q_{l-3}+P_{l-3}\geqslant 1\quad(l\geqslant 1),$$

故
$$\alpha'\in(-1,0).$$

设 $\xi_0=\langle a_0,a_1,\cdots,a_{m_0-1},\xi_{m_0}\rangle$，$\xi_{m_0}$是纯循环连分数.由

$$\xi_0=\frac{\xi_{m_0}P_{m_0-1}+P_{m_0-2}}{\xi_{m_0}Q_{m_0-1}+Q_{m_0-2}},$$

且 ξ_0 是无理数，ξ_{m_0}是实二次无理数，知 ξ_0 是实二次无理数.

4° 设ξ_0 是实二次无理数，ξ_0'是ξ_0 的共轭数.则 ξ_0 是循环连分数；若 $\xi_0>1$，$-1<\xi_0'<0$，则 ξ_0 是纯循环连分数.

证 设实二次无理数 $\xi_0=\dfrac{\sqrt{d}+c_0}{q_0}$，$q_0\mid d-c_0^2$，$d,q_0,c_0\in\mathbf{Z}$，$d>1$，是非平方数.令 $a_i=\lfloor\xi_i\rfloor$，$c_{i+1}=a_iq_i-c_i$，$q_{i+1}=\dfrac{d-c_{i+1}^2}{q_i}$（由 $q_0\mid d-c_0^2$ 及 $c_{i+1}=a_iq_i-c_i$，知 $q_{i+1}\mid d-c_{i+1}^2$），$\xi_{i+1}=\dfrac{\sqrt{d}+c_{i+1}}{q_{i+1}}$，$i\geqslant 0$.只要证明存在 $k>j$，$\xi_k=\xi_j$，就有 $a_k=a_j$.而 $\xi_k=\xi_j$，当且仅当 $q_k=c_k$，从而推得 ξ_0 是循环连分数.下面证明存在 $I\geqslant 0$，当 $i\geqslant I$ 时，$q_i>0$，从而由

$$q_iq_{i+1}=d-c_{i+1}^2<d$$

知 q_i 的可能的取值的个数少于 d 的正因子的个数.从而得知 ξ_0 是循环连分数.由

$$\xi_0=\frac{\xi_iP_{i-1}+P_{i-2}}{\xi_iQ_{i-1}+Q_{i-2}},$$

得到

$$\xi_i=-\frac{Q_{i-2}(\xi_0-\alpha^{(i-2)})}{Q_{i-1}(\xi_0-\alpha^{(i-1)})}.$$

从前设 $\alpha^{(i)}=P_i/Q_i$ 知，

$$\xi_i'=-\frac{Q_{i-2}(\xi_0'-\alpha^{(i-2)})}{Q_{i-1}(\xi_0'-\alpha^{(i-1)})}=\frac{-\sqrt{d}+c_i}{q_i}.$$

由于$\lim\limits_{i\to\infty}\alpha^{(i)}=\xi_0$，故存在 I，当 $i\geqslant I$ 时，$-1<\xi_j'<0$.而 $\xi_i>1$，因此

$$1<\xi_i-\xi_i'=\frac{2\sqrt{d}}{q_i},$$

$$0<q_i<2\sqrt{d}\ (i\geqslant I).$$

由假设，当 $i\geqslant 0$ 时，$\xi_i>1$.对 i 用归纳法可证，当 $i\geqslant 0$ 时，$-1<\xi_i'<0$.由

$$a_i=\xi_i-\frac{1}{\xi_{i+1}},$$

知
$$a_i=\xi_i'-\frac{1}{\xi_{i+1}'}.$$

从而
$$0 < -a_i - \frac{1}{\xi'_{i+1}} < 1, a_i = \lfloor -\frac{1}{\xi'_{i+1}} \rfloor.$$
于是
$$\xi_k = \xi_j \Rightarrow \xi_k' = \xi_j' \Rightarrow a_{k-1} = a_{j-1} \Rightarrow \xi_{k-1} = \xi_{j-1} \Rightarrow \xi_0$$
是纯循环连分数.

例 3　求 $\xi_0 = (\sqrt{15}+1)/2$ 的循环连分数.

解　用性质 4°的证明过程中的方法来求.

i	ξ_i	a_i	d	c_i	q_i
0	$(\sqrt{15}+1)/2$	2	15	1	2
1	$(\sqrt{15}+3)/3$	2	15	3	3
2	$(\sqrt{15}+3)/2$	3	15	3	2
3	$(\sqrt{15}+3)/3$	2	15	3	3

根据计算可知, $\xi_0 = (\sqrt{15}+1)/2 = \langle 2, \overline{2,3} \rangle$.

7　数 论 变 换

7.1　数论变换的基本性质

设 m 是大于 1 的整数, Z_m 表示模 m 的完系, Z_m^* 表示模 m 的缩系, 有时也分别用来表示模 m 的 m 个同余类构成的模 m 同余类环及 $\varphi(m)$ 个缩同余类构成的乘法群. 设
$$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{X} = (X_0, X_1, \cdots, X_{n-1})^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{Y} = (Y_0, Y_1, \cdots, Y_{n-1})^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{z} = (z_0, z_1, \cdots, z_{n-1})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{Z} = (Z_0, Z_1, \cdots, Z_{n-1})^{\mathrm{T}}.$$
若 $z_i = \sum\limits_{j+k \equiv i \bmod n} x_j y_k, i = 0,1,2,\cdots,n-1$, 则称 z 为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**循环卷积**, 记作 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}$. 若
$$Z_i = X_i Y_i, \quad i = 0,1,2,\cdots,n-1,$$
则称 $\boldsymbol{Z}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的点积, 记作 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}$. 上述(包括下面的)乘法与加法运算都是在模 m 的意义下进行的. 设 γ 模 m 的阶为 n, $(n,m)=1$, $\boldsymbol{T} = (\gamma^{jk})_{n\times n}$, $\boldsymbol{T}' = n^{-1}(\gamma^{-ik})_{n\times n}$, $j,k = 0,1,2,\cdots,n-1$. $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位阵.

定理 1　设 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}$ 是标准分解式, $(n,m)=1$, γ 模 m 的阶为 n, $O(m) = (p_1 - 1, p_2 - 1, \cdots, p_l - 1)$. $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}$ 的充分必要条件是 γ 模 p_i 的阶为 n, $i = 1,2,\cdots,l$.

证　必要性: 设 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{T}$ 的第 j ($j = 0,1,2,\cdots,n-1$) 行为 $(1, \gamma^j, \gamma^{2j}, \cdots,$

$\gamma^{(n-1)j})$, T^* 的第 $k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 列为 $n^{-1}(1,\gamma^{-k},\gamma^{-2k},\cdots,\gamma^{-(n-1)k})^{\mathrm{T}}$.这二者的点积为

$$n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma^{(j-k)i}\equiv\begin{cases}1, & \text{当 } j-k\equiv 0 \bmod n,\\ 0, & \text{当 } j-k\not\equiv 0 \bmod n.\end{cases}$$

对任给的 j,k,应有

$$\gamma^{j-k}\not\equiv 1 \bmod p_i(i=1,2,\cdots,l).$$

否则存在 j,k,使得

$$\gamma^{j-k}\equiv 1 \bmod p_i,$$

从而有

$$n\equiv 0 \bmod p_i,$$

此与 $(n,m)=1$ 矛盾.取 $j-k=1$,由

$$\gamma-1\not\equiv 0 \bmod p_i,\quad \sum_{i=0}^{n-1}\gamma^i\equiv 0 \bmod p_i.$$

知 $\gamma^n\equiv 1 \bmod p^i$.因此 γ 模 p_i 的阶为 n.显然,$n \mid O(m)$.

充分性:设 γ 模 $p_i(i=1,2,\cdots,l)$ 的阶为 n,于是

$$\gamma^{j-k}\not\equiv 1 \bmod p_i,\ i=1,2,\cdots,l,$$

$$(\gamma^{j-k}-1,p_i)=1,$$

$$(\gamma^{j-k}-1,p_i^{\alpha_i})=1,$$

$$(\gamma^{j-k}-1,m)=1,$$

从而

$$(\gamma^{j-k}-1)\sum_{i=0}^{n-1}\gamma^{(j-k)i}\equiv\gamma^{(j-k)n}-1\equiv 0 \bmod m.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n-1}\gamma^{(j-k)i}\equiv 0 \bmod m,j,k=0,1,2,\cdots,n-1,$$

从而

$$TT^*=T^*T=I.$$

例如,设 $m=5,\gamma=2$,2模5的阶为4,2的逆元是 -2.则

$$T=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&-2\\1&-1&1&-1\\1&-2&-1&2\end{bmatrix},\quad T^{-1}=4\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-2&-1&2\\1&-1&1&-1\\1&2&-1&-2\end{bmatrix},$$

容易验证 $TT^{-1}=I$.

定理2　设 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}$, $y=(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})^{\mathrm{T}}$, $T=[\gamma^{jk}]_{n\times n}(j,k=0,1,\cdots,n-1)$, $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$ 是标准分解式,γ 模 m 与 γ 模 $p_i(i=1,2,\cdots,l)$ 的阶都是 n.则 $T(x*y)=(Tx)\cdot(Ty)$.

证　令 $X=Tx,Y=Ty$.

$$X=(X_0,X_1,\cdots,X_{n-1})^{\mathrm{T}},Y=(Y_0,Y_1,\cdots,Y_{n-1})^{\mathrm{T}}.$$

于是,$X_j=\sum\limits_{s=0}^{n-1}x_s\gamma^{js}$, $Y_j=\sum\limits_{t=0}^{n-1}y_t\gamma^{jt}$,

$$X_jY_j=(\sum_{s=0}^{n-1}x_s\gamma^{js})(\sum_{t=0}^{n-1}y_t\gamma^{jt})=\sum_{0\le s,t\le n-1}x_sy_t\gamma^{j(s+t)}(j=0,1,2,\cdots,n-1).$$

令
$$z = T^{-1}(X \cdot Y) = (z_0, z_1, \cdots, z_{n-1})^{\mathrm{T}}.$$
于是
$$\begin{aligned} z_j &= n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}(X_kY_k)\gamma^{-jk} \\ &= n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\sum_{0\le s,t\le n-1} x_s y_t \gamma^{j(s+t)}\Big)\gamma^{-jk} \\ &= n^{-1}\sum_{0\le s,t\le n-1} x_s y_t \sum_{k=0}^{n-1}\gamma^{(s+t-j)k} \quad (\text{根据定理 1}) \\ &= n^{-1}\sum_{s+t\equiv j \bmod n} x_s y_t \cdot n = \sum_{s+t\equiv j \bmod n} x_s y_t, \end{aligned}$$
所以，$z = x * y$，即
$$x * y = T^{-1}((Tx)\cdot(Ty)),\quad T(x * y) = (Tx)\cdot(Ty).$$

上述变换 T 称为**数论变换**(NTT, Number Theory Transform). 定理 2 所表述的 T 的性质称为循环卷积特性. 这是一种很重要的性质.

定理 3 设 $X = Tx, Y = Ty$. 则有
$$n\sum_{i=0}^{n-1}x_iy_i \equiv \sum_{i=0}^{n-1}X_iY_{-i} \equiv \sum_{i=0}^{n-1}X_iY_{n-i} \bmod m,$$
$$n\sum_{i=0}^{n-1}x_iy_{-i} \equiv n\sum_{i=0}^{n-1}x_iy_{n-i} \equiv \sum_{i=0}^{n-1}X_iY_i \bmod m.$$

证 这两个式子的证法相似. 只证前者.
$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1}X_iY_{-i} &\equiv \sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sum_{s=0}^{n-1}x_s\gamma^{si}\Big)\Big(\sum_{t=0}^{n-1}y_t\gamma^{-ti}\Big) \\ &\equiv \sum_{0\le s,t\le n-1}x_sy_t\sum_{i=0}^{n-1}\gamma^{(s-t)i} \\ &\equiv n\sum_{s=0}^{n-1}x_sy_s \bmod m. \end{aligned}$$
若记
$$\sum_{i=0}^{n-1}x_iy_i = x \circ y,$$
$$\sum_{i=0}^{n-1}x_iy_{-i} = \sum_{i=0}^{n-1}x_iy_{n-i} = x \odot y,$$
则上述定理 3 可表述为
$$n(x\circ y) = (Tx)\odot(Ty),$$
$$n(x\odot y) = (Tx)\circ(Ty).$$

7.2 费马数变换(FNT)

在 1.2 节中定义了费马数和费马素数. $F_t = 2^{2^t}+1$ ($t = 0,1,2,\cdots$). $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ 都是素数. 但 $F_5 = 4294967297$ 是合数. 下面是一些与费马数有关的简单命题.

1° 若 2^b+1 是素数，则 $b=2^t$.

逆命题不成立，F_5 是合数.

2° 若 $2^{2^t}+1$ 是合数，p 是其素因子，则 p 为 $2^{t+1}k+1$ 形. 当 $t\geqslant 2$ 时，p 为 $2^{t+2}h+1$ 形.

证　设 p 是 $2^{2^t}+1$ 的素因子.

$$\begin{aligned} p \mid 2^{2^t}+1 &\Rightarrow 2^{2^t}\equiv -1 \bmod p \Rightarrow \delta_p(2)=2^{t+1}\\ &\Rightarrow 2^{t+1} \mid p-1\\ &\Rightarrow p=2^{t+1}k+1\\ &\Rightarrow (\text{设 } t\geqslant 2)p\equiv 1 \bmod 8\\ &\Rightarrow \left(\frac{2}{p}\right)=2^{(p-1)/2}\equiv 1\equiv 2^{2^t k}\equiv(-1)^k \bmod p\\ &\Rightarrow k \end{aligned}$$

是偶数，设 $k=2h$，$p=2^{t+2}h+1$. k,h 是正整数.

3° 若 $t\geqslant 3$，F_t 是素数，则 3 是模 F_t 的原根.

证　$2\equiv -1 \bmod 3 \Rightarrow 2^{2^t}\equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow F_t\equiv 2 \bmod 3$.

$$\left(\frac{3}{F_t}\right)\equiv 3^{(F_t-1)/2}\equiv\left(\frac{F_t}{3}\right)\equiv\left(\frac{2}{3}\right)\equiv -1 \bmod F_t,$$

故 3 模 F_t 的阶为 F_t-1，即 3 是模 F_t 的原根.

4° 若 $t\geqslant 2$，则 2 是模 F_t 的平方剩余.

证　设 p 是 F_t 的素因子，则 $p=2^{t+2}h+1$，$p\equiv 1 \bmod 8$，从而 $\left(\frac{2}{p}\right)=1$，即 2 是模 p 的平方剩余，所以 2 是模 F_t 的平方剩余.

由命题 4°可知，$x^2\equiv 2 \bmod F_t$ 有解，设 $b=2^t$，$2^{\frac{b}{4}}(2^{\frac{b}{2}}-1)$ 是此同余方程的一个解，记作 $\sqrt{2}=2^{\frac{b}{4}}(2^{\frac{b}{2}}-1)$.

5° 设 $t\geqslant 5$，$m=F_t$. $n=2^{t+1}$，$\gamma=2$；$n=2^{t+2}$，$\gamma=\sqrt{2}$ 分别满足 NTT(数论变换)的条件.

容易验证 γ 模 F_t 的阶为 n，$(m,n)=1$.

利用 FNT 的特点，$n=2^s$. 将 $T=(\gamma^{jk})_{n\times n}$ 的行重新排序，以达到与 FFT(傅里叶变换)类似的结构. 以 $s=3$ 为例：

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&\gamma^4&1&\gamma^4&1&\gamma^4&1&\gamma^4\\ 1&\gamma^2&\gamma^4&\gamma^6&1&\gamma^2&\gamma^4&\gamma^6\\ 1&\gamma^6&\gamma^4&\gamma^2&1&\gamma^6&\gamma^4&\gamma^2\\ 1&\gamma&\gamma^2&\gamma^3&\gamma^4&\gamma^5&\gamma^6&\gamma^7\\ 1&\gamma^5&\gamma^2&\gamma^7&\gamma^4&\gamma&\gamma^6&\gamma^3\\ 1&\gamma^3&\gamma^6&\gamma&\gamma^4&\gamma^7&\gamma^2&\gamma^5\\ 1&\gamma^7&\gamma^6&\gamma^5&\gamma^4&\gamma^3&\gamma^2&\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&&&&&&\\ 1&\gamma^4&&&&&&\\ &&1&1&&&&\\ &&1&\gamma^4&&&&\\ &&&&1&1&&\\ &&&&1&\gamma^4&&\\ &&&&&&1&1\\ &&&&&&1&\gamma^4 \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 1 & & & & & \\ & 1 & & 1 & & & & \\ 1 & & -1 & & & & & \\ & \gamma^2 & & -\gamma^2 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & & -1 & \\ & & & & & \gamma^2 & & -\gamma^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 1 \\ 1 & & & & -1 & & & \\ & \gamma & & & & -\gamma & & \\ & & \gamma^2 & & & & -\gamma^2 & \\ & & & \gamma^3 & & & & -\gamma^3 \end{bmatrix}.$$

设 n 阶矩阵用 $\boldsymbol{T}_s$ 表示,则 $\boldsymbol{T}_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{s-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{s-1} & \boldsymbol{I}_{s-1} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{s-1} & \boldsymbol{\Gamma}_{s-1} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Gamma}_{s-1} = \mathrm{diag}(1, \gamma, \cdots, \gamma^{2^{s-1}-1})$, $\boldsymbol{I}_{s-1}$是 2^{s-1}阶单位矩阵,γ 是模 m 的 2^{s-1}阶元. $\boldsymbol{T}_s$ 可表示为 s 个 2^s 阶矩阵的乘积.每个矩阵中每行(列)只有 2 个非零元,且这些非零元都是 γ 的乘幂.这样做一次 T 变换只要做 $O(n\mathrm{lb}n)$次数的乘法,从而明显节省了计算量(原来的乘法次数是 $O(n^2)$).

7.3 用费马数变换计算复数卷积

有时需要用到复数的循环卷积,下面利用前面的结果加以简要的讨论.

设
$$m = F_t = 2^b + 1, \quad b = 2^t, \quad t \geqslant 1.$$
故
$$2^b \equiv -1 \bmod m.$$
令
$$\mathrm{i} \equiv 2^{\frac{b}{2}} \equiv \sqrt{-1} \bmod m.$$
设
$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{i}\hat{\hat{\boldsymbol{x}}}, \quad \boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{i}\hat{\hat{\boldsymbol{g}}}.$$
$$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})^{\mathrm{T}}.$$
$$x_i = \hat{x}_i + \mathrm{i}\hat{\hat{x}}_i, \quad y_i = \hat{y}_i + \mathrm{i}\hat{\hat{y}}_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$
循环卷积定义如 7.1 节的定义.由定理 2 知 $T(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) = (T\boldsymbol{x}) \cdot (T\boldsymbol{y})$.因 T 是线性变换,不难知道定理 2 对复数也成立.因而
$$T(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) = T(\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{i}\hat{\hat{\boldsymbol{x}}}).$$
$$T(\hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{i}\hat{\hat{\boldsymbol{y}}}) = T\hat{\boldsymbol{x}} \cdot T\hat{\hat{\boldsymbol{y}}} - T\hat{\hat{\boldsymbol{x}}} \cdot T\hat{\hat{\boldsymbol{y}}} + \mathrm{i}(T\hat{\boldsymbol{x}}) \cdot T\hat{\hat{\boldsymbol{y}}} + T\hat{\hat{\boldsymbol{x}}} \cdot T\hat{\boldsymbol{y}}).$$
设 $\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{z}} + \mathrm{i}\hat{\hat{\boldsymbol{z}}})$.则
$$\hat{\boldsymbol{z}} = T^{-1}(T\hat{\boldsymbol{x}} \cdot T\hat{\boldsymbol{y}} - T\hat{\hat{\boldsymbol{x}}} \cdot T\hat{\hat{\boldsymbol{y}}}), \hat{\hat{\boldsymbol{z}}} = T^{-1}(T\hat{\boldsymbol{x}} \cdot T\hat{\hat{\boldsymbol{y}}} + T\hat{\hat{\boldsymbol{x}}} \cdot T\hat{\boldsymbol{y}}).$$
若变换 T 可使用快速算法,则可大量节省计算量.

下面利用快速数论变换来做多项式的乘法.

设
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1},$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1},$$

则
$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{2n-2}\Big(\sum_{i+j=k}a_ib_j\Big)x^k.$$
令
$$\bar{a}=(a_0\ a_1\ \cdots\ a_{n-1}\ \underbrace{0\ \cdots\ 0}_{n\text{个}0})^{\mathrm{T}},$$
$$\bar{b}=(b_0\ b_1\ \cdots\ b_{n-1}\ \underbrace{0\ \cdots\ 0}_{n\text{个}0})^{\mathrm{T}}.$$

$f(x)$与 $g(x)$的乘积相当于 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 的卷积或循环卷积.设 T 为数论变换,有
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{a}*\bar{b}=T^{-1}((T\bar{a})\cdot(T\bar{b}))$$

例 1　设 $f(x)=1+x+2x^2+3x^3,g(x)=2+3x+2x^2+4x^3$.求 $f(x)g(x)$.

解　令 $\bar{a}=(1\ 1\ 2\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0)^{\mathrm{T}},m=17,\gamma=2,\delta_m(2)=8$,
$$\bar{b}=(2\ 3\ 2\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0)^{\mathrm{T}},n=8,$$

$$T=T_3T_2T_1=\begin{bmatrix}1&1&&&&&&\\1&-1&&&&&&\\&&1&1&&&&\\&&1&-1&&&&\\&&&&1&1&&\\&&&&1&-1&&\\&&&&&&1&1\\&&&&&&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&&1&&&&&\\&1&&1&&&&\\1&&-1&&&&&\\&4&&-4&&&&\\&&&&1&&1&\\&&&&&1&&1\\&&&&1&&-1&\\&&&&&4&&-4\end{bmatrix}$$
$$\cdot\begin{bmatrix}1&&&&1&&&\\&1&&&&1&&\\&&1&&&&1&\\&&&1&&&&1\\1&&&&-1&&&\\&2&&&&-2&&\\&&4&&&&-4&\\&&&8&&&&-8\end{bmatrix}\mod 17.$$

$$8^{-1}\equiv-2\ \mathrm{mod}\ 17,\quad 2^{-1}\equiv-8\ \mathrm{mod}\ 17$$

$$T^{-1}=T_1^{-1}T_2^{-1}T_3^{-1}=-2\begin{bmatrix}1&&&&1&&&\\&1&&&&-8&&\\&&1&&&&-4&\\&&&1&&&&-2\\1&&&&-1&&&\\&1&&&&8&&\\&&1&&&&4&\\&&&1&&&&2\end{bmatrix}$$

$$
\cdot\begin{bmatrix}
1 & & 1 & & & & & \\
 & 1 & & -4 & & & & \\
1 & & -1 & & & & & \\
 & 1 & & 4 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & & 1 & & -4 \\
 & & & & 1 & & -1 & \\
 & & & & & 1 & & 4
\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}
1 & 1 & & & & & & \\
1 & -1 & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & \\
 & & 1 & -1 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & 1 & -1 & & \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}.
$$

设$(T\bar{a})\cdot(T\bar{b})=\bar{c}$,下面计算 $T^{-1}\bar{c}$.

因 $T^{-1}=(T_3T_2T_1)^{-1}=T_1^{-1}T_2^{-1}T_3^{-1}$,所以 $T^{-1}\bar{c}$ 的计算过程见下表:

$\bar{a}$	$T_1\bar{a}$	$T_2T_1\bar{a}$	$T\bar{a}$	$\bar{b}$	$T_1\bar{b}$	$T_2T_1\bar{b}$	$T\bar{b}$	$T\bar{a}\cdot T\bar{b}$
1	1	3	7	2	2	4	-6	-8
1	1	4	-1	3	3	7	-3	3
2	2	-1	8	2	2	0	-4	2
3	3	-8	7	4	4	-4	4	-6
0	1	-8	1	0	2	-7	-3	-3
0	2	-8	0	0	6	4	6	0
0	8	-7	7	0	8	-6	-8	-5
0	7	-3	-4	0	-2	-2	-4	-1

$T\bar{a}\cdot T\bar{b}$	$2T_3^{-1}\bar{c}$	$4T_2^{-1}T_3^{-1}\bar{c}$	$8T_1^{-1}T_2^{-1}T_3^{-1}\bar{c}$	$T^{-1}\bar{c}$	$f(x)g(x)$
-8	-5	8	-1	2	2
3	6	8	6	5	5
2	-4	-1	4	-8	9
-6	8	4	8	1	18
-3	-3	8	0	0	17
0	-3	-4	-7	-3	14
-5	-6	3	-6	-5	12
-1	-4	-2	0	0	0

故 $f(x)g(x)=2+5x+9x^2+18x^3+17x^4+14x^5+12x^6$.

从上面的计算可以看出要顺利地得到计算结果,模 m 应选更大一些,这可使得计算过程中出现的系数的绝对值小于 $m/2$. 设 $a=\max\limits_i(|a_i|,|b_i|)$,应有 $na^2<m/2$. 在本例中选 $m=257,\gamma=4$ 即可.

两个 $n-1$ 次多项式做乘法,用简单的算法要做 n^2 次数的乘法. 用快速数论算法从理论上说可使数乘的次数降到 $O(n\lg n)$量级.

8　素性测试与大数分解

8.1　素性测试

设 $n,b\in\mathbf{Z}^+,(n,b)=1$, n 是合数. 若 $b^{n-1}\equiv 1 \bmod n$,则称 n 为以 b 为底的**伪素数**.

例如,341($=11\times31$),561($=3\times11\times17$),645($=3\times5\times43$)都是以 2 为底的伪素数.

伪素数是相对于素数而言的. 对于素数 p,只要 $p\nmid b$,则 $b^{p-1}\equiv 1 \bmod p$.

1° 有无穷多个以 2 为底的伪素数.

证　不难看出,若 n 是以 2 为底的伪素数,则 2^n-1 也是以 2 为底的伪素数. 设 $m=2^n-1$, $n=dt$. 则

$$2^d-1\mid 2^n-1(=m).$$

$$\begin{aligned}2^{n-1}\equiv 1 \bmod n &\Rightarrow 2^n\equiv 2 \bmod n(\text{设 } nk=2^n-2)\\ &\Rightarrow 2^{m-1}=2^{2^n-2}=2^{nk}\\ &\Rightarrow 2^n-1(=m)\mid 2^{nk}-1(=2^{2^n-2}-1=2^{m-1}-1)\\ &\Rightarrow 2^{m-1}\equiv 1 \bmod m.\end{aligned}$$

由此可构造无穷多个以 2 为底的伪素数.

2° 设 $n=p_1p_2\cdots p_k$, $p_i(1\leqslant i\leqslant k)$是不同的素数,$(b,n)=1$. 若 $p_i-1\mid n-1(1\leqslant i\leqslant n)$,则 $b^{n-1}\equiv 1 \bmod n$.

证　$(b,n)=1\Rightarrow(b,p_i)=1\Rightarrow b^{p_i-1}\equiv 1 \bmod p_i\Rightarrow b^{n-1}\equiv p_i\Rightarrow b^{n-1}\equiv 1 \bmod n$.

例如,$561=3\times11\times17$, $3-1,11-1,17-1$ 都整除 $561-1$,故若$(b,561)=1$,则 $b^{560}\equiv 1 \bmod 561$,但 $5^{(561-1)/2}\equiv 67 \bmod 561$. 而若 n 是素数,$b^2\equiv 1 \bmod n$,则 $b\equiv 1 \bmod n$ 或 $b\equiv -1 \bmod n$.

设 $n\in\mathbf{Z}^+$, $n-1=2^st$, $s\in\mathbf{Z}^+$, t 是奇数,$(b,n)=1$. 若 $b^t\equiv 1 \bmod n$ 或 $b^{2^jt}\equiv -1 \bmod n(1\leqslant j\leqslant s-1)$,则称 n 通过以 b 为底的**米勒测试**(Miller's test).

3° 若 n 是素数,$n\nmid b$,则 n 通过以 b 为底的米勒测试.

若合数 n 通过以 b 为底的米勒测试,则称 n 是以 b 为底的**强伪素数**.

例如,2047 是以 2 为底的强伪素数. $2047=23\times89$, $2^{2046}=2^{11\times186}=2048^{186}\equiv 1$

mod 2047, $2^{1023} = 2^{11\times 93} = 2048^{93} \equiv 1 \bmod 2047$.

虽然强伪素数十分罕见，但却有无穷多个.

4° 有无穷多个以 2 为底的强伪素数.

证 设 n 是以 2 为底的伪素数，则 $2^n - 1$ 是以 2 为底的强伪素数. 令

$$m = 2^n - 1,\ 2^{n-1} - 1 = nk.$$

于是 $m - 1 = 2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1) = 2nk$, $2^{(m-1)/2} = 2^{nk} \equiv 1 \bmod m$. nk 显然是奇数，故 m 是以 2 为底的强伪素数. 由此可构造无穷多个以 2 为底的强伪素数.

判别一个数是不是素数，或者是素数的概率称为**素性测试**. 一个数通不过某个米勒测试，就是合数，而通过米勒测试不一定是素数.

以 2 为底的最小强伪素数是 2047. 以 2 与 3 为底的最小强伪素数是 1373653. 以 2,3 与 5 为底的最小强伪素数是 25326001. 以 2,3,5 与 7 为底的最小强伪素数是 3215031751.

5° 设合数 n 通过以 b 为底的米勒测试，这样的 b 在 $[1, n-1]$ 中不超过 1/4.

证 先证一个命题：设 p 是奇素数，$e, q \in \mathbf{Z}^+$，则 $x^q \equiv 1 \bmod p^e$ 的解的个数是 $(q, p^{e-1}(p-1))$. 因 $x^q \equiv 1 \bmod p^e \Leftrightarrow qy \equiv 0 \bmod \varphi(p^e)(y = y(x))$. 这个同余方程的解的个数是 $(q, \varphi(p^e)) = (q, p^{e-1}(p-1))$.

设 n 的标准分解式是 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$, $n - 1 = 2^s t$. p_i 是奇素数, $1 \leqslant i \leqslant r$, $s \in \mathbf{Z}^+$, t 是奇数, n 是以 b 为底的强伪素数. 由所设，有

$$b^t \equiv 1 \bmod n \quad \text{或} \quad b^{2^j t} \equiv -1 \bmod n.$$

$$x^{n-1} \equiv 1 \bmod n \Leftrightarrow x^{n-1} \equiv 1 \bmod p_i^{e_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

这个同余方程的解的个数是 $(n-1, p_i^{e_i-1}(p_i - 1)) = (n-1, p_i - 1)$. $x^{n-1} \equiv 1 \bmod n$ 的解的个数是 $\prod_{i=1}^{r}(n-1, p_i - 1)$. 若在 n 的分解式中有 $e_k \geqslant 2$，则

$$\frac{p_k - 1}{p_k^{e_k}} \leqslant \frac{2}{9},$$

于是 $$\prod_{i=1}^{r}(n-1, p_i - 1) \leqslant \prod_{i=1}^{r}(p_i - 1) \leqslant \prod_{i \neq k} p_i \cdot \frac{2}{9} \cdot p_k^{e_k} \leqslant \frac{2}{9} n \leqslant \frac{n-1}{4}.$$

否则，有 $n = p_1 p_2 \cdots p_r$，设 $p_i - 1 = 2^{s_i} t_i (1 \leqslant i \leqslant r)$. 对 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 重新排序，使得 $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_r$. 于是

$$(n-1, p_i - 1) = 2^{\min(s, s_i)}(t, t_i).$$

令 $T_i = (t, t_i)$, $x^t \equiv 1 \bmod p_i$ 的解的个数为 T_i. $x^{2^j t} \equiv -1 \bmod p_i$ 的解的个数为

$$\begin{cases} 2^j T_i, & \text{若 } j \leqslant s_i - 1, \\ 0, & \text{若 } j \geqslant s_i - 1. \end{cases}$$

$x^t \equiv 1 \bmod n$ 的解的个数为 $T_1 T_2 \cdots T_r$, $x^{2^j t} \equiv -1 \bmod n$ 的解的个数为 $2^{jr} T_1 T_2 \cdots T_r$ (若 $0 \leqslant j \leqslant s_1 - 1$).

$$T_1 T_2 \cdots T_r \left(1 + \sum_{j=0}^{s_1 - 1} 2^{jr}\right) = T_1 T_2 \cdots T_r \left(1 + \frac{2^{rs_1} - 1}{2^r - 1}\right).$$

设 n 是以 b 为底的强伪素数，则这样的 b 的个数不超过 $T_1T_2\cdots T_r(1+(2^{rs_1}-1)/(2^r-1))$. $\varphi(n)=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)=t_1t_2\cdots t_r2^{s_1+s_2+\cdots+s_r}$. 因 $T_1T_2\cdots T_r\leqslant t_1t_2\cdots t_r$, $s_1+s_2+\cdots+s_r\geqslant s_1r$. 于是

$$\frac{1+(2^{rs_1}-1)/2^r-1}{2^{s_1+s_2+\cdots+s_r}}\leqslant\frac{1+(2^{rs_1}-1)/(2^r-1)}{2^{rs_1}}\leqslant\frac{1}{2^{r-1}}\leqslant\frac{1}{4}(若\ r\geqslant 3).$$

若 $r=2, s_1<s_2$，则有

$$\frac{1+(2^{2s_1}-1)/3}{2^{s_1+s_2}}\leqslant\frac{1}{4}.$$

若 $r=2, s_1=s_2$，则 $T_1=T_2$，若 $p_1<p_2$，则必有 $t_2>T_2$，否则 $t_2=T_2\Rightarrow t_1\geqslant T_1=T_2=t_2(p_1<p_2\Rightarrow t_1<t_2)$，矛盾. 从而 $T_2\leqslant t_2$, $T_1T_2\leqslant t_1t_2/3$. 由

$$\frac{1+(2^{2s_1}-1)/3}{2^{2s_1}}\leqslant\frac{1}{2},$$

可知

$$T_1T_2\left(1+\frac{2^{2s_1}-1}{3}\right)\leqslant\frac{t_1t_22^{2s_1}}{6}=\frac{\varphi(n)}{6}<\frac{n-1}{6}<\frac{n-1}{4}.$$

这样一个合数通过 k 次米勒测试的概率显然小于 4^{-k}.

若广义黎曼假设成立，则一个合数通过米勒测试的次数将少于 $70(lbn)^2$. 这样，判别一个大整数 n 是否素数的算法的时间复杂性就是 $O((lbn)^5)$. 做一次米勒测试的复杂性为 $O((lbn)^3)$.

8.2 大数分解

大数分解就是把大合数表示成它的素因子的乘积. 这是计算数论中的重要问题.

例1　分解 8051.

解　$8051=8100-49=(90-7)(90+7)=83\times 97$.

设 a,b 是奇数. $ab=((a+b)/2)^2-((a-b)/2)^2$. 把一个合数表示成两个数的平方差，只有当这两个数接近这个合数的平方根的时候才比较容易做到.

20世纪20年代克雷切克(Kraitchik)对平方差方法做了改进，为大部分现代分解算法提供了基本的出发点.

设 $n=ab$ 是奇数. 同余方程 $x^2\equiv y^2 \bmod n$ 除了显然解 $x\equiv\pm y \bmod n$ 之外，还有其他解，求出这些解，然后就用求$(x\pm y,n)$的办法，分解 n.

例2　分解 2041.

解　设 $Q(x)=x^2-2041$. 则 $Q(46)=75=3\times 5^2$, $Q(47)=168=2^3\times 3\times 7$, $Q(48)=263$, $Q(49)=360=2^3\times 3^2\times 5$, $Q(50)=459$, $Q(51)=560=2^4\times 5\times 7$, $Q(45)=-16=-2^4$, $Q(44)=-105=-3\times 5\times 7$, $Q(43)=-192=-2^6\times 3$, 令 $B=\{-1,2,3,5,7\}$. 将以上各数的最大平方因子去掉后，剩下的与 B 中数作比较，得到一个5元0-1向量，用 $m(x)$表示如下表所示.

x	$Q(x)$	$m(x)$
43	$-192=-2^6\times 3$	(10100)
44	$-105=-3\times 5\times 7$	(10111)
45	$-16=-2^4$	(10000)
46	$75=3\times 5^2$	(00100)
47	$168=2^3\times 3\times 7$	(01101)
48	263	—
49	$360=2^3\times 3^2\times 5$	(01010)
50	459	—
51	$560=2^4\times 5\times 7$	(00011)

由上找出线性相关向量组,就可以得到相应的解,从而有可能对 n 进行分解.例如,$m(43)$,$m(44)$,$m(51)$线性相关,从而有$(43\times 44\times 51)^2\equiv(-2^6\times 3)(-3\times 5\times 7)(2^4\times 5\times 7) \bmod 2041$,$(565)^2\equiv(2^5\times 3\times 5\times 7)^2 \bmod 2041$,$(565)^2\equiv(-722)^2 \bmod 2041$,$(722-565,2041)=157$,因此 $2041=13\times 157$.又 $m(43)$,$m(45)$,$m(46)$线性相关,故有$(43\times 45\times 46)^2\equiv(-2^6\times 3)(-2^4)(3\times 5^2) \bmod 2041$,$(-794)^2\equiv(2^5\times 3\times 5)^2 \bmod 2041$,$(794)^2\equiv(480)^2 \bmod 2041$,$(794-480,2041)=157$.但这个方法并不保证有效.如,$m(41)$,$m(45)$,$m(49)$线性相关.但$(41\times 45\times 49)^2\equiv(601)^2 \bmod 2041$,$(-2^3\times 3^2\times 5)(-2^4)(2^3\times 3^2\times 5)=(2^5\times 3^2\times 5)^2\equiv(-601)^2 \bmod 2041$,$(601-601,2041)=2041$,无效.还有其他的线性相关组不一一枚举.

x 的选取应使 $Q(x)$较小,以便于 $Q(x)$的分解,一个容易看出的取法是在$\sqrt{n}$的附近选取.B 的选取也十分重要.若 $Q(x_j)$在 B 中分解,$p_i\in B$,$p_i\mid Q(x_j)$,则 $Q(x_j)\equiv 0 \bmod p_i$,从而 $x_j^2\equiv n \bmod p_i$,n 是模 p_i 的二次剩余,于是勒让德符号 $\left(\frac{n}{p_i}\right)=1$.这就是说所有的奇素数 $p\in B$,都应满足$\left(\frac{n}{p}\right)=1$.还应预先算出 $x^2\equiv n \bmod p_i^a$ 的解,其中 $p_i\in B$,$p_i^a<\gamma$,γ 可取$\min\limits_k(2^k \mid 2^k>\max\limits_i p_i)$.将这些解用以判别 $Q(x)$是否可在 B 中完全分解.

上面的这些考虑是二次筛法的主要关注点.另外为了得到足够多的 $Q(x_j)$,x_j 的取值区间可能变得太大,为了解决这个矛盾,一个有效的办法是采用多个二次式 $Q(x)$,其中原来出现 n(即待分解的大数)的地方可换成 kn.这里不作详细分析.

此外比二次筛法更快的算法是数域筛法.

参 考 文 献

1 潘承洞,潘承彪.初等数论.北京:北京大学出版社,1992.

2 Henri Cohen. A course in computational algebraic number theory. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

3 Neal Koblitz. A course in number theory and cryptography. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

·经典数学卷·

第16篇

群　论

编　者　樊　恽　郑延履

审校者　熊全淹

目　　录

引　言

群是有一个运算且每元可逆的代数系统.任何一个数学对象、一个自然对象或一个实践对象都有它自己内部的结构,保持这种结构的变换的集合构成一个群.所以群以上述结构的形式广泛存在.然而,在19世纪伽罗瓦(Galois E.)用群的思想研究多项式零点的根式可解性之后,群才逐渐被认识被理解,并渗透到数学以及其他各学科之中.

由于群元素的可逆性,群与研究对象、实践对象的对称性、均衡性关系紧密,几何的对称、自然的晶体等宏观对称现象被用相应的对称群完全刻画;群论也广泛用于量子物理、量子化学等微观研究;群论还成为实验设计、编码等实践活动中的重要数学工具.

群作为数学概念与思想工具广泛出现在数学的各个领域.群论作为一个数学分支则主要是研究一般的群论性质与构造,以及几类具有广泛性的具体群,如置换群、线性群等.经过20世纪的长足发展,群论已成为一个庞大的数学分支,在世界通行的美国《数学评论》的分类中它有14个子分支、100多个研究方向.本篇仅介绍群论的最基本概念与思想方法,并介绍抽象群论部分的某些基本理论及重大成果.

1　群论基础

1.1　半群、幺半群、群

1.1.1　半群

一个半群是指一个带有满足结合律的运算的非空集合 S.一般情况下,半群的运算常称为乘法,记作“·”.因此半群记作 $(S,\cdot)$.为简单起见,也常说 S 是半群.半群 S 中两个元素 a 和 b 的乘法运算结果 $a\cdot b$ 称为 a 与 b 的积,也简记为 ab.这里乘法满足结合律是指

$$(ab)c=a(bc),\text{对任意 } a,b,c\in S.$$

容易证明,半群 S 中广义结合律成立,即对 S 中任意序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 以及任意合理的加括号方式,运算结果都是一样的.换言之,运算结果只依赖于元素顺序而不依赖于加括号的方式.如 $(a_1a_2)(a_3a_4)=((a_1a_2)a_3)a_4$.因此可以定义 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 按此顺序的乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 为合理加括号后的运算结果.

按照半群的定义,运算并不一定满足交换律,即可有元素 a,b 使 $ab\neq ba$.满足交换律的半群称为交换半群.在交换半群中 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的乘积与因子

顺序也无关了.

在半群中可定义元素的正整数次数的幂. a^n 是指 n 个 a 的乘积. 指数律对正整指数成立:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}. \tag{1-1}$$

进一步,在交换半群中,下式也成立.

$$(ab)^m = a^m b^m. \tag{1-2}$$

1.1.2 幺半群

设$(M,\cdot)$是一个半群. 如果有元 $e\in M$ 且满足

$$ea = ae = a, \text{对任意的 } a\in M,$$

则称 M 为**幺半群**,称 e 为它的单位元(或恒等元). 容易看出,幺半群中的单位元是唯一的. 常常也记为 1_M,表明为幺半群 M 的单位元. 在不会混淆时简记为 1.

在幺半群 M 中,一个元素 a 称为可逆元,如果有 $a'\in M$ 使 $a'a=1=aa'$. 容易看出,这种 a' 是唯一的. 故记为 a^{-1},称为 a 的逆元.

在幺半群中,元素幂的定义可扩展到零指数,规定 $a^0=1$. 公式(1-1)以及在交换幺半群中的公式(1-2)对所有非负指数成立.

1.1.3 群

如果幺半群 G 中所有元都可逆,则称 G 为一个**群**.

运算满足交换律的群称为**交换群**或**阿贝尔群**(Abel 群).

群 G 中元素的个数(基数)称为群 G 的**阶**,记作$|G|$(实际上,对任何集合 S,都用$|S|$表其基数). 阶有限的群称为有限群.

由群的定义可知,一个群 G 是一个非空集并且具备:

1° 定义了一个运算(一般记作乘法);

2° 运算满足结合律;

3° 有一个元素 1,对任意 $a\in G$ 满足 $1a=a1=a$,称 1 为单位元;

4° 对任意 $a\in G$,存在 $a^{-1}\in G$,使 $a^{-1}a=1=aa^{-1}$.

这四条也可作为群的定义,不过从公理方法的角度说,它们不是完全独立的.

实际上,群有多种彼此等价的定义. 以下列出在文献中比较常见的二种.

一种是:非空集 G 如果有一个满足结合律的运算(一般写作乘法),而且有一个元素 e 满足 $ea=a$(对所有 $a\in G$),并对任意 $a\in G$,有 $a'\in G$ 使 $a'a=e$,则 G 称为一个群. 可以证明,e 就是单位元,a' 就是 a 的逆元.

另一种是:非空集 G 如果有一个满足结合律的运算(一般写作乘法),而且对任意 $a,b\in G$,关于变元 x 的方程 $ax=b$ 与 $xa=b$ 在 G 中有解,则 G 称为一个群.

在群 G 中,左、右消去律总成立,即从 $ab=ac$ 恒可得 $b=c$;从 $ba=ca$ 也恒可得 $b=c$. 但是满足消去律的半群不一定是群. 可以证明,有限地满足左(或右)消去律的半群是群.

在群中,元素幂的定义进一步扩展到负指数,对 $n>0$,$a^{-n}=(a^{-1})^n$. 而公式(1-1)以及交换群中公式(1-2)对所有整数指数成立.

关于群中运算的符号与术语的说明：在交换群的情况下，群的运算常写作加法，那么 $a+b$ 称为 a 与 b 的"和"；而群的单位元则称为"零元"，记作 0；a 的逆元则称为负元，记作 $-a$. 而公式(1-1)与(1-2)则变为

$$ma+na=(m+n)a,\quad n(ma)=(mn)a,$$
$$m(a+b)=ma+mb.$$

1.2 子群、陪集

1.2.1 子群的概念与例子

设 G 为群，非空集 H 称为 G 的**子群**(记作 $H\leqslant G$)，如果 H 在 G 的运算之下也是群. 这时，H 作为群的单位元 1_H 必与 G 的单位元一致，且任意 $a\in H$ 在 H 中的逆元与在 G 中的逆元一致.

命题 1 G 为群，H 为 G 的子集，则下列三条等价：

1° $H\leqslant G$；

2° $1_G\in H$，且对任意 $a,b\in H$ 有 $ab\in H$ 及 $a^{-1}\in H$；

3° $H\neq\varnothing$，且对任意 $a,b\in H$ 有 $ab^{-1}\in H$.

命题 2 当且仅当 H 在 G 的运算之下封闭时，有限群 G 的非空子集 H 成为子群.

例 1 任意阶不为1的群 G 至少有两个子群：$\{1\}$(称为单位元子群)与 G 自己. 这两个子群称为平凡子群. 若 $H\leqslant G$，但 $H\neq G$，则称 H 为 G 的真子群.

例 2 所有整数的集合 $\mathbf{Z}$ 在整数加法运算下是一个交换群，称为整数加群. 对任意整数 n，$n\mathbf{Z}=\{nk\mid k\in\mathbf{Z}\}$ 是整数加群的子群.

例 3 设 m 为正整数，所有模 m 的整数剩余类的集$[a]=\{k\in\mathbf{Z}\mid m$ 整除 $k-a\}$的集合 $\mathbf{Z}_m$ 在剩余类加法 $[a]+[b]=[a+b]$ 之下是一个群，称为模 m 剩余类加群. 对 m 的任意约数 n，子集 $\{[a]\mid n$ 整除 $a\}$ 是 $\mathbf{Z}_m$ 的一个子群.

例 4 设 X 是一个集合，X 到 X 的映射称为 X 的变换. X 的所有变换的集合 Tran(X)在映射的合成运算之下是一个么半群；而所有双射变换的集合 Sym(X)在映射的合成运算之下是一个群，称为 X 的**对称群**. Sym(X)的任何子群都称为 X 的**变换群**. 当 X 为有限集合时，X 的双射变换称为 X 的置换，Sym(X)的子群则称为 X 上的**置换群**.

例 5 设 V 为域 F 上的一个向量空间，V 的所有可逆的线性变换的集合 GL(V)在线性变换的合成运算之下是一个群，称为 V 的一般线性群. GL(V)的任意子群都称为 V 上的线性群. 当 V 为有限 n 维向量空间时，在确定基底下，线性变换对应于 n 级 F-矩阵. 可逆线性变换对应于可逆 n 级 F-矩阵. 所以，所有可逆的 n 级 F-矩阵的集合 GLn(F)在矩阵乘法之下成为一个群，称为域 F 上的 n 级一般线性群. GLn(F)的任意子群称为域 F 上的 n 级线性群.

1.2.2 子群与子群的运算

群 G 中任意一些子群的交显然仍然是子群，但两个子群的并集不一定是子群.

对群 G 的任意两个子集 S,T 都可定义乘积 $ST=\{st\mid s\in S,t\in T\}$. 当 $T=\{a\}$ 只含一个元时，简记 $ST=Sa$，类似地 $aT=\{a\}T$. 易看出，子集的乘积也符合结合律，即有 $S(TW)=(ST)W$. 但即使 $H,K\leqslant G$，其乘积 HK 也不必是子群. 易证明，HK 为子群的充要条件是 $HK=KH$. 后面 1.3.3 中命题 8 将给出子群之积为子群的一个充分条件.

戴德金(Dedekind)律 设 H,K,L 为群 G 的子群. 如果 $H\supseteq K$，则

$$H\cap(KL)=K(H\cap L).$$

证 显然左边 $\supseteq$ 右边. 反之，设 $a\in H\cap(KL)$，则 $a=h=kl$，其中 $h\in H,k\in K,l\in L$. 那么 $l=k^{-1}h\in H$，即 $l\in H\cap L$. 所以 $a=kl\in K(H\cap L)$.

在群 G 中，对任意两个子群 H,K，有一个既含 H 也含 K 的最小子群，它就是所有既含 H 也含 K 的子群之交，称为由 H 与 K 生成的子群，记作 $\langle H,K\rangle$. 因此，G 的所有子群在包含关系下构成一个格，称为 G 的子群格. 显然，$\langle H,K\rangle\supseteq HK$，而等号成立的充要条件是 HK 为子群.

上述 $\langle H,K\rangle$ 实际上是下面更一般方法的特例.

1.2.3 由子集生成的子群

设 G 为群，$S\subseteq G$，则所有包含 S 的 G 的子群之交仍为 G 的子群，它显然是 G 中包含 S 的最小子群，称为由 S 生成的子群，记作 $\langle S\rangle$. 当 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 时，简记 $\langle S\rangle=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$. 特别当 $S=\{a\}$ 只含一个元时，$\langle a\rangle$ 称为由 a 生成的循环子群.

如果群 G 的子集 S 使 $\langle S\rangle=G$，则称 G 由 S 生成，或称 S 为 G 的生成元集. 特别地，若 $G=\langle a\rangle$ 可由一个元生成，则称 G 为**循环群**，而称 a 为 G 的一个生成元.

命题 3 设 G 为群，$S\subseteq G$，则

$$\langle S\rangle=\{s_1^{n_1}\cdots s_k^{n_k}\mid s_i\in S,n_i\in\mathbf{Z},k\text{ 为非负整数}\}.$$

循环群的结构比较简单，即有

命题 4 设 $G=\langle a\rangle$，则有

1° 若 $|G|$ 无限，则 $G=\{\cdots,a^{-2},a^{-1},a^0=1,a,a^2,\cdots\}$ 为 G 的全部彼此不相同的元；

2° 若 $|G|=m$ 有限，则 $G=\{a^0=1,a,a^2,\cdots,a^{m-1}\}$ 为 G 的全部彼此不相同的元.

1.2.4 元素的阶

群 G 的元素 a 的阶是指它生成的子群 $\langle a\rangle$ 的阶. 如果有正整数 n 使 $a^n=1$，但任意 $0<k<n$ 有 $a^k\neq1$，则 a 的阶为 n. 否则，a 的阶为无限.

命题 5 设 G 为群，$a\in G$，s,t 为整数，则

1° 若 a 的阶为有限整数 n，则 $a^s = a^t$ 的充要条件是 $s \equiv t \pmod{n}$；

2° 若 a 的阶为无限，则 $a^s = a^t$ 的充要条件是 $s = t$.

例 6　设群 G 中的元 a 与 b 的阶分别为 m, n. 如果 $ab = ba$，而 m 与 n 互素，则 ab 的阶为 mn.

1.2.5　陪集

设 G 是群，$H \leqslant G$. 若 $a, b \in G$ 且 $ab^{-1} \in H$，则称 a 与 b 模 H 右同余，记作 $a \equiv_R b \pmod{H}$. 若 $b^{-1}a \in H$，则称 a 与 b 模 H 左同余，记作 $a \equiv_L b \pmod{H}$. 左同余、右同余都是 G 中的等价关系. 元素 a 所在的模 H 的右(左)同余的等价类称为 a 所在的 H 的右(左)**陪集**. 按照定义，马上可算出 a 所在的 H 的右陪集是

$$Ha = \{ha \mid h \in H\},$$

而 a 所在的 H 的左陪集是

$$aH = \{ah \mid h \in H\}.$$

显然，单位元 1 所在的右与左陪集都是 H. 但一般情况下，$Ha \neq aH$.

拉格朗日(Lagrange)定理　群 G 的全部元素是其子群 H 的所有右(左)陪集的不交并. H 的任意两个右(左)陪集所含元素个数(基数)相等. G 中 H 的右陪集的个数与 H 的左陪集的个数(基数)相等，这个相等的个数称为 H 在 G 中的指数，记作 $|G:H|$. 特别有

$$|G| = |G:H| \cdot |H|.$$

证　由于等价类给出的是集合的划分，故 G 是 H 的全体右陪集的不交并. 对任意右陪集 Ha，映射 $H \to Ha, h \to ha$ 是双射，故 $|Ha| = |H|$. 将任意右陪集 Ha 对应为左陪集 $a^{-1}H$，这是全部右陪集的集合与全体左陪集的集合之间的一个双射.

1.3　同态、正规子群

1.3.1　同态

设 G、H 是两个群，如果对任意 $a, b \in G$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ 成立，则映射 $\varphi: G \to H$ 称为**群同态**. 当 $G = H$ 时，称同态 $\varphi: G \to G$ 为 G 的自同态.

例如，$\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_m, k \to [k]$ 为加群 $\mathbf{Z}$ 到加群 $\mathbf{Z}_m$ 的同态.

实际上，一个群同态 $\varphi: G \to H$ 不仅保持了群的运算，而且有 $\varphi(1_G) = 1_H$, $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$，更广泛的 $\varphi(a^n) = \varphi(a)^n$，对任意整数 n 成立.

但是同态不能保持所有性质. 例如，对任意群 G, H，把任意 $a \in G$ 都射为 1_H 显然是一个群同态，称为零同态.

单(全)射的群同态称为单(全)同态. 而一个双射的群同态则称为群同构. 群同构才真正保持了所有的群性质. 如果从群 G 到群 H 有一个群同构 $\varphi: G \to H$，则称 G 与 H 通过 φ 同构，记作 $G \overset{\varphi}{\cong} H$. 简称为 G 与 H 同构，记为 $G \cong H$. 当然，G 到 G 的同构称为自同构. 特别，恒等映射 id_G 显然是自同构，称为恒等自同构.

例 7　由命题4容易知道，对循环群 $G=\langle a\rangle$ 有

1° 当 $|G|=\infty$ 时，则 $Z\to G, k\to a^k$ 为同构；

2° 当 $|G|=m$ 时，则 $Z_m\to G, [k]\to a^k$ 为同构.

注意两个同构的群之间可有多个同构映射，如对整数加群 Z，下述两个映射都是自同构.

$$\mathbf{Z}\to\mathbf{Z},\quad a\to a;$$
$$\mathbf{Z}\to\mathbf{Z},\quad a\to -a.$$

1.3.2　同态的像与核

设 G,H 为群，$\varphi:G\to H$ 为群同态，则易看出 φ 的像 $\mathrm{Im}\varphi=\varphi(G)=\{\varphi(a)\mid a\in G\}$ 是 H 的子群.

另一方面，令 $\mathrm{Ker}\varphi=\{a\in G\mid\varphi(a)=1_H\}$，称为同态 φ 的核，则 $\mathrm{Ker}\varphi$ 不仅是 G 的子群，而且这个子群 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的任意一个右陪集也是一个左陪集，即

$a(\mathrm{Ker}\varphi)=(\mathrm{Ker}\varphi)\cdot a$　　对任意 $a\in G$ 成立.

由此引出如下正规子群的概念，在叙述它之前，先列出如下命题.

命题 6　当且仅当 $\mathrm{Ker}\varphi=\{1_G\}$ 时，群同态 $\varphi:G\to H$ 为单同态.

1.3.3　正规子群

如果对所有 $a\in G, aN=Na$ 成立，则群 G 的子群 N 称为**正规子群**，并记作 $N\trianglelefteq G$.

命题 7　设 G 为群，$N\leqslant G$，以下条件等价：

1° $N\trianglelefteq G$；

2° $aNa^{-1}=N$，　对任意 $a\in G$ 成立；

3° $aba^{-1}\in N$，　对任意 $a\in G, b\in N$ 成立.

例 8　对任意群 G，$\{1\}\trianglelefteq G, G\trianglelefteq G$. 这两个称为 G 的平凡正规子群.

例 9　若 $\varphi:G\to H$ 是群同态，则 $\mathrm{Ker}\varphi\trianglelefteq G$.

例 10　若 G 为交换群，则 G 的任意子群都是正规子群.

命题 8　设 $N\trianglelefteq G$，则对任意 $S\subseteq G$ 有 $SN=NS$，特别的若 $H\leqslant G$，则 $NH=HN\leqslant G$.

命题 9　正规子群之交为正规子群；正规之群之积为正规子群.

1.3.4　单群概念

一个非单位元的只有平凡正规子群的群称为**单群**. 在了解了循环群的结构之后（见例 3 和例 7），容易看出，交换群中只有素数阶的循环群是单群.

由例 9 可知，单群到其他任意群的同态若不是零同态就是单同态.

1.3.5　自同构群

设 G 是一个群，在映射合成运算之下 G 的所有自同构构成一个群，记作 $\mathrm{Aut}G$，称为 G 的**自同构群**. 其单位元是恒等自同构 id_G.

例 11 令 $\mathbf{Z}_m^* = \{[a] \in \mathbf{Z}_m \mid a$ 与 m 互素$\}$,若定义乘法

$$[a][b] = [ab],$$

则 $\mathbf{Z}_m^*$ 对于此乘法构成一个群,称为模 m 的既约剩余类乘群. 可以证明,m 阶循环群的自同构群同构于模 m 的既约剩余类乘群.

对群 G 的任一给定元 a,以下的自映射(称 axa^{-1} 是 x 的共轭元)

$$\tau_a: G \to G, x \to axa^{-1}$$

是 G 的自同构,即 $\tau_a \in \mathrm{Aut}G$,称为由元素 a 诱导的 G 的内自同构. 显然 $\tau_a\tau_b = \tau_{ab}$,因而映射

$$\tau: G \to \mathrm{Aut}G, a \to \tau_a$$

是一个群同态. $\mathrm{Im}\tau$ 是 $\mathrm{Aut}G$ 中所有内自同构的集合,它是 $\mathrm{Aut}G$ 的一个正规子群,记作 $\mathrm{Inn}G$,称为 G 的内自同构群. 另一方面

$$\mathrm{Ker}\tau = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}$$

称为 G 的中心,一般记作 $Z(G)$. 由例 9 知 $Z(G) \trianglelefteq G$. 不仅如此,还易验证,$Z(G)$ 是下述定义下的特征子群.

如果对任意 $\varphi \in \mathrm{Aut}A$ 有 $\varphi(H) \subseteq H$,则群 G 的子群 H 称为**特征子群**.

1.4 商群、同态基本定理

1.4.1 商群

设 G 为群,$N \trianglelefteq G$. 那么对任意 $a \in G$ 有 $Na = aN$,即 G 中 N 的任一右陪集也是一个左陪集. 反之亦然,所以可称为 N 的陪集. 令 G/N 表示 G 中 N 的所有陪集的集合,可以验证:在 G/N 上可定义运算

$$(Na)(Nb) = N(ab)$$

而且在此运算之下,G/N 成为群,称为 G 对正规子群 N 的**商群**. 易见商群 G/N 中,N 为单位元,Na 的逆元是 Na^{-1}. 进一步,易验证

$$\tau: G \to G/N, a \to Na$$

为群的全同态,称为自然同态,且 $\mathrm{Ker}\tau = N$.

1.4.2 同态基本定理

同态基本定理 设 $\varphi: G \to H$ 为群同态,令 $K = \mathrm{Ker}\varphi$,$\tau: G \to G/K$ 是自然同态. 则存在唯一的一个群同态 $\overline{\varphi}: G/K \to H$ 使 $\varphi = \overline{\varphi} \cdot \tau$,这个同态 $\overline{\varphi}$ 为单同态. 当 φ 为全同态时,$\overline{\varphi}$ 为同构.

这个定理可以图示如下:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \tau \downarrow & \nearrow_{\overline{\varphi}} & \\ G/K & & \end{array}$$

例12　$\varphi:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_m, k\to[k]$为群 $\mathbf{Z}$ 到群 $\mathbf{Z}_m$ 的全同态，同态核 $k=m\mathbf{Z}$，所以 $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}\cong\mathbf{Z}_m$.

作为同态基本定理的推论有一系列同构定理.

第一同构定理　设 $\varphi:G\to H$ 是群同态，则 $G/\mathrm{Ker}\varphi\cong\mathrm{Im}\varphi$. 特别若 φ 是全同态，则 $G/\mathrm{Ker}\varphi\cong H$.

第二同构定理　设 G 为群，$H,K\leqslant G$. 若 $K\trianglelefteq G$，则 $HK\leqslant G$ 且 $K\trianglelefteq HK$，$H\cap K\trianglelefteq H$，并有

$$H/(H\cap K)\cong HK/K.$$

第三同构定理　设 N 与 K 都是群 G 的正规子群，且 $N\subseteq K$，则在商群 G/N 中有 $K/N\trianglelefteq G/N$ 且 $G/K\cong(G/N)/(K/N)$.

在群的全同态之下，子群格之间有很好的关系.

子群对应定理　设 $\varphi:G\to\overline{G}$ 为群的全同态，令 $K=\mathrm{Ker}\varphi$，$\mathscr{S}_K(G)=\{H\mid H\leqslant G$ 且 $H\supseteq K\}$，$\mathscr{S}(\overline{G})=\{\overline{H}\mid\overline{H}\leqslant\overline{G}\}$，则有

1°　把 $H\in\mathscr{S}_K(G)$对应为 $\varphi(H)\in\mathscr{S}(\overline{G})$是 $\mathscr{S}_K(G)$到 $\mathscr{S}(\overline{G})$的双射对应；

2°　当且仅当 $\varphi(H_1)\subseteq\varphi(H_2)$时，对 $H_1,H_2\in\mathscr{S}_K(G)$，$H_1\subseteq H_2$，而且在此情况下有 $|H_2:H_1|=|\varphi(H_2):\varphi(H_1)|$；

3°　当且仅当 $\varphi(H)\trianglelefteq\overline{G}$ 时，对 $H\in\mathscr{S}_K(G)$，$H\trianglelefteq G$.

1.5　直　　积

1.5.1　外直积

设 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是群，在 $G_1\times\cdots\times G_n=\{(g_1,g_2,\cdots,g_n)\mid g_i\in G_i\}$中定义运算

$$(g_1,g_2,\cdots,g_n)(g_1',g_2',\cdots,g_n')=(g_1g_1',\cdots,g_ng_n'),$$

则 $G_1\times\cdots\times G_n$ 也是群，其单位元是$(1_{G_1},\cdots,1_{G_n})$，而$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$的逆元是$(g_1^{-1},g_2^{-1},\cdots,g_n^{-1})$. 这个群称为 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 的外直积. 元素$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$中的 g_i 称为它的 i-分量. 显然

$$\rho_i:G_1\times\cdots\times G_n\to G_i,(g_1,g_2,\cdots,g_n)\mapsto g_i$$

为群的全同态，称为这个直积到其 i-分量的投射同态. 另一方面，也容易看出

$$l_i:G_i\to G_1\times\cdots\times G_n,g_i\to(1,\cdots,1,g_i,1,\cdots,1)$$

是群的单同态，称为这个直积的 i-分量的入射同态.

外直积的泛性质　设 $G_1\times\cdots\times G_n$ 如上，则对任意群 G 及群同态 $\varphi_i:G\to G_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 存在唯一群同态 $\varphi:G\to G_1\times\cdots\times G_n$ 使 $\varphi_i=\rho_i\varphi$，$i=1,2,\cdots,n$.

对于任意多个群 G_i，$i\in I$，为方便常用脚标标示它们，I 就是一个指标集. 那么同样可作外直积，记作 $\prod\limits_{i\in I}G_i$. 而且上述泛性质同样成立. 直积 $\prod\limits_{i\in I}G_i$ 中所有只有有限个分量为非单位元的元素的集合构成一个子群，它称为 G_i，$i\in I$ 的弱直积.

1.5.2　内直积

设 G 为群，$N_1,N_2,\cdots,N_n$ 是 G 的正规子群，如果以下两条满足：

1° $G=N_1N_2\cdots N_n$；

2° $N_j\cap(N_1\cdots N_{j-1}N_{j+1}\cdots N_n)=1, j=1,2,\cdots,n$，

则称 G 为 $N_1,N_2,\cdots,N_n$ 的**内直积**.

可以证明，以上两条与以下条件等价.

对任意 $a\in G$，存在唯一 $a_i\in N_i, i=1,2,\cdots,n$ 使 $a=a_1a_2\cdots a_n$.

容易证明：如果 G 是其正规子群 $N_1,N_2,\cdots,N_n$ 的内直积，则 $N_1\times\cdots\times N_n\to G,(a_1,a_2,\cdots,a_n)\to a_1a_2\cdots a_n$ 为群同构. 因此也把内直积记作 $G=N_1\times\cdots\times N_n$，也简称此式为 G 的直积分解. 但需注意，当群运算写作加法时，则称此结构为直和，并记作 $G=N_1\oplus\cdots\oplus N_n$.

1.5.3　雷马克分解

如果群 G 有非平凡正规子群 M,N 使 $G=M\times N$，则称 G 为**可分群**，否则称 G 为**不可分群**.

例如整数加群 $\mathbf{Z}$ 是不可分群. 实际上它的任两个非平凡子群有非平凡的交. 但在 6 阶循环群 $\mathbf{Z}_6$ 中令 $M=\{[0],[3]\}$，$N=\{[0],[2],[4]\}$，则 $\mathbf{Z}_6=M\oplus N$. 容易看出，当且仅当有限交换群是阶为一个素数的幂的循环群时，它为不可分群.

如果群 G 有正规子群 $N_1,N_2,\cdots,N_n$ 使 $G=N_1\times\cdots\times N_n$ 且每个 N_i 都不可分，则称此直积分解为 G 的雷马克(Remark)分解，也称为 G 的不可分直积分解. 例如上面提到的 $\mathbf{Z}_6=M\oplus N$ 就是一个雷马克分解.

如果群 G 的任意一些正规子群的集合中都有极大成员(即该集合中没有真包含它的其他成员)，则称 G 满足正规子群极大条件. 类似地可以定义正规子群极小条件.

并非任一正规子群都可以成为一个直积分解中的直积因子，例如 $\mathbf{Z}$ 的任意非平凡子群都不是直积因子. 如果只考虑群 G 的所有直积因子，也可类似地定义直积因子极大条件与直积因子极小条件.

命题 10　如果群 G 满足直积因子极小条件，则 G 有雷马克分解.

特别地，有限群的雷马克分解存在. 关于雷马克分解的唯一性，则有

克鲁尔-施密特(Krull-Schmidt)定理　如果群 G 满足正规子群的极大条件和极小条件，则 G 的雷马克分解存在且在同构意义下唯一. 即若 $G=N_1\times\cdots\times N_r=M_1\times\cdots\times M_s$ 都是雷马克分解，则 $r=s$ 且 G 有自同构 φ 使得适当调整标号后有 $\varphi|N_i:N_i\to M_i, i=1,2,\cdots,r$ 为同构.

1.5.4　半直积

设 G 为群，如果有 $N\trianglelefteq G, H\leqslant G$ 使得 $N\cap H=1$，则称 G 为 N 与 H 的**半直积**，记作 $G=N\rtimes H$. 此时对任意 $a\in G$ 有唯一 $n\in N, h\in H$ 使 $a=nh$. 可以通过这种

表达式描述群的运算如下：任意 $n_1, n_2 \in N$，$h_1, h_2 \in H$，有

$$(n_1h_1)(n_2h_2) = (n_1h_1n_2h_1^{-1})(h_1h_2);$$

因为 $h_1n_2h_1^{-1} \in N$，故 $n_1h_1n_2h_1^{-1} \in N$ 且 $h_1h_2 \in H$.

对 $h \in H$，用 h 共轭可诱导 N 的一个自同构

$$\varphi_h: N \to N, n \to hnh^{-1};$$

而 $h \to \varphi_h$ 给出 H 到 $\mathrm{Aut}N$（N 的自同构群）的一个同态

$$\varphi: H \to \mathrm{Aut}N, h \to \varphi_h.$$

反过来，若给了两个群 N, H 及一个群同态

$$\varphi: H \to \mathrm{Aut}N,$$

则可构造一个群 $N \rtimes_\varphi H$ 如下：

$$N \rtimes_\varphi H = \{(n, h) \mid n \in N, h \in H\},$$

规定运算为

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1h_2);$$

利用 φ 为同态可验证 $N \rtimes_\varphi H$ 是一个群．而 $(1_N, 1_H)$ 是单位元，(n, h) 的逆元是 $(\varphi(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$．并称 $N \rtimes_\varphi H$ 为 N 被 H 通过同态 φ 的半直积.

1.6 群 列

1.6.1 次正规列与次正规子群

对群 G 的子群链

(C1) $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_n = 1$

如果 $G_i \trianglelefteq G_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n$，则称它为 G 的**次正规列**．如果 $G_i \trianglelefteq G, i = 1, 2, \cdots, n$，则称它为 G 的**正规列**．所以正规列必是次正规列.

若 G 还有子群链

(C2) $G = H_0 \geqslant H_1 \geqslant \cdots \geqslant H_m = 1$

使得群列(C1)的每项 G_i 都在群列(C2)中出现，则群列(C2)称为群列(C1)的加细.

如果(C1)为次正规列，那么有商群 $G_{i-1}/G_i, i = 1, 2, \cdots, n$，并称为该次正规列的商因子.

假设(C1)与(C2)都是 G 的次正规列，如果 $m = n$ 且有指标 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 使对应商因子同构，则称这两个次正规列等价：

$$G_{i-1}/G_i \cong H_{p_i-1}/H_{p_i}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

关于次正规列(或正规列)的重要定理是

施莱尔(Schreier)加细定理 群 G 的任意两个次正规列(正规列)可以各自加细成彼此等价的次正规列(正规列).

群 G 的子群 H 称为**次正规子群**，记作 $H \lhd\lhd G$，如果 H 能在 G 的一个次正规列中出现．由加细定理知道，次正规子群可在任一次正规列的一个加细次正规列中

出现.

1.6.2 合成列

群 G 的一个无重复项的次正规列如果再没有真正的无重复项的加细,则称为群 G 的合成列.有限群显然有合成列,但不一定群都有合成列.例如无限循环群的任意次正规列都可以真正加细,故无合成列.

由于有施莱尔加细定理,所以合成列只要存在就必在等价意义下唯一.

约当-赫尔德(Jordan-Hölder)定理 如果群 G 有合成列,则 G 的任二合成列彼此等价.

特别,合成列的长度是只由群 G 决定的不变量,称为群 G 的合成长.

命题 11 当且仅当每个商因子 $G_{i-1}/G_i, i=1,2,\cdots,n$,都是单群时,群 G 的次正规列 $G=G_0\geqslant G_1\geqslant\cdots\geqslant G_n=1$ 是合成列.

下述命题中的次正规子群极大(极小)条件的定义完全类似于 1.5.3 中正规子群极大(极小)条件的定义.

命题 12 当且仅当 G 满足次正规子群的极大和极小条件时,群 G 的合成列存在.特别,有限群有合成列.

1.7 群扩张、有限单群分类

这是有关群构造,特别是有限群构造的两个重要研究领域,特别是后者引人注目,但并非群论基础,这里只作极简短的介绍.

1.7.1 群扩张

设 H、G 是两个群,如果 E 有一个正规子群 $N\cong H$ 且 $E/N\cong G$,则称 E 是群 G 被群 H 的一个扩张.这种情况常用一个群同态序列来表示

$$1\to H\xrightarrow{\alpha}E\xrightarrow{\beta}G\to 1,$$

其中 α 为单同态且其像 $\mathrm{Im}\alpha=\alpha(H)\trianglelefteq E$,而 β 是全同态,且 $\mathrm{Ker}\beta=\mathrm{Im}\alpha$.这个序列称为群同态的短正合序列.进一步,如果 E 有子群 K 使 $E=NK$ 且 $N\cap K=1$(即 $E=N\rtimes K$,此时 $K\cong G$),则称该扩张 E 为分裂扩张.用正合序列的语言,这等价于有一个群同态 $\lambda:G\to E$ 使 $\beta\lambda=\mathrm{id}_G$,此时称该正合序列为分裂短正合序列.

任何一个 G 被 H 的这样一个扩张给出了群 G 与群 H 之间的一组信息.反之,这样一组信息也决定了一个扩张.有兴趣的读者可参阅有关群论教程,如参考文献[2],[3].这里只列出一个在基本群论中常用到的结论.

舒尔-查森浩斯(Schur-Zassenhauss)定理 设有限群 G 有正规子群 N 使 $|N|$ 与 $|G/N|$ 互素,则 G 有子群 K 使 $G=NK$ 且 $N\cap K=1$,即 $G=N\rtimes K$.

1.7.2 有限单群分类

由于有限群总有合成列,而合成列的商因子总是有限单群(见命题 11),因此

任一有限群由有限个有限单群逐步扩张而得.于是,在扩张理论的基础上,把所有有限单群按同构完全分类是有限群论的最根本任务之一.这一任务已经完成,但工作量巨大,涉及文献逾百篇,因此这里只列出下述结论.更多信息请见参考文献[1].

有限单群分类定理 任何有限单群同构于下列四类有限单群之一:

1° 素数阶循环群;

2° n 次交错群($n\geqslant 5$);

3° 李型(Lie type)单群;

4° 26 个散在单群.

其中交错群将在2.1.4中介绍.李型群是在有限域上按李理论(Lie Theory)构造出来的无限个有限单群的族.除了上述三个无限族外,还有26个有限单群,因而称为散在单群.

2 置换群与群作用

2.1 置 换 群

2.1.1 n 次置换群

在1.2.1给出了置换和置换群的定义.若令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,则 X 的一个置换可直观地写为

$$\sigma=\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ \sigma(x_1), & \sigma(x_2), & \cdots, & \sigma(x_n) \end{pmatrix},$$

其第二行为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个排列.由此有如下命题.

命题1 设 $|X|=n$,则 $|\mathrm{Sym}(X)|=n!$.

设 X 与 Y 是等基数的有限集,则有双射 $\varphi: X\to Y$,那么易证

$$\psi:\mathrm{Sym}(X)\to\mathrm{Sym}(Y),\alpha\to\varphi\,\alpha\,\varphi^{-1}$$

是群同构,而且对任意的 $\alpha\in\mathrm{Sym}(X)$ 与 $x\in X$ 有 $\varphi(\alpha(x))=\psi(\alpha)(\varphi(x))$.于是有如下命题.

命题2 若 $|X|=|Y|$,则 $\mathrm{Sym}(X)\cong\mathrm{Sym}(Y)$.

这样,研究置换群时,一般可设 $X=\{1,2,\cdots,n\}$,其中元素称为文字.它的对称群记作 S_n,称为 n 次对称群,其元素称为 n 次置换,其子群则称为 n 次置换群.

2.1.2 置换的循环分解

如果 n 次置换 α 把文字 i_1 映为 i_2, i_2 映为 $i_3,\cdots,i_{r-1}$ 映为 i_r,而把 i_r 映为 i_1,而除 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 外的文字在 α 之下都不动,则可把置换 α 简记为 $\alpha=(i_1\ i_2\cdots\ i_r)$,称为一个长 r 的循环置换,简称循环.注意,为求形式一致,有时也写长1的循环为

(1)或(i),它们实际上是恒等置换.

设有两个循环 $\alpha=(i_1\ i_2\cdots\ i_r)$与 $\beta=(j_1\ j_2\cdots\ j_s)$,若任 i_k 不等于j_l,则说此二循环不交.容易看出,两个不交的循环 α 与β 可交换,即 $\alpha\beta=\beta\alpha$.

命题 3 n 次置换α 可写成彼此不交的循环置换之积,这样的写法在不计循环因子顺序意义下是唯一的,称为置换 α 的循环分解.

例如$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&7&4&6&1&3\end{pmatrix}=(156)(2)(37)(4)=(156)(37)$.

其中长 1 的循环因子(2),(4)可去掉.

如果 n 次置换α 的循环分解中长 1 的循环有 λ_1 个,长 2 的循环有 λ_2 个,$\cdots$,长 n 的循环有λ_n 个,则称 α 的型为$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,其中 $\lambda_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$ 且 $1\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n$.

利用循环分解,很容易计算共轭.若 α 的循环分解为

$$\alpha=(i_1,i_2,\cdots,i_r)\cdots(k_1,k_2,\cdots,k_t).$$

则对任何置换 τ,共轭元 $\tau\alpha\tau^{-1}$的循环分解为

$$\tau\alpha\tau^{-1}=(\tau(i_1)\cdots\tau(i_r))\cdots(\tau(k_1)\cdots\tau(k_t)).$$

因而可得

命题 4 当且仅当 n 次对称群S_n 中两置换的型相同时,它们共轭.

例 1 长 r 的循环的阶是r.如果 α 的循环分解为

$$\alpha=(i_1,i_2,\cdots,i_r)(j_1,j_2,\cdots,j_s)\cdots(k_1,k_2,\cdots,k_t),$$

则 α 的阶为各循环长度$r,s,\cdots,t$ 的最小公倍数.

2.1.3 置换的对换分解

长 2 的循环称为对换.任何循环可写成对换之积,这是因为

$$(i_1i_2\cdots i_r)=(i_1i_r)\cdots(i_1i_3)(i_1i_2), \tag{2-1}$$

但是写法不是唯一的.如$(ij)=(1i)(1j)(1i)$.

定理 1 任一置换可写成对换之积,称为对换分解,这种写法不唯一.但任两个这种写法中对换因子个数有相同的奇偶性.

若 α 的对换分解有偶数个对换因子,则 α 称为偶置换;否则称为奇置换.

推论 1 S_n 由 $n-1$ 个对换$(1,2),(1,3),\cdots,(1,n)$生成.

2.1.4 n 次交错群

考虑$\{1,-1\}$在数的乘法下构成的 2 阶群.由定理 1 知当 $n\geqslant 2$ 时下述映射为群的全同态.

$\sigma:S_n\to\{1,-1\},\sigma(\alpha)=\begin{cases}1,若\ \alpha\ 为偶置换,\\-1,若\ \alpha\ 为奇置换,\end{cases}$ 其同态核记作 $A_n=\{\alpha\in S_n\mid\alpha$ 为偶置换$\}$,它是 S_n 的正规子群,称为 n 次**交错群**.由同态基本定理 $S_n/A_n\cong\{1,-1\}$,所以有

$$|S_n:A_n|=2,|A_n|=\frac{n!}{2}. \tag{2-2}$$

命题 5 设 $n\geqslant 3$，则所有长为 3 的循环在 A_n 中，而且 A_n 由 $n-2$ 个长 3 的循环 (123)，(124)，…，$(12n)$ 生成.

定理 2 当且仅当 $n\neq 4$ 时，交错群 $A_n(n\geqslant 3)$ 为单群.

2.2 群 作 用

2.2.1 群作用

设 G 是一个群，X 是一个集合，若有群同态 $\alpha: G\to \mathrm{Sym}(X)$，则称群 G 通过 α 作用在集合 X 上，也称 α 是群 G 在集合 X 上的一个变换表示. 当 X 为有限集时则称为置换表示. 这是同一件事的两种不同表达. "表示"的侧重点是把群 G 用具体的变换或置换表示出来，而"作用"则强调了集合 X 本身带上了群 G 这个进一步的结构.

在具体讨论和应用群作用时，同态 $\alpha: G\to \mathrm{Sym}(X)$ 为给定，因而为简单，把 $x\in X$，在 $\alpha(g)$（对 $g\in G$）之下的象 $\alpha(g)(x)$ 简记为 $g(x)$，或 gx. 而 X 就简称为 G-集，此时有映射

$$\tilde{\alpha}: G\times X\to X, (g,x)\to gx,$$

且满足两条：

1° 对任意 $g_1,g_2\in G$ 及 $x\in X$ 有 $(g_1g_2)x=g_1(g_2x)$；

2° 对任意 $x\in X$ 有 $1_Gx=x$.

有的文献也把群作用定义为满足此两条的上述映射 $\tilde{\alpha}$.

例 2 设 $G\leqslant \mathrm{Sym}(X)$，则包含映射 $G\to \mathrm{Sym}(X)$ 给出 G 在 X 上的一个作用，称为变换群 G 在 X 上的自然作用. 通常说的"集 X 的变换群 G 作用在集 X 上"就是指的自然作用.

例 3 设 $v: G\to \mathrm{Sym}(X)$ 是零同态，即任意 $g\in G$ 映射为恒等变换 id_X. 则给出的 G 在 X 上的作用为平凡作用，因此时，对任意 $g\in G$，$x\in X$ 有 $gx=x$，属平凡的情况.

如果群 G 在集 X 上的作用由群同态 $\alpha: G\to \mathrm{Sym}(X)$ 给出，则 $\ker\alpha$ 也称为这个作用的核. 当 $\ker\alpha=\{1\}$ 即 α 为单同态时，则称 G 在集 X 上的作用是忠实的. 上述例 2 的作用是忠实作用，而例 3 中当 $G\neq\{1\}$ 时，平凡作用总是不忠实作用.

2.2.2 轨道、可迁作用

设群 G 作用在集 X 上，在 X 上定义 G-可迁关系"$\sim_G$"如下：对 $x,y\in X$，如果有 $g\in G$，使 $gx=y$，则称 x 在 G 下可迁为 y，记作 $x\sim_G y$. 显然，G-可迁关系是等价关系. 一个等价类称为一个 G-轨道，简称**轨道**. 因而 X 被划分为 G-轨道的不交并. 按定义，$x\in X$ 所在的轨道是 $Gx=\{gx\mid g\in G\}$. 如果 X 只有一个 G-轨道，则称 G 在 X 上的作用是可迁的. 换言之，当且仅当对任意 $x,y\in X$，存在 $g\in G$ 使 $gx=y$ 时，G 在 X 上可迁.

2.2.3 稳定化子与中心化子

设群 G 作用在集合 X 上，$Y\subseteq X$. 定义

$$N_G(Y)=\{g\in G\mid g(Y)=Y\}$$

称为 Y 在 G 中的稳定化子(或正规化子)；

$$C_G(Y)=\{g\in G\mid gy=y,\text{任意 } y\in Y\}$$

称为 Y 在 G 中的中心化子. 当 $Y=\{y\}$ 时，简记 $N_G(Y)=N_G(y)$, $C_G(Y)=C_G(y)$. 显然 $N_G(y)=C_G(y)$.

如果对任意 $x\in X$ 有 $C_G(x)=1$, 则群 G 在集合 X 上的作用称为半正则的，半正则的可迁作用称为正则作用.

例 4 设 G 为群，考虑 G 以下述方式作用在集合 G 上. G 的元 g 对应于 G 的变换 $\tau_g: G\to G$, $\tau_g(x)=gxg^{-1}$. 由于 $\tau_{(gh)}=\tau_g\tau_h$(参见 1.3.5)，所以 $g\to\tau_g$ 给出群 G 在集合 G 上的作用，称为共轭作用，而共轭作用的轨道称为共轭类. 在共轭作用下，若 $Y\subseteq G$, 则稳定化子 $N_G(Y)=\{g\in G\mid gYg^{-1}=Y\}$ 就是通常意义下的 Y 在 G 中的正规化子. 而 $C_G(Y)=\{g\in G\mid gyg^{-1}=y,\text{任意 } y\in Y\}$ 就是通常意义下的中心化子. 特别，若 $H\leqslant G$, 则 $N_G(H)=G$, 当且仅当 $H\trianglelefteq G$. 而 $C_G(G)=Z(G)$ 就是群 G 的中心.

命题 6 设群 G 作用在集 X 上，$\varnothing\neq Y\subseteq X$. 则有

1° $N_G(Y)$ 与 $C_G(Y)$ 都是 G 的子群且 $C_G(Y)\trianglelefteq N_{(G)}(Y)$;

2° $N_G(Y)/C_G(Y)$ 同构于 Y 的一个变换群.

弗拉蒂尼(Frattini)推理 设群 G 作用于集合 X, $H\trianglelefteq G$. 若 H 在 X 上可迁，则任给 $x_0\in X$ 有 $G=HC_G(x_0)$.

2.2.4 群在子群陪集集合上的作用、轨道长公式

设 G 是群，$H\leqslant G$. 令 Z 是 H 在 G 中所有左陪集的集合，即 $Z=\{aH\mid a\in G\}$, 则易验证

$$G\times Z\to Z,(g,aH)\to(ga)H$$

是群 G 在集 Z 上的一个作用(常称为左平移作用)，而且此作用为可迁作用. 在此作用下成员 $H\in Z$ 的稳定化子就是 H 自己.

现在设群 G 可迁作用在集合 X 上，令 $x_0\in X$, 则 $X=\{gx_0\mid g\in G\}$. 再令 $H=C_G(x_0)$ 为 x_0 在 G 中的稳定化子，那么可得 H 在 G 中的左陪集集合 $Z=\{aH\mid a\in G\}$. 而 G 也可作用在 Z 上，对 $aH\in Z$ 令 $ax_0\in X$ 与 aH 对应. 若 $h\in H$, 则 $(ah)(x_0)=a(hx_0)=ax_0$, 所以 ax_0 由左陪集 aH 唯一确定. 因此有映射

$$\sigma: Z\to X, aH\to ax_0.$$

由 $x=\{gx_0\mid g\in G\}$ 知 σ 为全射. 又从 $ax_0=bx_0$ 知 $a^{-1}b\in H$ 即 $aH=bH$, 所以 σ 为单射. 从而 σ 为双射，而且对 $g\in G$, $aH\in Z$ 有

$$\sigma(g(aH))=g(\sigma(aH)),$$

即 G 在 Z 上的作用可等同于 G 在 X 上的作用.特别有

命题 7(轨道长公式) 设群 G 作用在集合 X 上,$x_0 \in X$,则 x_0 所在的轨道 Gx_0 长度 $|Gx_0| = |G:C_G(x_0)|$.

2.2.5 伯恩赛德轨道计数方法

设有限群 G 作用在有限集合 X 上.令 $X_1, X_2, \cdots, X_t$ 是 X 的全部 G 轨道,考虑以下集合的计数

$$\mathscr{F} = \{(g,x) \in G \times X \mid gx = x\}.$$

固定每个 $g \in G$,可计算有多少 $x \in X$,使 $(g,x) \in \mathscr{F}$.记 $F(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$ 称为 g 在 X 中的不动点集合,那么

$$|\mathscr{F}| = \sum_{g \in G} |F(g)|.$$

另一方面,固定每个 $x \in X$,可计算有多少个 $g \in G$ 使 $(g,x) \in \mathscr{F}$.利用轨道长公式命题及 1.2.5 中拉格朗日定理可得

$$|\mathscr{F}| = \sum_{x \in G} |C_G(x)| = \sum_{x \in G} |G| / |Gx|$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \sum_{x_i \in X_i} |G| / |X_i| = |G| t.$$

伯恩赛德(Burnside)轨道计数引理 设有限群 G 作用在有限集 X 上,对 $g \in G$ 令 $F(g)$ 表示 X 中 g 的不动点的集合,则 X 的 G - 轨道个数等于 $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$.

2.3 群的凯莱表示

设 G 为一个群,任给 $g \in G$,定义集合 G 的一个变换

$$\lambda_g : G \to G, x \to gx$$

称为由 g 诱导的左平移.易见 λ_g 为可逆变换,因为 $\lambda_{g^{-1}}$ 就是它的逆变换.进一步

$$\lambda : G \to \mathrm{Sym}(G), g \to \lambda_g$$

是群 G 到集合 G 的变换群 $\mathrm{Sym}(G)$ 的一个同态.所以得到群 G 在集合 G 上的一个作用,称为左平移作用,这个作用也称为群 G 的左凯莱(Cayley)变换(置换)表示,类似地可给出 G 的右平移作用,即 G 的右凯莱变换(置换)表示如下

对 $g \in G$,定义 $\tau_g : G \to G, x \to xg^{-1}$,则

$$\tau : G \to \mathrm{Sym}(G), g \to \tau_g$$

是群 G 在集 G 上的作用.容易证明以下结论(正则表示指相应的作用是正则作用,见 2.2.3).

命题 8 群 G 的左凯莱表示与右凯莱表示都是正则表示.特别都是忠实表示.

2.4 算术性质、p-群、西罗定理

2.4.1 轨道方程

设有限群 G 作用在有限集 X 上，$X_1,X_2,\cdots,X_t$ 是 X 的全部 G-轨道，那么 X 是 $X_1,X_2,\cdots,X_t$ 的不交并，故有如下关于轨道的方程

$$|X|=|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_t|. \tag{2-3}$$

另一方面，由轨道长公式命题 7 及 1.2.5 中拉格朗日定理，又有

$$|X_i|\mid|G|, i=1,2,\cdots,t. \tag{2-4}$$

恰当地利用(2-3)与(2-4)式可得出一些非平凡的结果.

2.4.2 p-群

设 p 为一个素数，如果有限群 p 的阶为 p 的幂，则称 p 为一个 **p-群**.

考虑 p-群 P 共轭作用在集合 P 上(见例 4)，那么由(2-3)式有

$$|P|=|C_1|+|C_2|+\cdots+|C_t|,$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_t$ 是 P 的全部共轭类. 显然单位元 1 构成一个共轭类，不妨记 $C_1=\{1\}$，而且任何中心元 $z\in Z(P)$ 也是一个共轭类，这是全部长度为 1 的共轭类. 设其他共轭类为 $C_r,\cdots,C_t$. 于是有

$$|P|=|Z(P)|+|C_r|+\cdots+|C_t|, 且 |C_r|>1,\cdots,|C_t|>1.$$

这称为群 P 的类方程. 注意以上方程适用于任何有限群. 对 p-群 P 的特殊之点在于由(2-4)式有 $|C_r|\equiv 0(\bmod p),\cdots,|C_t|\equiv 0(\bmod p)$，由此有 $|Z(P)|\equiv 0(\bmod p)$，从而有

命题 9 非平凡 p-群有非平凡的中心.

2.4.3 西罗定理

设 G 为 n 阶有限群，$n=p^a m$ 且 $p\nmid m$. 那么由拉格朗日定理，G 的任何 p-子群的阶为 p^a 的约数. 群 G 的阶是 p^a 的 p-子群称为**西罗(Sylow)p-子群**.

为了寻找群 G 的西罗 p-子群，考虑 G 的所有基数是 p^a 的子集构成的集合

$$\mathscr{S}=\{s\subseteq G \mid |S|=p^a\}.$$

利用左平移(参见 2.3)，知道群 G 以如下方式作用在集合 $\mathscr{S}$ 上：对 $g\in G$, $S\in\mathscr{S}$, $gS=\{gs\mid s\in S\}\in\mathscr{S}$. 设 $\mathscr{S}_1,\mathscr{S}_2,\cdots,\mathscr{S}_t$ 是 $\mathscr{S}$ 的全部 G-轨道. 那么有轨道方程

$$|\mathscr{S}|=|\mathscr{S}_1|+|\mathscr{S}_2|+\cdots+|\mathscr{S}_t|.$$

由组合计数公式，显然

$$|\mathscr{S}|=\frac{p^a m(p^a m-1)(p^a m-2)\cdots(p^a m-(p^a-1))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(p^a-1)p^a}$$

将分子与分母中的因子 $p^a m-k$ 与 $k(k=1,2,\cdots,p^a-1)$ 配对考虑，易见当且仅当 $p^c\mid(p^a m-k)(c\leqslant a)$ 时，$p^c\mid k$，由此可得 $p\nmid|\mathscr{S}|$. 即 $|\mathscr{S}|\not\equiv 0(\bmod P)$. 那么由轨道方

程知至少有一个$\mathscr{A}_i$使$|\mathscr{A}_i|\neq 0(\mathrm{mod}\ p)$. 取$S\in\mathscr{A}_i$. 令$P$为$S$在$G$中的稳定化子. 由命题6. $P\leqslant G$. 而由命题7得

$$p+|\mathscr{A}_i|=|G:P|.$$

从而$p^a\mid|P|$. 另一方面, 由左平移作用及稳定化子的定义, P作用在S上是半正则的(见2.2.3), 特别知P在S上的轨道长为$|P|$, 所以$|P|\leqslant|S|=p^a$. 综合上述二方面, 得$|P|=p^a$. 这就给出了西罗p-子群的存在性. 进一步有

西罗定理 设G为有限群.

1° G的西罗p-子群存在;

2° G的任二个西罗p-子群彼此共轭;

3° 对G的任一p-子群P, 若P不是西罗p-子群,

则存在p-子群Q含P且$|Q:P|=p$. 特别任一p-子群包含在某一西罗p-子群之中. G的西罗p-子群的个数$\equiv 1(\mathrm{mod}p)$.

推论 设G为有限群, $p^b\mid|G|$, 则G有p^b阶的子群.

列举西罗p-子群的两条性质如下.

命题10 设P是有限群G的西洛p-子群,

1° 若$N\,\underline{\triangle}\,G$, 则$P\cap N$是$N$的西罗$p$-子群, 而$PN/N$是$G/N$的西罗$p$-子群;

2° 若$N_G(P)\leqslant H\leqslant G$, 则$N_G(H)=H$.

以下是2.2.3中弗拉蒂尼推理的原始群论形式.

弗拉蒂尼推理 设G为群, H是G的有限正规子群, P是H的西罗P-子群, 则$G=HN_G(P)$.

2.5 本原作用、重可迁

2.5.1 非本原区

设群G作用于集合X, 子集$Y\subseteq X$称为一个非本原区, 如果对任意$g\in G$, $Y\neq gY$, 则必有$Y\cap gY=\varnothing$. 显然, X是非本原区, 称为平凡非本原区. 每个G-轨道也是非本原区(所以有的文献只对可迁作用定义非本原区). 对可迁作用, 按定义若Y是一个非本原区, 则X是一些gY的不交并; 特别有$|Y|\mid|X|$.

如果群G在集X上的作用使得除X外没有其他非本原区, 则称这个作用是**本原作用**. 作用的本原性与所谓极大子群紧密联系在一起. 如果$M\neq G$, 则群G的子群M称为极大子群, 而对任意$M\leqslant H\leqslant G$, 若$H\neq G$则必有$H=M$.

本原性判断准则 当且仅当群G在集合X上的作用是可迁的且对$x\in X$, $C_G(x)$是G的极大子群时, 这作用是本原的.

证明要点 因为轨道总是非本原区, 故可迁性显然是必要的. 由2.2.4, G在X上的作用可等同于G在$C_G(x)$的左陪集集合上的左平移作用. 而对$C_G(x)\leqslant H\leqslant G$, H给出一个非本原区.

命题11 群G本原作用于集合X, $H\,\underline{\triangle}\,G$, 如果$H$在$X$上非平凡作用, 则$H$在

X 上可迁作用.

证明要点 由 H 的正规性,H 的轨道是 G 的非本原区.

2.5.2 重可迁性

设群 G 作用于集合 X. 令 $X^{(k)}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k)\mid x_i\in X, x_i\neq x_j, \forall 1\leqslant i\neq j\leqslant k\}$. 那么群 G 以自然的方式也作用在集合 $X^{(k)}$ 上,即对 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in X^{(k)}$, $g\in G$, 有 $g(x_1,x_2,\cdots,x_k)=(gx_1,gx_2,\cdots,gx_k)\in X^{(k)}$. 如果群 G 在 $X^{(k)}$ 上的作用是可迁的,则称群 G 在集合 X 上的作用是 k 重可迁的,简称 k-可迁. 显然,若 G 在 X 上 k-可迁,则对任 $1\leqslant t\leqslant k$, G 在 X 上 t-可迁.

例 n 次对称群 S_n 在 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 上是 n-可迁的. n 次交错群 $A_n(n\geqslant 3)$ 在 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 上是 $(n-2)$-可迁的.

容易验证下述结论。

命题 12 当且仅当 $C_G(x_0)$ 在 $X-\{x_0\}$ 上 $(k-1)$-可迁时,设群 G 可迁作用于集 X, $k>1$, $x_0\in X$, 则 G 在 X 上 k-可迁.

命题 13 任何2-可迁作用是本原作用.

2.6 从两个群作用构作群作用

本节恒设群 G 作用于集合 X, 而群 H 作用于集合 Y. 从两集合 X 与 Y 可构作不交并集 $X\dot{\cup}Y$; 积集 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}$; 函数集 $Y^X=\{$从 X 到 Y 的函数$\}$.

2.6.1 不交并

当 $X\cap Y=\varnothing$ 时,不交并集就是通常的并集 $X\cup Y$. 当 $X\cap Y\neq\varnothing$ 时,把 X 的元与 Y 的元加以区别,视同不交而作并集称为不交并集,记作 $X\dot{\cup}Y$.

群直积 $G\times H$ 以如下方式作用于 $X\dot{\cup}Y$: 对 $(g,h)\in G\times H$, $u\in X\dot{\cup}Y$ 令

$$(g,h)u=\begin{cases}gu, & 若\ u\in X;\\ hu, & 若\ u\in Y.\end{cases}$$

直接可验证这为群作用.

2.6.2 积集、群的圈积

有两种方式从 G 与 H 构造作用于 $X\times Y$ 的群,较显然的是直积.

直积 $G\times H$ 以下述方式作用于 $X\times Y$: 对 $(g,h)\in G\times H$, $(x,y)\in X\times Y$ 定义

$$(g,h)(x,y)=(gx,hy).$$

另一种则稍复杂. 只对有限集叙述. 设 X, Y 为有限集. 为方便令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 并把 G 在 X 上的作用写成 G 对脚标 $1,2,\cdots,n$ 的置换:

$$gx_i=x_{g(i)}.$$

作 n 个 H 的直积

$$B = H \times \cdots \times H = \{(h_1, h_2, \cdots, h_n) \mid h_i \in H\},$$

可定义 G 到 $\mathrm{Aut}(B)$的映射如下：

$$\varphi: G \to \mathrm{Aut}(B).$$

对 $g \in G, (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in B$,

$$\varphi(g)(h_1, h_2, \cdots, h_n) = (h_{g(1)}, h_{g(2)}, \cdots, h_{g(n)}).$$

易验证这样的 $\varphi(g)$确为 B 的自同构,即映射 φ 是定义好了的.而且易看出 φ 为群同态.由 1.5.5,可构造半直积并赋记号如下

$$H \sim G = B \underset{\varphi}{\rtimes} G,$$

它称为由 G 在 X 上的作用决定的 H 被 G 的圈积,其中 B 称为此圈积的基底群.由此构造知

$$H \sim G = \{(h_1, h_2, \cdots, h_n, g) \mid h_i \in H, g \in G\}$$

运算为(参见 1.5.5):

$$(h_1, h_2, \cdots, h_n, g)(h'_1, h'_2, \cdots, h'_n, g') = (h_1 h'_{g(1)}, h_2 h'_{g(2)}, \cdots, h_n h'_{g(n)}, gg').$$

现在可以定义圈积 $H \sim G$ 在 $X \times Y$ 上的作用,对$(h_1, h_2, \cdots, h_n, g) \in H \sim G$, $(x_i, y) \in X \times Y$,令

$$(h_1, h_2, \cdots, h_n, g)(x_i, y) = (x_{g(i)}, h_i y).$$

经计算可知这定义符合 2.2.1 中群作用的定义.

圈积在讨论置换群与群作用时有重要作用.值得指出,对抽象群 G 与 H 也可定义圈积,这只要把 G 正则作用于集合 G 即可,而且圈积在抽象群论中也有重要作用.

2.6.3　函数集合、反群

首先指出函数集合 Y^X 的另一种常见写法是:

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \{f: X \to Y\}.$$

为了从 G 与 H 的作用构造出一个在 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 上作用的群,先引入一个术语.

在群 G 的集合 G 上定义另一运算"$\circ$"为:对 $g, g' \in G$,令 $g \circ g' = g'g$.显然,在运算"$\circ$"之下 G 仍为群,单位元仍是 1_G, g 的逆元仍为 g^{-1}.称 G 在此运算"$\circ$"之下成为原群 G 的反群,记作 G°.实际上反群 G°与 G 是同构的,且 $G \to G^\circ, g \to g^{-1}$是同构映射.

那么群直积 $G^\circ \times H$ 可按下述方式作用在集合 $\mathrm{Hom}(X, Y)$上:对$(g, h) \in G^\circ \times H$ 与$f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$,令$(g, h)f$为如下函数:

$$((g, h)f)(x) = h \cdot f(gx), \forall x \in X.$$

由于$\forall (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G^\circ \times H$ 有

$$\begin{aligned}((g_1, h_1)(g_2, h_2))f(x) &= (g_1 \circ g_2, h_1 h_2)f(x)\\ &= (g_2 g_1, h_1 h_2)f(x) = (h_1 h_2)f(g_2 g_1 x)\\ &= (g_1, h_1)(h_2 f(g_2 x)) = (g_1, h_1)((g_2, h_2)f(x)).\end{aligned}$$

故

$$((g_1,h_1)(g_2,h_2))f=(g_1,h_1)((g_2,h_2)f)$$

即下述映射确为 $G^\circ\times H$ 在 $\mathrm{Hom}(X,Y)$上的一个作用：

$$(G^\circ\times H)\times \mathrm{Hom}(X,Y)\to \mathrm{Hom}(X,Y),$$
$$((g,h),f)\to (g,h)f.$$

3 自由群与自由积

3.1 自 由 群

3.1.1 定义

设 X 为一集合，如果有群 F 及映射 $l:X\to F$ 使得对任意群 G 及任意映射 $\alpha:X\to G$，存在唯一群同态 $\bar{\alpha}:F\to G$ 满足 $\alpha=\bar{\alpha}\cdot l$，则称 F 为集 X 上的**自由群**. 容易看出，此时 l 为单射，故常常把 X 看作 F 的子集. 图示如下：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{l} & F \\ & \alpha\searrow & \downarrow\bar{\alpha} \\ & & G \end{array}$$

例1 无限循环群 $F=\langle a\rangle$是集$\{a\}$上的自由群，因为对任意群 G 及任意映射 $\alpha:\{a\}\to G$，可令 $\bar{\alpha}:F\to G$ 为$\bar{\alpha}(a^n)=\alpha(a)^n$. 易见 $\bar{\alpha}$ 是使$\alpha=\bar{\alpha}\big|_{\{a\}}$的唯一群同态.

命题1(自由群的唯一性) 设 X 为集合，$l_1:X\to F_1$ 与 $l_2:X\to F_2$ 都是 X 上的自由群，则有群同构 $\varphi:F_1\to F_2$ 满足 $l_2=\varphi l_1$.

证 由自由群的定义有群同态 $\varphi:F_1\to F_2$ 及 $\varphi':F_2\to F_1$ 使 $l_2=\varphi l_1$，$l_1=\varphi' l_2$. 故 $l_2=(\varphi\varphi')l_2$，由自由群定义中的唯一性，$\varphi\varphi'=\mathrm{id}_{F_2}$，同理 $\varphi'\varphi=\mathrm{id}_{F_1}$，故 φ 是同构.

自由群的存在性证明在下一节给出.

3.1.2 字与等价字

设 X 为一集合，令 X^{-1}为与 X 等基数的集合，且其元素与 X 的元素一一对应，故可记 $X^{-1}=\{x^{-1}\mid x\in X\}$. 为方便，记 $X^{\pm 1}=X\cup X^{-1}$为不交并.

任意有限序列 $a_1a_2\cdots a_k$，$a_i\in X^{\pm1}$，称为 $X^{\pm1}$上的一个字. 当 $k=0$ 时，即无字母的字称为空字，简记为 1. 在 $X^{\pm1}$上的所有字的集合 M 上可定义一个乘法运算：两个字 $a_1a_2\cdots a_k$ 与 $a'_1a'_2\cdots a'_{k'}$ 的乘积定义为它们连着写构成的一字 $a_1a_2\cdots a_ka'_1a'_2\cdots a'_{k'}$. 显然 M 成为一个幺半群而不是一个群.

进一步，在字的集合 M 上定义一个关系"~"，记 $a_1a_2\cdots a_k\sim a'_1a'_2\cdots a'_{k'}$，如

果能经过有限步插入或删去形如 xx^{-1} 或 $x^{-1}x$ 的部分从前者得到后者,例如 $x_1x_2x_2^{-1}x_1 \sim x_1x_1 \sim x_3^{-1}x_3x_1x_1$,那么"~"显然是一个等价关系.因此对 $a_1a_2\cdots a_k \sim a'_1a'_2\cdots a'_k$ 我们也说 $a_1a_2\cdots a_k$ 与 $a'_1a'_2\cdots a'_k$ 是等价字.字 $w = a_1a_2\cdots a_k$ 所在的等价类记作 $[w] = [a_1a_2\cdots a_k]$.所有等价类的集合记作 F.对 $[w_1],[w_2] \in F$,如果 $w_1' \sim w_1$,$w_2' \sim w_2$(即 $[w_1] = [w_1']$,$[w_2] = [w_2']$),按等价"~"的定义,显然 $w_1w_2 \sim w_1'w_2'$,所以可以在 F 上定义乘法运算为

$$[w_1][w_2] = [w_1w_2],$$

那么由 M 为幺半群知 F 为幺半群,且 $1_F = [1]$.对 $w = a_1a_2\cdots a_k$,$a_i \in X \cup X^{-1}$,若 $a_i = x^{-1} \in X^{-1}$,则令 $a_i^{-1} = x \in X$,那么按等价字的定义即知

$$[a_1a_2\cdots a_k][a_k^{-1}a_{k-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}] = [1] = [a_k^{-1}a_{k-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}][a_1a_2\cdots a_k].$$

所以 $[a_k^{-1}a_{k-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}]$ 是 $[a_1a_2\cdots a_k]$ 的逆元,从而 F 是群.

如果定义映射

$$l: X \to F, x \mapsto [x],$$

则得到一个群 F 及映射 l.

现在设 G 为任意群,$\alpha: X \to G$ 为任意映射,对 $x \in X$,规定 $\alpha(x^{-1}) = \alpha(x)^{-1}$.再规定

$$\bar{\alpha}: F \to G, [a_1a_2\cdots a_k] \mapsto \alpha(a_1)\alpha(a_2)\cdots\alpha(a_k),$$

由于 $\forall x \in X$ 有 $\alpha(x)\alpha(x^{-1}) = \alpha(x)\alpha(x)^{-1} = 1_G = \alpha(x^{-1})\alpha(x)$.按等价字的定义知道,若 $a_1a_2\cdots a_k \sim a_1'a_2'\cdots a'_k$,则 $\alpha(a_1)\alpha(a_2)\cdots\alpha(a_k) = \alpha(a_1')\alpha(a_2')\cdots\alpha(a'_k)$.所以上面规定的 $\bar{\alpha}$ 是一个合理定义的映射.显然,$\bar{\alpha}$ 是一个群同态,而且 $\bar{\alpha}\cdot l = \alpha$.如果群同态 $\beta: F \to G$ 也使 $\beta\cdot l = \alpha$,则对任意 $[a_1a_2\cdots a_k] \in F$ 有

$$\beta([a_1a_2\cdots a_k]) = \beta([a_1][a_2]\cdots[a_k]) = \beta([a_1])\beta([a_2])\cdots\beta([a_k])$$
$$= \beta\cdot l(a_1)\,\beta\cdot l(a_2)\cdots\beta\cdot l(a_k) = \alpha(a_1)\alpha(a_2)\cdots\alpha(a_k) = \bar{\alpha}([a_1a_2\cdots a_k]).$$

即 $\beta = \bar{\alpha}$.

综上即得,群 F 及映射 $l: X \to F$ 使 F 为集 X 上的自由群,即得下述结论

命题 2　任意集 X 上的自由群存在.

3.1.3　简化字与规范形

继续3.1.2中的记号,在构造群 F 时可以看到,形如 xx^{-1} 与 $x^{-1}x$ 的部分是不起作用的.所以如果一个字 $w = a_1a_2\cdots a_k$,$a_i \in X^{\pm1}$ 中如果没有形如 xx^{-1} 与 $x^{-1}x$ ($\forall x \in X$) 的部分,则称它为简化字.如 $x_1x_1x_2^{-1}x_3^{-1}x_3^{-1}$ 是简化字,但 $x_1x_2^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_3$ 不是简化字.容易看出,任意 $[w] \in F$ 含有唯一一个简化字.

考虑任一简化字,可以把相邻的相同字母写成幂的形式,并称为该简化字的规范形.如 $x_1x_1x_2^{-1}x_3^{-1}x_3^{-1} = x_1^2x_2^{-1}x_3^{-2}$ 就是规范形.因此,以后可把自由群 F 中的任何元写成 X 上的规范形的简化字,而不再写成字的等价类形式,即集合 X 上的自由群是

$$F = \{x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t} \mid x_i \in X, n_i \in \mathbf{Z}, x_i \neq x_{i+1}, i = 1,2,\cdots,t-1\}.$$

且不同的这种表达式表示不同的元,即

当且仅当 $t = t'$, $x_i = x'_i$ 且 $n_i = n'_i$ 时, $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t} = x'^{n'_1}_1 x'^{n'_2}_2 \cdots x'^{n'_t}_t$.

利用这种表达方式,自由群另一刻画如下。

命题 3 设 G 为群, $X \subseteq G$, 则当且仅当 G 的任何元 g 可唯一地由 X 的元写为 $g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$, $0 \neq n_i \in \mathbf{Z}$, $x_i \neq x_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, t-1$ 时, G 为 X 上的自由群.

自由群的满足命题 3 的生成集 X 称为自由生成集.

3.1.4 自由群的性质

命题 4 若群 $G = \langle S \rangle$ 可由子集 S 生成, 令 X 为与 S 基数相同的集合, 则从 X 上的自由群 F 到群 G 有全同态 $P: F \to G$ 使 $\rho|_X: X \to S$ 为双射. 特别任何群是自由群的同态像.

例如 任意循环群是无限循环群的同态像.

命题 5 设 F 为自由群, 则任何群 G 到 F 的全同态 $\beta: G \to F$ 是分裂的(参见 1.7.1), 即有同态 $\lambda: F \to G$ 使 $\beta\lambda = \mathrm{id}_F$.

命题 6 设 F_1 是集 X_1 上的自由群, F_2 是集 X_2 上的自由群, 则当且仅当 $|X_1| = |X_2|$ 时, $F_1 \cong F_2$.

有了此结果, 可以称自由群 F 的自由生成集 X 的基数为 F 的秩.

以下是关于自由群的一个重要的结果.

尼尔森-施莱尔(Nielsen-Schreier)定理 自由群的子群仍为自由群. 进而, 若自由群 F 的秩为 $n < \infty$, 子群 H 的指数 $|F:H| = m < \infty$, 则 H 的秩为 $mn - m + 1$.

3.2 生成与定义关系

3.2.1 生成与关系

设 G 为任意群. 由自由群的性质命题 4, 存在集合 Y 及 Y 上的自由群 F 及全同态 $\rho: F \to G$, 记同态核 $R = \mathrm{Ker}\rho$. 由同态基本定理 $G \cong F/R$. 令 $X = \rho(Y)$, $S = \rho(R)$, 则 G 由 X 生成. 对任意 $r \in R$ 有 $r = y_1^{n_1} y_2^{n_2} \cdots y_k^{n_k}$, $y_i \in Y$, $n_i \in \mathbf{Z}$. 由 $\rho(r) = 1$ 知 $\rho(y_1)^{n_1} \rho(y_2)^{n_2} \cdots \rho(y_k)^{n_k} = 1$. 由于 $x_i = \rho(y_i) \in X$, 所以 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k} = 1$. 这是 X 中的元需满足的等式, 因而把 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ 称为 G 中生成集 X 的一个关系. 换言之, 关系是 R 中元表写为 Y 的字后在 ρ 之下的像. 因此, 由 $G \cong F/R$, 可用 X 及其关系把 G 的结构表达出来, 称为群 G 的一个表写. 但以上表写有可简化之处. 当 $R \neq \{1\}$ 时, R 为无限正规子群, 实际上只要找到 R 的一个正规生成集作为关系即可. 一般定义如下: 对任意群 H 的子集 S, 群 H 中所有含 S 的正规子群之交仍为含 S 的正规子群, 称为 H 中由 S 正规生成的子群, 记作 $\langle S \rangle^H$. 如果 H 的正规子群 N 有子集 S 使 $N = \langle S \rangle^H$, 则称 S 为 N 的正规生成集.

回到群 G, 作为由集 Y 生成的自由群 F 的同态像 $\rho: F \to G$, 群 G 可表写为由 $X = \rho(Y)$ 生成并满足关系 $R = \ker\rho$. 再令 S 为 R 的一个正规生成集 $R = \langle S \rangle^F$, 则对

任意 $s\in S, s=y_1^{n_1}y_2^{n_2}\cdots y_k^{n_k}$ 有 $\rho(S)=x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$，其中 $x_i=\rho(y_i)$. 所有这种表达式 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ 称为 X 的定义关系. 令 D 为所有定义关系的集合，那么 G 可写成

$$G=\langle X\mid D\rangle \quad 或 \quad G=\langle X\mid r=1, r\in D\rangle.$$

读为"G 由 X 按定义关系 D 生成".

例 2 $\langle x\mid x^m=1\rangle$ 是一个 m 阶的循环群.

例 3 正 n 边形的对称群 D_n 由 $2n$ 个变换构成：绕中心的 n 个旋转 $\tau^0,\tau^1,\cdots,\tau^{n-1}$（$\tau$ 为旋转 $\frac{2\pi}{n}$），及 n 个轴对称反射 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$. 这个群 D_n 称为二面体群，可表写为

$$D_n=\langle \tau,\sigma\mid \tau^n=1=\sigma^2, \sigma\tau\sigma^{-1}=\tau^{-1}\rangle.$$

因为容易看出，按这些定义关系，右端的所有元形如 $\tau^i\sigma^j$, $i=0,1,\cdots,n-1, j=0,1$. 恰为 D_n 的全部元素.

命题 7 设 $G=\langle X\mid D\rangle$ 与 $H=\langle X'\mid D'\rangle$ 是两个群. 如果映射 $\varphi: X\to X'$ 使得对任意 $r\in D$ 有 $\varphi(r)\in D'$，则 φ 可唯一地扩张为群同态 $\overline{\varphi}: G\to H$，进而若 φ 为双射且 φ 也诱导 D 到 D' 的双射，则 $\overline{\varphi}$ 为同构.

值得注意的是，一个群的生成集不唯一，生成与定义关系的表写更不唯一.

例 4 二面体群的另一表写为 $D_n=\langle\sigma,\sigma'\mid\sigma^2=1=\sigma'^2,(\sigma\sigma')^n=1\rangle$，其中 σ,σ' 是两个适当选取的反射使 $\sigma\sigma'$ 为旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 角. 因而知道下述两个不同表写的群是同构的

$$\langle x_1,x_2\mid x_1^2=1=x_2^2, x_2x_1x_2^{-1}=x_1^{-1}\rangle;$$

$$\langle x_1',x_2'\mid x_1'^2=1=x_2'^2,(x_1'x_2')^n=1\rangle.$$

然而，一般地讲，从两个群的生成与定义关系来判断它们是否同构确非易事.

3.2.2 有限表写群

如果群 G 可找到有限生成集 X 及有限个定义关系构成的定义关系集 D，使 $G=\langle X\mid D\rangle$，则称此为有限表写，而称 G 为**有限表写群**.

上面的例 2 和例 3 都是有限表写群. 实际上，由 3.1.4 中的尼尔森-施莱尔定理知：任何有限群都是有限表写群.

值得注意的是，一个群的生成集不唯一，那么按生成与定义关系的表写更不唯一. 然而这并不影响有限表写群的定义，因为有以下纽曼(B.H.Newmann)的结果.

命题 8 设群 G 有一个有限表写，则对 G 的任何表写 $G=\langle X\mid D\rangle$，存在有限子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq X$ 及有限个关系（但不必在 D 中）$r_1,r_2,\cdots,r_k$ 使 $G=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\mid r_1=r_2=\cdots=r_k=1\rangle$.

而且有限表写性质可以按扩张迭加.

命题 9 （霍尔 P.Hall）设 $N\trianglelefteq G$，如果 N 与 G/N 都是有限表写群，则 G 也是有限表写群.

3.3 群 族

3.3.1 群类

任意一些对象可构成一个类."类"是比"集合"更广的概念.例如,所有的集合可构成一个类,但不再是一个集合.

一些群构成的类 $\mathscr{X}$ 称为一个群类,如果下述二条满足:

1° 单位元群在 $\mathscr{X}$ 中;

2° 若一个群在 $\mathscr{X}$ 中,则所有与它同构的群也在 $\mathscr{X}$ 中.

例如,所有的有限群构成一个群类.又如所有的交换群构成一个群类.所有的整数剩余类加群构成一个类,但不是一个群类.因为 m 阶循环群 $G=\langle a\rangle$ 与 $\mathbf{Z}_m$ 同构,但 G 不在这个类中.

3.3.2 群族

设 $x_1,x_2,\cdots$ 是不定元,W 是 $x_1,x_2,\cdots$ 的一些字的集合,即任意 $w\in W$, $w=y_1^{n_1}y_2^{n_2}\cdots y_k^{n_k}$,其中 y_i 为某个 x_j. $n_i\in\mathbf{Z}$.若 w 的表达式中只涉及 $x_1,x_2,\cdots,x_r$,则可写成 $w=w(x_1,x_2,\cdots,x_r)$.例如 $w(x_1)=x_1^n$, $w(x_1,x_2)=x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$ 等等.

设 $w=w(x_1,x_2,\cdots,x_r)$,则对任意群 G 及 G 的元素 $g_1,g_2,\cdots,g_r$(不必互不相同),$w(g_1,g_2,\cdots,g_r)$ 表示 $w(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 中用 g_1 代 x_1,g_2 代 x_2,$\cdots$,g_r 代 x_r 后计算出来的值,也称为 w 在 $(g_1,g_2,\cdots,g_r)$ 的值.

例如,若 $w(x_1,x_2)=x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$,在 S_3 中取 $g_1=(12)$, $g_2=(13)$,则 $w(g_1,g_2)=(12)(13)(12)^{-1}(13)^{-1}=(123)$.如果 $w(g_1,g_2,\cdots,g_r)=1$,则称 $(g_1,g_2,\cdots,g_r)$ 满足字 $w(x_1,x_2,\cdots,x_r)$;如果对 G 的任意序列 $g_1,g_2,\cdots,g_r$ 都有 $w(g_1,g_2,\cdots,g_r)=1$,则称 G 满足字 $w(x_1,x_2,\cdots,x_r)$.显然,空字恒取值 1,即空字被任何群满足.另一方面,对任何字 $w(x_1,x_2,\cdots,x_r)$,任何群,恒有 $w(1,1,\cdots,1)=1$.

现在,任给不定元 $x_1,x_2,\cdots$ 上一些字的集合 w,如果群 G 满足 w 中的所有字,则简称 G 满足 w.显然,所有的满足 w 的群构成一个群类记作 $v(w)=\{$群 $G\mid G$ 满足 $w\}$.称为由 w 定义的**群族**.下一节的定理说明可以用几个封闭性质来刻画群族.

3.3.3 伯克霍夫定理

设 $\mathscr{X}$ 为一个群类.如果对任意 $G\in\mathscr{X}$, $H\leqslant G$ 有 $H\in\mathscr{X}$,则说 $\mathscr{X}$ 是子群封闭的.类似可定义商群封闭性质、直积封闭性质等.例如:"直积封闭性质"是指:对 $\mathscr{X}$ 中的任意一些群 $G_i\in\mathscr{X}$, $i\in I$,它们的直积 $\prod_{i\in I}G_i\in\mathscr{X}$.

伯克霍夫(Birkhoff)定理 当且仅当 $\mathscr{X}$ 具有子群封闭性质、商群封闭性质和直积封闭性质时,群类 $\mathscr{X}$ 是群族.

3.4 自 由 积

3.4.1 群的自由积

设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是群，并且下标不同的群 G_i 看作彼此不交，因此 $\bigcup_{\lambda=1}^{n} G_\lambda$ 是不交并. 构作集合 $G_1 * G_2 * \cdots * G_n = \{x_1 x_2 \cdots x_k \mid 1 \neq x_i \in \bigcup_{\lambda=1}^{n} G_\lambda$，任相邻的 x_i 与 x_{i+1} 来自不同的群 $G_\lambda\}$，并称这种有限序列 $x_1 x_2 \cdots x_k$ 为字，空字记为 1.

在 $G_1 * G_2 * \cdots * G_n$ 上定义运算为：将 $x_1 x_2 \cdots x_k$ 与 $x'_1 x'_2 \cdots x'_{k'}$ 排成一个序列 $x_1 x_2 \cdots x_k x'_1 x'_2 \cdots x'_{k'}$，然后对此序列按以下程序变换.

1° 检查序列中有无单位元出现，若有则删去单位元得到新序列. 重复此过程直至无单位元出现.

2° 检查序列中有无相邻元素来自同一个下标的群. 若没有，则终止程序；若有，则将找到的这种属同一群 G_λ 的相邻元如 y_i, y_{i+1} 在 G_λ 中以乘积 $z_i = y_i y_{i+1}$ 替代原序列中的 $y_i y_{i+1}$ 得到新序列. 再回到程序 1).

由于序列只有有限长度，经过有限步后程序必终止. 得到的序列无相邻元属同一下标的群，且无单位元出现(可能得到空字 1). 而且得到的序列是唯一的，那么把这样得到的序列定义为 $x_1 x_2 \cdots x_k$ 与 $x'_1 x'_2 \cdots x'_{k'}$ 的乘积. 容易验证，$G_1 * G_2 * \cdots * G_n$ 是一个群，空字是单位元，字 $x_1 x_2 \cdots x_k$ 的逆元是 $x_k^{-1} x_{k-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}$. 称此群为群 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的**自由积**.

显然，对任意多个群 $G_i, i \in I$，同样可定义自由积，记作 $\underset{i \in I}{*} G_i$. 它的元素同样是有限长的字 $x_1 x_2 \cdots x_k$，$1 \neq x_i \in \bigcup_{i \in I} G_i$，任相邻 x_i 与 x_{i+1} 不属同一下标的群.

需要指出，也可按类似构造自由群的办法来构造自由积，即考虑所有的 $\bigcup_{i \in I} G_i$ 上的字 $x_1 x_2 \cdots x_k$，符合下面的要求：$x_i \neq 1$ 及相邻 x_i, x_{i+1} 不属同一群，这样的字称为简化字. 而把可以按上述程序及其逆程序，变一个字为另一个字的两个字称为等价，则每个等价类中恰有一个简化字.

例 5 群 $G = \langle x, y \mid x^4 = 1 = y^6 \rangle$ 同构于 4 阶循环群与 6 阶循环群的自由积.

例 6 设 X 为一集合，F 是 X 上的自由群. 对任意 $x \in X$，令 $G_x = \langle x \rangle$ 是由 x 生成的无限循环群，则 $F \cong \underset{x \in X}{*} G_x$.

3.4.2 自由积的性质

自由积具有与直积对偶的泛性质(见 1.5.1).

自由积的泛性质 设 $G_i, i \in I$ 是群. 则对任意群 G 及群同态 $\varphi_i: G_i \to G, i \in I$，存在唯一群同态 $\varphi: \underset{i \in I}{*} G_i \to G$ 使 $\varphi_i = \varphi l_i, i \in I$，其中 $l_i: G_i \to \underset{i \in I}{*} G_i$ 是内射同态：$\forall g_i \in G_i, l_i(g_i) = g_i \in \underset{i \in I}{*} G_i$.

另一个不困难但有意义的事实是：

命题 10 自由积 $\underset{i\in I}{*}G_i$ 中任一长度 $\geqslant 2$ 的(简化)字的阶无限.

一个引人注目的结果是自由积的子群仍可写为恰当形式的自由积，与 3.1.4 的尼尔森-施莱尔定理对照. 为此先引入如下术语.

设 G 为群，$H,K\leqslant G$. 对任意 $g\in G$，子集 $HgK=\{hgk\mid h\in H,k\in K\}$ 称为 G 的一个(H,K)-双陪集，g 为它的一个代表元. 注意 HgK 中任一元可作为代表元. 容易证明，G 是所有(H,K)-双陪集的不交并. 实际上，双陪集也可看作一种群作用的轨道. 因为 $H\times K$ 以下述方式作用于集合 G 上：$(h,k)\in H\times K$，变换 $x\in G$ 为 hxk^{-1}，而 HgK 正好是在此群 $H\times K$ 的作用下 G 中 g 所在的轨道.

库洛什(Kuroš)子群定理 设 G_i，$i\in I$ 为群，H 是自由积 $G=\underset{i\in I}{*}G_i$ 的子群，则有自由群 H_0 使

$$H=H_0*(\underset{i,r_i}{*}(H\cap r_iG_ir_i^{-1})),$$

其中 i 跑遍指标集 I，而 r_i 跑遍 G 中(H,G_i)-双陪集的代表元. 进一步，若 $|G:H|=m<\infty$，则 H_0 的秩为 $\sum\limits_{i\in I}(m-m_i)-m+1$，其中 m_i 是 G 中(H,G_i)-双陪集个数.

3.4.3 广义自由积

广义自由积又称融合积. 其思想如下(见图 3-1)：设 G_1,G_2,H 是群，群同态 $\lambda_1:H\to G_1$，$\lambda_2:H\to G_2$. 由 3.4.2 可作自由积 G_1*G_2，并有内射同态 $l_1:G_1\to G_1*G_2$，$l_2:G_2\to G_1*G_2$. 但一般地 $l_1\lambda_1\neq l_2\lambda_2$. 即 H 通过两种途径映入 G_1*G_2 的像不同. 在 G_1*G_2 中考虑所有如下形式的元的集合

$$\{l_1\lambda_1(h)\cdot l_2\lambda_2(h)^{-1}\mid h\in H\}.$$

设 N 是 G_1*G_2 中由上述集合正规生成的正规子群，把商群 G_1*G_2/N 记作

$$G_1\underset{(\lambda_1,\lambda_2)}{*}G_2\cong G_1*G_2/N,$$

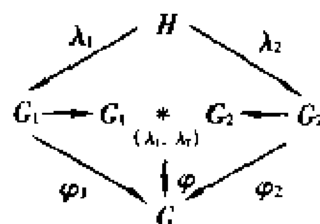


图 3-1

并记合成映射 $G_i\xrightarrow{l_i}G_1*G_2\to G_1\underset{(\lambda_1,\lambda_2)}{*}G_2$ 为 $\tau_i:G_i\to G_1\underset{(\lambda_1,\lambda_2)}{*}G_2$，$i=1,2$. 按构造就知 $\tau_1\lambda_1=\tau_2\lambda_2$，并且对任意群 G 及这样的群同态 $\varphi_i:G_i\to G$，$i=1,2$，它们使 $\varphi_1\lambda_1=\varphi_2\lambda_2$，按自由积的泛性质及同态基本定理，存在唯一群同态 $\varphi:G_1\underset{(\lambda_1,\lambda_2)}{*}G_2\to G$ 使 $\varphi_i=\varphi\tau_i$，$i=1,2$. 称如此构造出的群 $G_1\underset{(\lambda_1,\lambda_2)}{*}G_2$ 是群 G_1，G_2 关于群同态 $\lambda_i:H\to G_i$，$i=1,2$ 的**融合积**，或广义自由积. 特别，当 λ_1 和 λ_2 都是单同态时，H 可看作 G_1 和 G_2 的子群，此时融合积简记为 $G_1\underset{H}{*}G_2$，称为 G_1 与 G_2 在 H 上的融合积.

显然，上述思想是按如下泛性质作新构造，已有两个同态 $\lambda_1:H\to G_1$，$\lambda_2:H\to G_2$，希望找到群 A 及同态 $\tau_i:G_i\to A$，$i=1,2$，构成交换的四边形 $\{\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2\}$. 如

图 3-2 所示,即 $\tau_1\lambda_1=\tau_2\lambda_2$. 使得对任意这样的群同态 $\varphi_i: G_i\to G, i=1,2$, 它们也使 $\varphi_1\lambda_1=\varphi_2\lambda_2$,则存在唯一同态 $\varphi: A\to G$ 满足 $\varphi_i=\varphi\tau_i, i=1,2$. 如此得到的四边形 $\{\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2\}$ 称为 $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ 的推出(Push-out)图.

按泛性质给出的新构造如果存在则在同构意义下总是唯一的. 我们构造的 $G_1 \underset{(\lambda_1,\lambda_2)}{*} G_2$ 表明 $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ 的推出图 $\{\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2\}$ 确实存在.

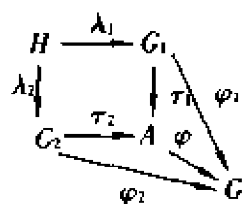


图 3-2

例 7　群 $G=\langle x,y\mid x^4=1=y^6, x^2=y^3\rangle$ 同构于 4 阶循环群 $G_1=\langle a\mid a^4=1\rangle$ 与 6 阶循环群 $G_2=\langle b\mid b^6=1\rangle$ 在一个 2 阶循环群 $H=\langle c\mid c^2=1\rangle$ 上的融合积. 即令 $\lambda_1: H\to G_1, c\to a^2$ 与 $\lambda_2: H\to G_2, c\to b^3$. 则 $G\cong G_1 \underset{H}{*} G_2$.

显然,上述思想及方法可推广到任意多个因子的融合积.

命题 11　设 $G_i, i\in I$ 是群,并有群 H 及群同态 $\lambda_i: H\to G_i$,则在同构意义下有唯一群 A 及群同态 $\tau_i: G_i\to A, i\in I$,使得对任意群 G 及这样的群同态 $\varphi_i: G_i\to G$,它们满足 $\varphi_i\lambda_i=\varphi_j\lambda_j$ 对所有 $i,j\in I$ 存在唯一群同态 $\varphi: A\to G$ 满足 $\varphi_i=\varphi\tau_i, i\in I$.

上述的群 A 称为群 $G_i, i\in I$ 关于同态 $\lambda_i, i\in I$ 的融合积.

4　几 个 群 类

4.1　循　环　群

4.1.1　循环群的结构

循环群的结构和子群的情况已全部清楚,即有下面两个命题.

命题 1　有限阶 m 的循环群与模 m 剩余类加群 Z_m 同构,无限阶循环群与整数加群同构.

命题 2　设 $G=\langle a\rangle$ 为循环群,k 为正整数,若 $|G|=\infty$,则 G 有唯一指数 k 的子群 $\langle a^k\rangle$. 若 $|G|<\infty$,当 $k \mid |G|$ 时,G 有唯一指数为 k 的子群 $\langle a^k\rangle$.

引理 1　设群 G 的元 a 的阶为 m,则对任意的整数 k,元 a^k 的阶为 $\frac{m}{(m,k)}$,这里 (m,k) 表 m 与 k 的最大公因数.

推论 1　m 阶循环群中 m 阶元的个数是 $\varphi(m)$,这里 $\varphi(m)$ 是数论欧拉函数,即 $1,2,\cdots,m$ 中与 m 互素元的个数. 换言之,m 阶循环群有 $\varphi(m)$ 个生成元.

4.1.2　与数论结合

引理 2　对任意正整数 m 有 $m=\sum\limits_{d\mid m}\varphi(d)$,其中下标 $d\mid m$ 表示 d 跑遍 m 的正因子.

证明要点 对任意 m 阶群 G,令 $\psi_G(d)$表示 G 中 d 阶元的个数,则

$$m = \sum_{d|m}\psi_G(d). \tag{4-1}$$

取 G 为 m 阶循环群,由命题 2 及引理 1 的推论即得本引理.

命题 3 设群 G 的阶为 m,如果对 m 的任意正因子 d 关于未知元λ 的方程$\lambda^d=1$ 在 G 中至多有 d 个解,则 G 为循环群.

证明要点 利用(4-1)式,由条件有 $\psi_G(d)\leqslant\varphi(d)$.由引理 2 得 $\psi_G(d)=\varphi(d),\forall d|m$.特别 $\psi_G(m)=\varphi(m)>0$,故 G 有 m 阶元.

推论 域的乘法群的任意有限子群是循环群.

命题 4 当且仅当对任意正整数 k,群 G 至多有一个子群的指数为 k 时,有限群 G 为循环群.

命题 5 当且仅当 G 的任何非平凡子群的指数有限时,无限群 G 为循环群.

4.2 交 换 群

本节专讨论交换群,为方便把运算都写作加法,那么单位元改称零元,逆元改称负元.一些交换群 $A_i,i\in I$ 的直积 $\prod\limits_{i\in I}A_i$ 仍为交换群,当然,它们的弱直积也是交换群,但改称直和,并记为$\bigoplus\limits_{i\in I}A_i$.

4.2.1 元素的高度

设 A 为交换群,其有限阶的元称为挠元,否则称为无挠元.如果 A 的所有元都是挠元,则称 A 为**挠群**.另一方面,若 A 的所有非零元都是无挠元,则称 A 为无挠群.

挠群的直和仍为挠群,但直积不必为挠群.

例 1 对任意的正整数 m,Z_m 都是挠群,但直积 $\prod\limits_{m=1}^{\infty}Z_m$ 不是挠群,例如其中([2],[2],…[2]…)就不是挠元.

显然一个交换群的所有挠元构成子群,称为该群的挠子群.

设 A 为交换群,称元素 $a\in A$ 被正整数 m 可除,如果有 $b\in G$,使 $mb=a$.若 a 被所有正整数可除,则称 a 为可除元.当 A 的所有元都是可除元时,就称 A 为**可除群**.另一方面,设 p 为素数,p^h 是 a 被 p 幂可除的最大幂,则称 h 为 a 的 p-高.当这个最大幂不存在时,称 a 的 p-高是无限的,或说 a 是 p-可除的.容易看出,当且仅当 a 对所有素数 p 是 p-可除的时,a 是可除元.

可除群的典型例子之一是有理数加群,另一典型例子是

例 2 令 $P=\langle a_1,a_2,\cdots|pa_1=0,pa_{i+1}=a_i,a_i+a_j=a_j+a_i$,对所有正整数 $i,j\rangle$,则 P 为可除群.容易看出,p 中的子群 $p_i=\langle a_1,\cdots,a_i\rangle=\langle a_i\rangle$是 p^i 阶循环群,而且 $P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots$,$P=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}P_i$.所以称 P 为**拟循环群**或拟循环p-群.

定理 1 当且仅当 A 为一个直和,其直和项或者同构于有理数加群,或者同构于一个拟循环 p-群时,交换群 A 是可除群.

4.2.2 自由交换群

定义集合 X 上的**自由交换群**为这样的一个交换群 F 及一个映射 $l: X\to F$,使得对任意交换群 A 及任意映射 $\alpha: X\to A$,存在唯一群同态 $\bar{\alpha}: F\to A$ 满足 $\alpha=\bar{\alpha}\cdot l$.

构造集合 X 上的自由交换群比 3.1.2 要容易得多.对所有 $x\in X$,令 $C_x=\langle a_x\rangle$ 为无限循环群,$F=\bigoplus_{x\in X}C_x$,$l: X\to F$,$x\to a_x$,则容易验证 F 是 X 上的自由群.由命题 1,可以简单地说 F 是由 $x\in X$ 标号的 Z 的直和.进一步有结论

命题 6 当且仅当一个交换群是无限循环群的直和时,它是自由交换群.

命题 7 当且仅当有 $X\subseteq A$ 使得任意 $a\in A$ 可唯一地写为 $a=n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_kx_k$,$x_i\in X$,$0\neq n_i\in Z$ 时,群 A 为自由交换群.而且此时称 X 为自由交换群 A 的基.自由交换群 A 的任两基有相同的基数,称为自由交换群 A 的秩.

在 3.1.4 中提到的自由群的性质对自由交换群也都成立.

4.2.3 有限生成交换群

可以由有限个元生成的交换群称为有限生成交换群.

有限生成的挠交换群显然是有限群.可以证明在同构意义下,有限交换群可唯一地分解为阶为素数幂的循环群的直和,而阶为素数幂的循环群是不可分群(见 1.5.3).另一方面,利用命题 7 及类似线性代数中线性关系的技巧可证明有限生成的无挠交换群为有限秩的自由交换群.因而可得如下的结构定理:

有限生成交换群结构定理 设 A 为有限生成交换群,则有素数 $p_1,p_2,\cdots,p_s$(不必互异),正整数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 及非负整数 r,使得

$$A\cong Z_{p_1^{k_1}}\oplus Z_{p_2^{k_2}}\oplus\cdots\oplus Z_{p_s^{k_s}}\oplus\underbrace{Z\oplus\cdots\oplus Z}_{r\text{个}},$$

而且 $p_1,p_2,\cdots,p_s,k_1,k_2,\cdots,k_s$ 及 r 都由 A 唯一确定.

值得指出的是,以上结果可推广为主理想整环上有限生成模的结构定理.

4.3 幂 零 群

4.3.1 换位子群、中心列

对群 G 的元 x,y,令 $[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}$ 称为 x 与 y 的换位子,这是因为 $xy=[x,y]yx$.对任意 $H,K\leqslant G$,把所有 H 的元与 K 的元的换位子生成的子群记作 $[H,K]=\langle[h,k]\mid h\in H,k\in K\rangle$.特别令

$$K_1(G)=[G,G]=\langle[x,y]\mid x,y\in G\rangle,$$

有时也记作 $[G,G]=G'$.称为 G 的**换位子群**,或导子群.显然 $G'\trianglelefteq G$,更强地,它还是特征子群,而且商群 G/G' 是交换群.实际上有

命题 8　设 $N \trianglelefteq G$,则当且仅当 $N \supseteq [G,G]$ 时,G/N 是交换群.

进一步,可归纳地定义 $K_{n+1}(G) = [K_n(G), G]$,就得到群 G 的正规子群链(令 $K_0(G) = G$):

$$G = K_0(G) \geqslant K_1(G) \geqslant K_2(G) \geqslant \cdots \geqslant K_n(G) \geqslant \cdots \tag{4.2}$$

称为群 G 的下中心链.这个名称来自下述性质.

引理 3　对任意 i,$K_i(G)/K_{i+1}(G) \subseteq Z(G/K_{i+1}(G))$.

对偶地,可构作上中心链.令 $Z_1(G) = Z(G)$,并归纳地定义 $Z_{n+1}(G) \supseteq Z_n(G)$ 使 $Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z(G/Z_n(G))$,即得上中心链(令 $Z_0(G) = 1$):

$$1 = Z_0(G) \leqslant Z_1(G) \leqslant \cdots \leqslant Z_n(G) \leqslant \cdots \tag{4.3}$$

引理 4　如果有正整数 n 使 $K_n(G) = 1$,则 $Z_n(G) = G$.反之,如果有正整数 n 使 $Z_n(G) = G$,则 $K_n(G) = 1$.

这引理说明,群链(4.2)经有限长度严格降链到达 1 等价于群链(4.3)经有限长度严格升链到达 G.

4.3.2　幂零群

沿用 4.3.1 中的记号,若 n 是使 $K_n(G) = 1$ 的最小正整数,则称群 G 是幂零类为 n 的**幂零群**.容易证明,幂零群的子群、商群仍是幂零群.且有限个幂零群的直积仍是幂零群.幂零群的另一显著性质如下.

命题 9　设 G 为幂零群,则有

1° 若 $1 \neq N \trianglelefteq G$,则 $N \cap Z(G) \neq 1$;

2° 若 $H \leqslant G$,则 H 是 G 的次正规子群.

例 3　对任意素数 p,任意有限 p-群是幂零群.这从 2.4.2 命题 9 可以看出.从直积的角度讲,任何有限幂零群都可由此类幂零群构造出来.

定理 2　设 G 为有限群,则以下三条等价:

1° G 是幂零群;

2° G 是其西罗子群的直积;

3° G 的每个子群都是次正规的.

对于任意幂零群,则有下述准则:

霍尔幂零性准则　设 $N \trianglelefteq G$,若 N 与 G/N' 都是幂零群,则 G 是幂零群.

4.3.3　菲廷子群与弗拉蒂尼子群

容易证明,群 G 的正规幂零子群之积仍为正规幂零子群.称 G 的所有幂零正规子群生成的子群为**菲廷(Fitting)子群**,记作 $\mathrm{Fit}(G)$.并且有,当 G 为有限群或 G 满足正规子群极大条件时,$\mathrm{Fit}(G)$ 是 G 的最大的正规幂零子群.

对群 G 的正规子群 H,K,若 $H \subseteq K$,则 G 可以共轭方式作用在 K/H 上,因此可考虑中心化子 $C_G(H/K)$(见 2.2.3).

命题 10　设 $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_n = 1$ 为群 G 的正规列,则 $\bigcap_{i=1}^{n} C_G(G_{i-1}/G_i) \subseteq$

Fit(G). 进一步,若该正规列没有真正的加细正规列(此时,称该正规列为 G 的主群列),则式中等式成立.

若 M 是群 G 的真子群,而 G 再没有真位于 M 和 G 之间的子群,则 M 称为 G 的极大子群,G 的所有极大子群之交称为 G 的**弗拉蒂尼子群**,记作 Frat(G). 注意,当 G 没有极大子群时(例如拟循环群无极大子群),规定 $\mathrm{Frat}(G)=G$.

弗拉蒂尼子群与下述元素有关. 群 G 的元素 g 称为非生成元,如果对任意 $X\subseteq G$,只要 $G=\langle X,g\rangle$,则有 $G=\langle X\rangle$,即 g 在任何生成中不起作用.

命题 11 群 G 的弗拉蒂尼子群 Frat(G)是 G 的所有非生成元的集合.

命题 12 群 G 的弗拉蒂尼子群如果是有限的,则是幂零的.

4.4 可 解 群

4.4.1 可解群

如果 G 有一个次正规群列 $G=G_0\geqslant G_1\geqslant\cdots\geqslant G_n=1$,其每个商因子 G_{i-1}/G_i, $i=1,2,\cdots,n$,都是交换群,则群 G 称为**可解群**.

令 $G^{(1)}=[G,G]$,归纳地定义 $G^{(n+1)}=[G^{(n)},G^{(n)}]$,则得正规子群链并称为 G 的导出链:

$$G=G^{(0)}\geqslant G^{(1)}\geqslant\cdots\geqslant G^{(n)}\geqslant\cdots$$

不难看出,当且仅当存在正整数 m 使 $G^{(m)}=1$ 时,群 G 为可解群;当且仅当 G 有一个正规群列 $G=N_0\geqslant N_1\geqslant\cdots\geqslant N_k=1$ 时,其每个商因子为交换群. 使 $G^{(d)}=1$ 的最小正整数 d 称为可解群 G 的导出长.

易见,可解群的子群、商群仍为可解群;可解群的有限直积仍为可解群.

幂零群显然是可解群,但反之不然. 例如 3 次对称群 S_3 是可解群但不是幂零群.

命题 13 1° 可解群的极大正规子群的指数必为素数.

2° 可解群的极大子群的指数或者为无限,或者是一个素数之幂.

"可解群"这个名称来自伽罗瓦对多项式的根式可解性的研究. 他断言:一个多项式可用根式解出所有零点的充要条件是该多项式的根的集合决定的一个置换群(称为该**多项式的伽罗瓦群**)是如上定义的可解群.

4.4.2 有限可解群

有限可解群的突出特征是 π-西罗性质成立. 在群论中常以 π 表示某些素数的集合,而 π' 就表示 π 在全体素数集中的补集. 如果整数 m 的所有素因子都在 π 中,则 m 称为 π-数. 如果群元 a 的阶是 π-数,则 a 称为 π-元. 而如果有限群 G 的所有元都是 π-元,则它称为 π-群.

设 π 是一些素数的集合,有限群 G 的阶为 mn,其中 m 为 π-数, n 为 π'-数. 由拉格朗日定理, G 中阶为 m 的子群如果存在则必为极大 π-子群,这种子群称为 G 的**霍尔子群**或霍尔 π-子群. 比较西罗定理,下述三条性质称为 **π-西罗性质**(也称 π-

霍尔性质)：

1° 霍尔 π-子群存在；

2° 任意二个霍尔 π-子群彼此共轭；

3° 任意一个 π-子群含在某一霍尔 π-子群中.

霍尔定理 有限群为可解群，当且仅当任意数集合 π，π-西罗性质对它成立.

关于有限可解群有两个当初都以班赛德(Burnside)猜想著称，后被证明的著名定理.

p^aq^b 定理 阶为 p^aq^b 的群是可解群，其中 p, q 为素数.

奇阶群定理 奇阶群是可解群.

两者的证明都用到有限群的线性表示理论，后者的证明还奠定了有限群论中的局部分析方法. 线性表示与局部分析都是单群分类中的重要工具.

4.4.3 超可解群、多重循环群

如果群 G 有一个正规列 $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_n = 1$，其每个商因子是循环群，则 G 称为超可解的.

如果群 G 有一个次正规列 $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_n = 1$，其每个商因子是循环群，则 G 称为多重循环的.

超可解群与多重循环群是群论中被研究得比较充分的两类群. 仅列出两结果如下.

胡帕特(Huppert)定理 当且仅当有限群的每个极大子群的指数都是素数时，它为超可解群.

贝尔(Bear)定理 当且仅当一个多重循环群的每个有限商群是超可解群时，它是超可解群.

参考文献

1 Gorenstein, D. Finite simple groups. New York: Plenum Press, 1982.

2 Robinson, D. J. S. A course in the theory of groups. New York: Springer-Verlag, 1982.

3 张远达. 有限群构造：上、下册. 北京：科学出版社，1982.

·经典数学卷·

附录 1

初等代数

编　者　许　康

审校者　欧阳禄

目　录

1 数集的扩张

1.1 集 合 简 介

1. 集合概念

把确定的互相可以区别的一些事物合并起来,看成一个整体,就称为一个集合(简称集),其中各事物称为该集合的元素.元素 a 属于集合 S,记为 $a \in S$.只有有限个元素的集合称为有穷集合,否则称为无穷集合.

集合由它的全体元素所确定,常用{ }号将这些元素括起来表示这个集合.例如 $A=\{1,2,3,4\}$;或者列举全体元素具有的某一性质 $P(x)$ 加以概括,例如 $A=\{x \mid P(x)\}=\{x \mid x$ 是小于 5 的自然数$\}$.

没有任何元素的集合,叫做空集.通常记为$\varnothing$.

2. 集合的关系

如果集合 B 的元素都是集合 A 的元素,就称 B 为 A 的子集,或 A 包含 B,记为 $B \subset A$.任一集合 A 是它自己的子集,有 $A \subset A$. A 的异于自身的子集 B 叫做 A 的真子集,记为 $B \subsetneqq A$.

若 $A \supset B$ 且 $B \supset A$,则称 $A=B$.

包含关系具有传递性,即 $A \supset B, B \supset C \Rightarrow A \supset C$.

一个集合也可以以其他集合为元素,形成集合的集合.

3. 集合的运算

1° 并(集) A,B 集合的并(集)记为 $A \cup B$,其元素由属于 A 或属于 B 的元素组成(相同的元素在并集中只出现一次).

2° 交(集) A,B 集合的交(集)记为 $A \cap B$,其元素由属于 A 且属于 B 的元素组成.

3° 差(集) A,B 集合的差(集)记为 $A \setminus B$,其元素由属于 A 而不属于 B 的元素组成.

并与交运算分别服从交换律、结合律,且共同服从分配律.

4. 映射

1° 设 A,B 是两个非空集合,f 是一个确定的法则.对于每一个 $a \in A$,根据这个法则,有且仅有一个 $b \in B$ 与之对应,则称 f 为一个从 A 到 B 的映射,记为

$$f: A \to B \quad (\text{或 } A \xrightarrow{f} B)$$

b 叫做 a 在 f 的作用下的像,记为 $b=f(a)$;a 叫做 b 在 f 的作用下的一个原像.这里集合 A 称为 f 的原像集,或者 f 的定义域,记为 $\operatorname{dom}(f)$.对于所有的 $a \in A$,取和 a 相对应的 b 的全体组成 B 的一个子集,称为 f 的像集,或者 f 的值域,记为 $\operatorname{ran}(f)$.

2° 若 $a_1\in A, a_2\in A$，当 $a_1\neq a_2$ 时，有 $b_1=f(a_1)\neq b_2=f(a_2)$，$b_1,b_2\in B$，则称 f 是从 A 到 B 的一个单射；若在映射 f 下，B 的每一个元素都至少是 A 中某一个元素的像，即 $B=\mathrm{ran}(f)$，则称 f 是从 A 到 B 的一个满射．若 f 既是单射又是满射，则称 f 是从 A 到 B 的一个双射，也叫单满射，或称一一映射．

3° 设 $f:A\to B$ 是从 A 到 B 的一一映射，g 是一个法则，使得对于每个 $b\in B$，都有 b 在 A 中的原像 a 与之对应，则称 g 为映射 $f:A\to B$ 的逆映射，记作 $g:B\to A$．显然 f 与 g 两者互为逆映射．通常记 g 为 f^{-1}，或 f 为 g^{-1}．显然 $(f^{-1})^{-1}=$．

4° 如果集合 A 与集合 B 可以作成一一映射，则说 A 对等于 B，记作 $A\sim B$．也说这两个集有相同的基数（或称势），即这两个集等势．

5° 若 X 与 Y 是数集，将映射 $f:X\to Y$ 称为定义于 X 上的一个函数 f，常记为 $f(x)(x\in X)$．

1.2　自 然 数 集

1. 基数理论

诺伊曼（Neumann）从空集出发，定义扩大了的自然数（含零）如下：

$0=\varnothing$，　　即 $0=\varnothing$；

$1=\{\varnothing\}$，　　即 $1=\{0\}$；

$2=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，　　即 $2=\{0,1\}$；

$3=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$，　　即 $3=\{0,1,2\}$．

按此定义，每个自然数都是一个集．若 l,m 是两自然数．则下面关系有且仅有一个成立

$$l<m,\ l=m,\ l>m.$$

若 L 为任一集，但 $L\sim l$，则称 L 的基数为 l．若又有任一集 M，$M\sim m$，且 $L\cap M=\varnothing$，$L\cup M=N$，$N\sim n$，则称 n 为 l 与 m 之和，记为 $l+m=n$．可以证明，这种加法适合交换律和结合律．由结合律可知 m 个 l 相加的结果是唯一的，并可记为 $d=l+l+\cdots+l=ml$，d 称为 m,l 的积．亦可证此乘法适合交换律、结合律及乘法对加法的分配律．

2. 序数理论

定义集合 $\mathbf{N}$ 的元素叫做自然数，如果 $\mathbf{N}$ 的元素间有一个基本关系“后继”（用 $^+$ 来表示），则满足下列公理：

1° $1\in\mathbf{N}$．

2° $\forall a\in\mathbf{N}$，有唯一的 $a^+\in\mathbf{N}$．

3° $\forall a\in\mathbf{N}$，a^+ 不是 1．

4° $\forall a\in\mathbf{N}, b\in\mathbf{N}$，若 $a^+=b^+$，则 $a=b$．

5°（归纳公理）　若 $M\subset\mathbf{N}$，且 $1\in M$；或者 $\forall a\in M$，有 $a^+\in M$，则 $M=\mathbf{N}$．

用 2 表示 1^+，3 表示 2^+，…，则可以把 $\mathbf{N}$ 的全部元素排列为 $1,2,3,\cdots,n,n^+,\cdots$．这样的自然数称为序数．

定义　自然数的加法是一种关系“+”，使得 $\forall a,b\in\mathbf{N}$，有唯一确定的 $a+b\in\mathbf{N}$，并且

1° $a+1=a^+$;

2° $a+b^+=(a+b)^+$.

进而,对任意两个自然数 a,b,可以规定它们的顺序,即若存在 $k\in\mathbf{N}$,使得 $a=b+k$,则称 $a>b$,也说 $b<a$.

自然数的离散性:任意两个相邻的自然数 a 与 a^+ 之间不存在自然数 b,使 $a<b<a^+$.

定义 自然数的乘法是一种对应关系"·",使得 $\forall a,b\in\mathbf{N}$,有唯一确定的 $a\cdot b\in\mathbf{N}$,并且

1° $a\cdot 1=a$;

2° $a\cdot b^+=a\cdot b+a$.

由定义可知,自然数集 N 对加法和乘法都是封闭的.

定义 自然数的减法:设 $a,b\in\mathbf{N}$,若存在 $x\in\mathbf{N}$,使 $b+x=a$,则称 x 为 a 减去 b 的差,记作 $a-b$.这里 a 叫被减数,b 叫减数.求两数差的运算叫减法.

定义 自然数的除法:设 $a,b\in\mathbf{N}$,若存在 $x\in\mathbf{N}$,使 $b\cdot x=a$,则称 x 为 a 除以 b 的商,记作 a/b.这里 a 叫被除数,b 叫除数.求两数商的运算叫做除法.

自然数集对减法和除法不是封闭的.

3. **代数系统(代数结构)**

设 S 是一个非空集合,如果存在一个法则 $*$,使 S 中的任意两个元素有 S 中唯一确定的元素与它们对应,就说 $*$ 是 S 的代数运算,S 对 $*$ 构成代数系统(或称 S 对于运算 $*$ 成一个代数结构),记为$(S,*)$.S 对运算 $*$ 是封闭的.

因此,自然数集 N 对 + 或对·分别构成代数系统.$(N,+)$与$(N,\cdot)$都是可交换的半群.

1.3 整 数 集

自然数集 N 虽然对 +(加法)和·(乘法)两种运算封闭,但对加法缺乏单位元素 0,也缺乏逆元素(例如,$\forall a\in\mathbf{N}$,找不到逆元素 a' 使得 $a+a'=a'+a=0$);对乘法虽然有单位元素 1,却缺乏逆元素(例如,$\forall a\in\mathbf{N}$,找不到逆元素 a' 使得 $a\cdot a'=a'\cdot a=1$).所以$(\mathbf{N},+)$和$(\mathbf{N},\cdot)$都只是半群.

1. **$(\mathbf{Z},+)$交换群**

将自然数集扩张为整数集 $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^-\cup\{0\}\cup\mathbf{Z}^+$,这里 $\mathbf{Z}^+$ 称为正整数集,即 N;$\mathbf{Z}^-$ 称为负整数集,由 N 的元的加法逆元全体组成。则$(Z,+)$成为交换群.

2. **$(\mathbf{Z},\cdot)$半群**

$(\mathbf{Z},\cdot)$是半群,因为 Z 中虽有单位元素 1,却没有逆元素.

3. **$(\mathbf{Z},+,\cdot)$环**

环是具有两个运算(加法和乘法)的代数系统,而且对加法是一个交换群,对乘法是一个半群,乘法对加法的左右分配律成立.整数集 Z 同时满足这 3 个条件,而且适合乘法交换律,所以整数集 Z 是交换环.

4. **带余除法**

1° 若 $a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{Z}_0$($\mathbf{Z}_0=\mathbf{Z}\setminus\{0\}$),则有且只有一对整数 q 与 r,使得

$$a = bq + r,\quad 0 \leqslant r < |b|.$$

如果 $r=0$，就是 b 整除 a，记作 $b \mid a$.

2° 若整数 $g>1$，则任一正整数 a 能够唯一地表示为

$$a = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0.$$

这里整数 $n \geqslant 0$，$a_i \in \mathbf{Z}$，且 $0 \leqslant a_i \leqslant g$，$i = 0,1,\cdots,n$.

这个式子表明，只要用 g 个数码就可以表示任何正整数，这时 a 的 g 进制表示法可以简记为 $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$.

5. 最大公因数与最小公倍数

1° 最大公因数　若 $d \mid a_i$，$i = 1,2,\cdots,n$，$n \geqslant 2$，则称 d 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公因数. 又因为不全为零的整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公因数只有有限个，其中必有最大数，这个最大数就叫做这 n 个整数的最大公因数，记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

2° 互素　若 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，则称 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互素. 如果其中每两个数都互素，就说它们两两互素.

3° 最小公倍数　若 $a_i \mid m$，$i=1,2,\cdots,n$，$n \geqslant 2$，则称 m 是这 n 个数的公倍数. 非零整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一切正公倍数组成的非空集合中必有最小正数，这个最小正数就叫做这 n 个非零整数的最小公倍数，记作 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

6. 素数与合数

1° 素数与合数　如果大于 1 的整数 p 仅有两个正因数 1 与 p，就说 p 是素数；如果正整数 n 有多于两个的正因数，就说 n 是合数.

2° 算术基本定理　每个大于 1 的整数都可以唯一地分解成素因数的乘积（不计因数的顺序），这就是算术基本定理.

这个定理表明 a 有标准分解式

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是相异素数，$\alpha_i \in \mathbf{N}$，$i=1,2,\cdots,k$.

1.4 有理数集

整数集对除法运算不封闭，有必要再加以扩张.

1° 有理数　形如 $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}_0)$ 的数叫有理数. 当 $b \mid a$ 时它是整数；当 $b \nmid a$ 时，它是分数.

2° 有理数集　有理数集用集合表示为

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^-,$$

其中

$$\mathbf{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a,b \in \mathbf{N} \right\},\quad \mathbf{Q}^- = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; -a,b \in \mathbf{N} \right\}.$$

设 $a_1,a_2 \in \mathbf{Z}$，$b_1,b_2 \in \mathbf{Z}_0$. 当 $a_1 b_2 = a_2 b_1$ 时，$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{加法}\quad \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}, \\ &\text{乘法}\quad \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}, \end{aligned}\right\} \text{适合交换律、结合律和分配律}$$

减法 $$\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1b_2},$$

除法 $$\frac{a_1}{b_1}\Big/\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1b_2}{a_2b_1}\quad(a_2\neq 0).$$

有理数的绝对值 $\left|\frac{a}{b}\right|$ 分别规定为 $\frac{a}{b}$ $\left(当\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}^+\right)$、$0$ $\left(当\frac{a}{b}=0\right)$、$-\frac{a}{b}$ $\left(当\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}^-\right)$.

若 $\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$ 都是有理数，且 $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ 是正有理数，则 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$.

3° 有理数域　域是具有加法和乘法运算的代数系统，它至少含有两个不同的元素 0 和 1，并且对加法是交换群，对乘法（除 0 以外）也是交换群，且乘法对加法的分配律成立.

有理数集 **Q** 符合上述条件，所以是有理数域.

域是环的特例（子集），所以有理数集也是有理数环.

4° 有理数体　若上述乘法运算的交换律不成立，则该代数系统称为非交换域. 域和非交换域合称体（又叫除环）. 因此有理数域又是有理数体.

5° 分数与十进小数

凡既约真分数总可以化为有限小数或无限循环小数. 假分数是整数与真分数的和，它的既约真分数部分当然也如此.

1.5 实 数 集

1. **无理数**

把不能表示为有理数（分数）的数称为无理数.

无限不循环小数是无理数.

2. **实数**

称十进小数

$$a=a_0.\,a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

为实数，这里 a_0 是整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 都是小于 10 的非负整数.

实数集是有理数集与无理数集的并集.

实数集 $\mathbf{R}=\mathbf{R}^+\cup\{0\}\cup\mathbf{R}^-$，即包括正实数、负实数和零.

两个实数 $\alpha=a_0.\,a_1a_2\cdots a_n\cdots$，$\beta=b_0.\,b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 可以通过比较它们小数点前后相应数位数字的大小而判定大小，因而实数集是有序集.

若 $\alpha<\beta$，总有某个 k，使 $a_k<b_k$，这时取有理数 $b=b_0.\,b_1b_2\cdots b_k$，则 $\alpha<b\leqslant\beta$；又不妨设 $a_{k+l}\neq 9$，置 $a'_{k+l}>a_{k+l}$，作有理数 $a=a_0.\,a_1a_2\cdots a_k\cdots a_{k+l-1}a'_{k+l}$，于是 $\alpha<a<b\leqslant\beta$. 可见在两个实数 α,β 之间有无限多个有理数. 又，在 a 的 a'_{k+l} 之后可任意添加无限不循环的数码构成无限多个无理数，它们仍在 a,b 之间也即仍在 α,β 之间. 所以实数具有稠密性.

对于实数 $\alpha=a_0.\,a_1a_2\cdots a_n\cdots$，可以写出它的精确到 $1/10^n$ 的不足近似值 $\alpha_n^-=a_0.\,a_1a_2\cdots a_n$ 和过剩近似值 $\alpha_n^+=a_0.\,a_1a_2\cdots a_n+1/10^n$，这样，总是有 $\alpha\in[\alpha_n^-,$

α_n^+],$n=0,1,2,\cdots$.只要控制 n 的大小就可以用有理数α_n^- 和α_n^+ 形成的闭区间套来达到α 的任意精确程度.

3. 实数的四则运算

1° 加法 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,且 $\alpha_n^-+\beta_n^-\leqslant\gamma<\alpha_n^++\beta_n^+$,$n=0,1,2,\cdots$,则称 γ 为α 加上β 的和,记为 $\gamma=\alpha+\beta$.加法满足交换律、结合律.

实数集$(\mathbf{R},+)$有唯一的零元0.

2° 减法 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,若有 $x\in\mathbf{R}$,使 $\beta+x=\alpha$,则称 x 为α 减去β 的差,记为 $x=\alpha-\beta$.且 x 是唯一的,并且 $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

3° 乘法 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}^+$,且 $\alpha_n^-\cdot\beta_n^-\leqslant\gamma<\alpha_n^+\cdot\beta_n^+$,$n=0,1,2,\cdots$,则称 γ 为α 乘以β 的积,记为 $\gamma=\alpha\cdot\beta$;而且 $\alpha\cdot0=0\cdot\alpha=0$;$(-\alpha)\beta=\alpha(-\beta)=-(\alpha\beta)$;$(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$.实数乘法满足交换律、结合律.

实数集$(\mathbf{R},\times)$有唯一单位元1.

任取 $\alpha\in\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0=\mathbf{R}\setminus\{0\})$,有唯一的 $\beta\in\mathbf{R}$,使 $\alpha\beta=\beta\alpha=1$,这里 β 叫做α 的逆元,记为 α^{-1}.

4° 除法 设 $\alpha\in\mathbf{R},\beta\in\mathbf{R}_0$,若有 $x\in\mathbf{R}$,使 $\beta x=\alpha$,则称 x 为α 除以β 的商,记为 $x=\dfrac{\alpha}{\beta}$.且 x 是唯一存在的,并且$\dfrac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\dfrac{1}{\beta}=\alpha\cdot\beta^{-1}$.

5° 乘方 设 $\alpha\in\mathbf{R},n\in\mathbf{Z}$,则规定实数的整数指数幂为

$$\alpha^n=\begin{cases}\alpha, & n=1;\\ \alpha^{n-1}\alpha, & n>1;\\ 1, & n=0,\alpha\neq0;\\ \dfrac{1}{(\alpha^{-1})^n}, & n<0,\alpha\neq0.\end{cases}$$

此外 $\alpha^m\alpha^n=\alpha^{m+n}$;$(\alpha^m)^n=\alpha^{mn}$;$(\alpha\beta)^n=\alpha^n\beta^n$.

4. 实数域

实数乘法对加法的分配律成立.而且$(\mathbf{R},+)$,$(\mathbf{R}_0,\cdot)$都是交换群,所以 $\mathbf{R}$ 是数域.当然,$\mathbf{R}$ 也是数体.

若 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$,则

1° 三歧性 $\alpha>\beta$,$\alpha=\beta$,$\beta>\alpha$ 三者有一个且只有一个成立.

2° 传递性 若 $\alpha>\beta,\beta>\gamma$,则 $\alpha>\gamma$.

3° 单调性 若 $\alpha>\beta$,则 $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

4° 保向性 若 $\alpha>\beta,\gamma>0$,则 $\alpha\gamma>\beta\gamma$.

由4°还可推出

5° 变向性 若 $\alpha>\beta,\gamma<0$,则 $\beta\gamma>\alpha\gamma$.

实数 $\mathbf{R}$ 是有序域.

5. 实数的开方

若 $n\in\mathbf{Z},n>1,\alpha\in\mathbf{R}$,则称适合 $x^n=\alpha$ 的实数 x 为α 的 n 次方根.求方根的运算叫做开方.

负实数的偶次方根不存在,因为任何实数的偶次方都不是负数.

若 $a\geqslant 0$，整数 $n>1$，则有且只有一个非负实数 x，使 $x^n=a$，x 称为 a 的 n 次算术根，记为 $x=\sqrt[n]{a}$.

正实数 a 的偶次实方根有两个值 x 和 $-x$，可以用 $\pm\sqrt[n]{a}$ 表示.

非正实数 a 的奇次实方根是唯一的非正实数 $\sqrt[n]{a}$.

1.6　复　数　集

实数域对开方运算不封闭，有必要继续加以扩张.

1. 复数集

集合 $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$ 叫做复数集，其中每个元素 (x,y) 是实数序偶(即有序的实数对)，称为复数. 复数集记为 $\mathbf{C}$.

x 叫做复数 (x,y) 的实部，记为 $x=\mathrm{Re}(x,y)$；

y 叫做复数 (x,y) 的虚部，记为 $y=\mathrm{Im}(x,y)$.

若两个复数相等则它们的实部相等、虚部也相等. 即 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2$.

2. 复数的代数形式及四则运算

称 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$ 为复数的代数形式，其中 $\mathrm{i}^2=-1$.

1° 加法　$(x_1+y_1\mathrm{i})+(x_2+y_2\mathrm{i})=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\mathrm{i}$

加法满足交换律、结合律.

2° 减法　$(x_1+y_1\mathrm{i})-(x_2+y_2\mathrm{i})=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\mathrm{i}$.

复数有零元 $0+0\mathrm{i}$；复数 $x+y\mathrm{i}$ 的负元是 $-x-y\mathrm{i}$.

3° 乘法　$(x_1+y_1\mathrm{i})\cdot(x_2+y_2\mathrm{i})=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}$.

乘法满足交换律、结合律.

4° 除法　$\dfrac{(x_1+y_1\mathrm{i})}{(x_2+y_2\mathrm{i})}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}$.

若复数 $x+y\mathrm{i}\in\mathbf{C}_0$(即 $x+y\mathrm{i}\neq 0+0\mathrm{i}=0$)，则 $\dfrac{x+y\mathrm{i}}{x+y\mathrm{i}}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\dfrac{xy-xy}{x^2+y^2}\mathrm{i}=1+0\mathrm{i}=1$ 称为 $\mathbf{C}$ 的单位元.

任取 $(x+y\mathrm{i})\in\mathbf{C}_0$，可以发现 $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}$ 是 $x+y\mathrm{i}$ 的逆元，记为 $(x+y\mathrm{i})^{-1}$，有 $(x+y\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})^{-1}=1+0\mathrm{i}=1$.

规定　$x+0\mathrm{i}=x$，$0+1\mathrm{i}=\mathrm{i}$.

此外　$\mathrm{i}^{4m}=1$，$\mathrm{i}^{4m+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4m+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4m+3}=-\mathrm{i}$，$m\in\mathbf{Z}$.

$x+y\mathrm{i}$ 的共轭复数是 $x-y\mathrm{i}$.

3. 复数的三角形式及乘方开方运算

1° 复数　$z=x+y\mathrm{i}=\sqrt{x^2+y^2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{i}\right)=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

叫做复数的三角形式，这里 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 称为复数 z 的模，由 $\cos\theta=\dfrac{x}{|z|}$，$\sin\theta$

$=\frac{y}{|z|}$联立确定的 θ 称为复数 z 的辐角.

2° 棣莫弗(de Moivre)公式 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta,n\in\mathbf{N}$.

$$z^n=|z|^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

3° 开方 $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),k=0,1,2,\cdots,n-1.$

记$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\varepsilon_k,k=0,1,2,\cdots,n-1$,其中 ε_k 是1的 n 次方根,简称 n 次单位根,有且只有 n 个值$\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$.这 n 个值可以由其中某一ε_k 的整数指数幂表示出来,这样的 ε_k 叫做一个 n 次原根.

例如 复数 $1+0\mathrm{i}$ 的三次方根分别是 $\varepsilon_0=1+0\mathrm{i},\varepsilon_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\varepsilon_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.可以充当三次原根的是 ε_1 和 ε_2.事实上,$\varepsilon_1^2=\varepsilon_2,\varepsilon_1^3=\varepsilon_1^0=1;\varepsilon_2^2=\varepsilon_1,\varepsilon_2^3=\varepsilon_2^0=1$.

4. 复数集与实数域的关系

由 $x+0\mathrm{i}=x$ 知,虚部为零的复数就是实数,所以实数域 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

复数 $x+y\mathrm{i}$,当 $y\neq0$ 时叫做虚数;当 $x=0,y\neq0$ 时叫做纯虚数.

$(\mathbf{C},+),(\mathbf{C},\cdot)$都是交换群,又 $\mathbf{C}$ 中乘法对加法的分配律成立,所以$(\mathbf{C},+,\cdot)$是数域.

复数乘方的代数式可以按二项式定理求得,如$(x+y\mathrm{i})^2=x^2+2xy\mathrm{i}+y^2\mathrm{i}^2=(x^2-y^2)+2xy\mathrm{i}$.复数开方的代数式一般无法写出,这里仅介绍平方根情形

如 $z=x+y\mathrm{i}$,则$\sqrt{z}=\sqrt{x+y\mathrm{i}}=z_1$ 或 z_2.

$$z_1=\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}+y\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2(x+\sqrt{x^2+y^2})}};$$

$$z_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}-y\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2(x+\sqrt{x^2+y^2})}}.$$

复数不能比较大小,复数域 $\mathbf{C}$ 不是有序域.

2 多 项 式

代数式就是以字母的有限次的加、减、乘、除的四则运算和指数为有理数的乘方运算(含开方运算)构成的解析式.

解析式中的字母分为两类,一类是在其容许值范围内任意取值的,叫自变数(量);另一类是当自变数(量)任意取值时保持相对固定值的,叫参变数(量).

解析式的自变数的所有容许值的集,叫做解析式(以及由它所定义的函数)的定义域.

如果两个解析式有相同的定义域,而且对于自变数的所有容许值组都有相同的数值,就说它们是恒等的.如 x^2-y^2 与$(x+y)(x-y)$.

如果两个解析式的定义域不同,但在它们的公共部分上两个解析式恒等,就说它们是在公共定义域上恒等的.如$\frac{x^2-1}{x-1}$与 $x+1$.

一个解析式用另一个与它恒等的表达式去代换时,叫做恒等变形.

2.1 单项式与多项式的概念

1. 单项式

1° 单项式 由数值系数与自变数(它们都在数域 F 上取值)的非负整幂所构成的乘积

$$Ax^ky^l\cdots z^q$$

叫做自变数 $x,y,\cdots,z$ 在数域 F 上的单项式.显然其值也属于 F.

2° 单项式的次数 $Ax^ky^l\cdots z^q$ 中幂指数的和 $k+l+\cdots+q$ 叫做该单项式的次数.

3° 同类(相似)单项式 如果数域 F 上的两个具有相同自变数的单项式仅有系数的不同,则称这两个单项式为同类(相似)单项式,或同类项.

2. 多项式

1° 多项式 由自变数与数字(它们都在数域 F 上取值)所组成的,仅经加法及乘法运算所得到的解析表达式叫做数域 F 上的有理整式或多项式.显然其值也属于 F.

2° 多项式的标准形式 经合并同类项,可以得到如下标准形式

$$P(x,y,\cdots,z)=A_1x^{k_1}y^{l_1}\cdots z^{q_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}\cdots z^{q_2}+\cdots+A_sx^{k_s}y^{l_s}\cdots z^{q_s}.$$

如果 $A_1=A_2=\cdots=A_s=0$,特别地称为零多项式,这时 $P(x,y,\cdots z)\equiv 0$.逆命题也成立.

如果各项的指数全为零,则 $P(x,y,\cdots,z)=A_1+A_2+\cdots+A_s=B$(常数),称为零次多项式.

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 中仅有一个不为零,则 $P(x,y,\cdots z)$是单项式;若仅有两个不为零,则 $P(x,y,\cdots,z)$是二项式,等等.

多项式各项的次数 $k_i+l_i+\cdots+q_i(i=1,2,\cdots,s)$中最大的值称为这个多项式的次数.如果各项次数都相等(等于 n),则称这个多项式为 n 次齐次多项式,或叫做 n 次型.

只含有一个自变数的多项式称为一元多项式,含有两个自变数的多项式称为二元多项式等等.

3° 多项式恒等的充要条件 以标准形式给出的两个多项式恒等的充分必要条件是这两个多项式的对应项分别是具有相同系数的同类项.这个条件是待定系数法的理论依据.

4° 多项式诸项的排列方法 多项式常按降幂或升幂排列,如

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq 0),$$

或

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n.$$

2.2　多项式的运算

(1) 加法和减法　按同类项合并.

(2) 乘法　按乘法对加法的分配律进行,也可列成竖式进行.

(3) 简略乘法公式

1° $(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$.

2° $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

3° $(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$.

4° $(x\mp y)(x^2\pm xy+y^2)=x^3\mp y^3$.

5° $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

6° $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$.

7° $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$.

8° $$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2+2x_1(x_2+x_3+\cdots+x_n)+2x_2(x_3+x_4+\cdots+x_n)+2x_3(x_4+x_5+\cdots+x_n)+\cdots+2x_{n-1}x_n$$
$$=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots+2x_{n-1}x_n.$$

9° $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(x+z)+3z^2(x+y)+6xyz$.

10° $(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})=x^n-y^n$.

11° $(x+y)(x^{2k-1}-x^{2k-2}y+x^{2k-3}y^2-\cdots-y^{2k-1})=x^{2k}-y^{2k}$.

12° $(x+y)(x^{2k}-x^{2k-1}y+x^{2k-2}y^2-\cdots+y^{2k})=x^{2k+1}+y^{2k+1}$.

13° $$(x\pm y)^n=x^n\pm nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2\pm\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}x^{n-r}(\pm y)^r+\cdots+(\pm y)^n$$
$$=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}(\pm y)+C_n^2x^{n-2}(\pm y)^2+\cdots+C_n^rx^{n-r}(\pm y)^r+\cdots+C_n^n(\pm y)^n.$$

14° $(x^3\pm y^3)(x^2\pm xy+y^2)=x^5\pm x^4y+x^3y^2\pm x^2y^3+xy^4\pm y^5$.

15° 拉格朗日(Lagrange)恒等式
$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)-(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2$$
$$=(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+\cdots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})^2.$$

16° 欧拉(Euler)恒等式.
$$(ax+by+cz+du)^2+(bx-ay+dz-cu)^2+(cx-dy-az+bu)^2+(dx+cy-bz-au)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+u^2).$$

2.3　多项式的可除性

1. 多项式的因式

若多项式 $P(x,y,\cdots,z)$能被多项式 $Q(x,y,\cdots,z)$除尽,则存在一个多项式 $\Phi(x,y,\cdots,z)$,使恒等式
$$P(x,y,\cdots,z)=Q(x,y,\cdots,z)\Phi(x,y,\cdots,z)$$
成立.

多项式 $Q(x,y,\cdots,z)$同 $\Phi(x,y,\cdots,z)$叫做多项式 $P(x,y,\cdots,z)$的因式.

2. 一元多项式的带余式的除法

1° 当 $P(x)$不能被 $Q(x)$除尽时,可以有不完全商 $\Phi(x)$及余式 $r(x)$,即

$$P(x)=Q(x)\Phi(x)+r(x).$$

常用长除法或角形除法进行实际计算.

2° 用 $x-a$ 除一元多项式 $P(x)$.

这时余式 $r(x)=P(a)$,即

$$P(x)=(x-a)\Phi(x)+P(a).$$

$\Phi(x)$及余数 $P(a)$的具体计算,可用待定系数法,并形成下列格式:

设

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$\Phi(x)=A_{n-1}x^{n-1}+A_{n-2}x^{n-2}+\cdots+A_1x+A_0,$$
$$Q(x)=x-a.$$

则有

$$\begin{array}{rcccccc|l} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & \underline{\ a\ } \\ +) & & aA_{n-1} & aA_{n-2} & \cdots & aA_1 & aA_0 & \\ \hline & a_n=A_{n-1} & A_{n-2} & A_{n-3} & \cdots & A_0 & a_0+aA_0=r=P(a) & \end{array}$$

3° 当且仅当数 a 是 $P(x)$的根,即 $P(a)=0$ 时,多项式 $P(x)$能被 $x-a$ 除尽.

这个定理也可被灵活用于验证多元多项式的因式.

2.4 多项式的因式分解

1. 复数域上的代数基本定理

1° 代数基本定理 每一个正指数的多项式 $P(x)$在复数域上至少有一个根.

2° 每一个 $n(n>0)$次多项式 $P_n(x)$在复数域上能分解为 n 个一次因式的乘积.

3° 在实系数多项式 $P_n(x)$情形,如果有虚根 $\alpha=\xi+\eta i(\eta\neq0)$,则必有其共轭虚根 $\overline{\alpha}=\xi-\eta i$. 这时 $P_n(x)$含有的因式$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-2\xi x+(\xi^2+\eta^2)=x^2+px+q$ 是实系数二次三项式,所以多项式 $P_n(x)$在实数域上的分解式是

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_l)^{\alpha_l}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m}.$$

其中 $\alpha_1+\cdots+\alpha_l+2(\beta_1+\cdots+\beta_m)=n$,式中的因式在实数域上都是既约的(不能再分解).

2. 多项式的因式分解

(1) 常用公式 除 2.2 节介绍的乘法公式可以逆用以外,常见的还有(在实数域上)

1° $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2].$$

2° $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

3° $x^4+y^4=(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)(x^2-\sqrt{2}xy+y^2)$.

4° $x^4 - y^4 = (x+y)(x-y)(x^2+y^2)$.

5° $x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

$$= (x-y)\left(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}xy + y^2\right)\left(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}xy + y^2\right).$$

6° $x^6 - y^6 = (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

7° $x^6 + y^6 = (x^2+y^2)(x^2+\sqrt{3}xy+y^2)(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)$.

(2) 因式分解的方法　因式分解的方法一般有

1° 提取公因式法.

2° 分组分解法(有时需人为地裂项或引入加减相消项).

3° 乘法公式的逆用.

4° 配平方法.

5° 代入验证法.

2.5 插值公式

1° n 次多项式 $P_n(x)$ 在复数域上有 n 个根.(这是代数基本定理的另一种说法.)

2° 若两个次数不大于 n 的多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 对于自变数的 $n+1$ 个不同的值都有相同的值,那么它们恒等.

3° 拉格朗日插值公式　次数不超过 n 的多项式 $P_n(x)$ 对于 x 的 $n+1$ 个不同取值 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 有 $n+1$ 个值 $y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}$,这个多项式便被唯一地确定,其表达式是

$$P_n(x) = y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)(x_1-x_{n+1})} + y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)(x_2-x_{n+1})} + \cdots + y_{n+1}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_n)}.$$

2.6 有穷数列及其求和

依照某种规则排列着的一列数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为有穷数列,其中每一个数称为该数列的项.

1. 等差数列

形如 $a_1, a_1+d, a_1+2d, \cdots, a_1+(n-1)d$ (d 为常数)的数列叫等差数列.其中 d 为公差.等差数列的和为

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

等差中项　$$a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}\quad(k>1).$$

2. 等比数列

形如 $a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots, a_1q^{n-1}$($q$ 为常数)的数列叫等比数列,其中 q 为公比.等比数列的和为

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_nq}{1-q}.$$

等比中项 $$a_k = \pm\sqrt{a_{k-1}a_{k+1}} \quad (a_{k-1}a_{k+1} > 0).$$

3. 调和数列

如果数列 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \cdots, \frac{1}{a_n}$ 是等差数列,则数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 叫做调和数列.

调和中项 $$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1} + a k + 1}.$$

4. 高阶等差数列

设有一数列

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$
第一次差(d_1)	$a_2 - a_1 = \Delta a_1$	$a_3 - a_2 = \Delta a_2$	$a_4 - a_3 = \Delta a_3$	$a_5 - a_4 = \Delta a_4$		$\cdots$
第二次差(d_2)		$\Delta a_2 - \Delta a_1 = \Delta^2 a_1$	$\Delta a_3 - \Delta a_2 = \Delta^2 a_2$	$\Delta a_4 - \Delta a_3 = \Delta^2 a_3$		$\cdots$
第三次差(d_3)			$\Delta^2 a_2 - \Delta^2 a_1 = \Delta^3 a_1$	$\Delta^2 a_3 - \Delta^2 a_2 = \Delta^3 a_2$		$\cdots$
$\cdots$			$\cdots$			

其中 $$\Delta^k a_i = \Delta^{k-1}a_{i+1} - \Delta^{k-1}a_i.$$

如果做了 r 次,这时 $\Delta^r a_i$ 彼此全都相等,以后的 $\Delta^{r+1}a_i$ 全都为零,则称原来的数列 $a_1, a_2, \cdots$ 为 r 阶等差数列(例如,等差数列 $a_1, a_1+d, a_1+2d, \cdots, a_1+(n-1)d$ 就是一阶等差数列).通项公式($n > r$)

$$a_n = a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}d_2 + \cdots + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)}{r!}d_r.$$

前 n 项和

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2!}d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}d_2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r)}{(r+1)!}d_r.$$

5. 某些数列的前 n 项和

1° $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

2° $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

3° $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

4° $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

5° $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$.

6° $1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$.

7° $1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$.

8° $1^8+2^8+3^8+\cdots+n^8=\frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$.

9° $1^9+2^9+3^9+\cdots+n^9=\frac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)$.

10° $1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+n^{10}=\frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)$.

一般,若

$$\sum_{k=1}^{n}k^p = a_1n^{p+1}+a_2n^p+a_3n^{p-1}+\cdots+a_{p+1}n,$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}k^{p+1} = \frac{p+1}{p+2}a_1n^{p+2}+\frac{p+1}{p+1}a_2n^{p+1}+\frac{p+1}{p}a_3n^p+\cdots+\frac{p+1}{2}a_{p+1}n^2+\left[1-(p+1)\sum_{k=1}^{p+1}\frac{a_k}{(p+3-k)}\right]n.$$

11° $1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n=\begin{cases}\frac{1}{2}(n+1), & n\text{ 为奇数},\\ -\frac{1}{2}n, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

12° $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$.

13° $1^3-2^3+3^3-\cdots+(-1)^{n-1}n^3=\begin{cases}\frac{1}{4}(2n-1)(n+1)^2, & n\text{ 为奇数},\\ -\frac{1}{4}n^2(2n+3), & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

14° $1^4-2^4+3^4-\cdots+(-1)^{n-1}n^4=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)(n^2+n-1)$.

15° $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$.

16° $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

17° $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

18° $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

19° $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

20° $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

21° $1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$

$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.

22° $\sum_{j=1}^{n} j(j+1)\cdots(j+k) = \frac{1}{k+2}\frac{(n+k+1)!}{(n-1)!}$.

23° $\sum_{j=1}^{n} j(j+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$.

24° $\sum_{j=1}^{n} j(j+1)^2(j+2) = \frac{1}{10}n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$.

25° $\sum_{j=1}^{n} j(n^2-j^2) = \frac{1}{4}n^2(n^2-1)$.

26° $\sum_{j=1}^{n} 2^j j(j+1) = 2^{n+1}(n^2-n+2)-4$.

27° $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

28° $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

29° $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$= \frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$.

30° $\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{(j+1)(j-1)} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2-1} = \frac{3}{4}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}$.

31° $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

32° $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(3j-2)(3j+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

33° $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)} = \frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$.

34° $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(3j-2)(3j+1)(3j+4)} = \frac{1}{24}-\frac{1}{6(3n+1)(3n+4)}$.

35° $\sum_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{j(j+1)(j+2)} = \frac{3}{4}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

36° $\sum_{j=1}^{n} \frac{j+2}{j(j+1)(j+3)} = \frac{29}{36}-\frac{1}{n+3}-\frac{3}{2(n+2)(n+3)}-$

$\frac{4}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$.

37° $\sum_{j=1}^{n} \frac{j2^{j-1}}{(j+1)(j+2)} = \frac{2^n}{n+2}-\frac{1}{2}$.

38° $\sum_{j=1}^{n} \frac{j^2 4^j}{(j+1)(j+2)} = \frac{2}{3}+\frac{(n-1)4^{n+1}}{3(n+2)}$.

39° $\sum_{j=1}^{n}\frac{j+2}{j(j+1)2^j}=1-\frac{1}{(n+1)2^n}$.

40° $\sum_{j=1}^{n}\frac{2j+3}{j(j+1)3^j}=1-\frac{1}{(n+1)3^n}$.

41° $\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}2^j}{[2^j+(-1)^j][2^{j+1}+(-1)^{j+1}]}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}\right]$.

42° $\sum_{j=1}^{n}\frac{b(b+1)\cdots(b+j-1)}{a(a+1)\cdots(a+j-1)}=\frac{1}{b-a+1}\left[\frac{b(b+1)\cdots(b+n)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}-b\right]$.

3 分式与根式

3.1 比和比例

1. 比

比是两个数(量)的商.反映将后一数(量)作为单位时,前一数(量)占后一数(量)的份额.a 与 b 的比(或 a 比 b)记为

$$a:b \quad 或 \quad \frac{a}{b},$$

其中 a 称为比的前项,b 称为比的后项.

2. 比例

比的等式(两个比相等),或这一比以另一比为“例”.记为

$$a:b=c:d \quad 或 \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

其中 a,c 称为比例的前项,b,d 称为比例的后项;a,d 称为比例的外项,b,c 称为比例的内项.

3. 比例的性质

1° 约化 设 $p\neq0$,由 $a:b=c:d$ 可推出

$$ap:bp=c:d;\quad ap:b=cp:d;$$

$$\frac{a}{p}:\frac{b}{p}=c:d;\quad \frac{a}{p}:b=\frac{c}{p}:d.$$

2° 交叉积 由 $a:b=c:d$ 有 $ad=bc$.

3° 项的交换 由 $a:b=c:d$ 得

$a:c=b:d$ (更比定理); $d:b=c:a$; $d:c=b:a$ (反比定理).

4° 衍生比例 由 $a:b=c:d$ 得

$(a+b):a=(c+d):c$ (合比定理);

$(a+b):b=(c+d):d$;

$(a-b):a=(c-d):c$ (分比定理);

$(a-b):b=(c-d):d$;

$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$（合分比定理）；

$(pa\pm qb):(ra\pm sb)=(pc\pm qd):(rc\pm sd)$.

5° 比例因子　由 $a:b=c:d$ 得

$$a=pc,\quad b=pd.$$

p 称为比例因子.

6° 连比例(有相同内项的比例)　$a:b=b:c$.

7° 比例中项　由 $a:x=x:b$，$ab\geqslant 0$，得到 $x=\sqrt{ab}$. x 称为 a 和 b 的比例中项或几何平均值.

8° 调和连比例　由 $(a-x):(x-b)=a:b$，得

$$x=\frac{2ab}{a+b},\quad \text{即}\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

9° 比例链　若几个比相等　$a:a_1=b:b_1=c:c_1=\cdots$，可写为比例链

$$a:b:c\cdots=a_1:b_1:c_1:\cdots.$$

链式中等号两端不能解释为接连相除的商.事实上,比例链只是一串比例式的缩写而已,它又可以重新排列为很多单个比例,如

$$a:b=a_1:b_1,\ b:c=b_1:c_1,\ a:c=a_1:c_1,\ b:d=b_1:d_1.$$

10° 等比公式　若 $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3=\cdots=a_n:b_n$，则

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\cdots+\lambda_nb_n}=\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}.$$

其中 λ_i 为一组任意不全为零的常数，b_i 都不等于零($i=1,2,\cdots,n$).

4. 解比例式

$a:b=c:d$ 中任意一项可由其他三项来表示.即

由　$x:b=c:d$　得　$x=\dfrac{bc}{d}$;

由　$a:x=c:d$　得　$x=\dfrac{ad}{c}$;

由　$a:b=x:d$　得　$x=\dfrac{ad}{b}$;

由　$a:b=c:x$　得　$x=\dfrac{bc}{a}$.

5. 两个变数(量)之间的正比、反比关系

1° 正比　若变数(量) y 与变数(量) x 有着关系式 $y=cx$ 或 $\dfrac{y}{x}=c$，c 为常数.则称 y 与 x 成正比，还可记为 $y\propto x$.

若 $x\propto y$，又 $y\propto z$，则 $x\propto z$.

2° 反比　若变数(量) y 与变数(量) x 有着关系式 $y=\dfrac{c}{x}$ 或 $yx=c$，c 为常数.则称 y 与 x 成反比，还可记为 $y\propto\dfrac{1}{x}$.

当 y 与 x 成正比时，y 的一系列取值 $y_1, y_2, y_3, \cdots$ 与 x 的一系列对应值 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 有相同的比值.

当 y 与 x 成反比时，y 的一系列取值 $y_1, y_2, y_3, \cdots$ 与 x 的一系列对应值 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 有相同的乘积.

3° 变数(量) y 与变数(量) x 和 z 的关系　若 z 固定，则 y 与 x 成正比；若 x 固定，则 y 与 z 成正比，此时，y 与 xz 成正比.

3.2 有理分式

1. 有理分式

两个多项式的比 $\frac{P(x,y,\cdots,z)}{Q(x,y,\cdots,z)}$ 叫做有理分式，又叫代数分式，简称为分式. 比的前项是分子，比的后项是分母. 作为分母的多项式 $Q(x,y,\cdots,z)$ 不能是零多项式(即不能恒等于零).

多项式 $P(x,y,\cdots,z)$ 可以看成分母为1的有理分式.

所有使有理分式的分母不为零的(在已知数域内的)自变数值组形成的集合，叫做(在已知域上讨论的)有理分式的定义域，即自变数容许值组的集合.

2. 有理分式的恒等

1° 两个分式对于所有自变数的容许值组都相等，即

$$\frac{P(x,y,\cdots z)}{Q(x,y,\cdots z)}=\frac{P_1(x,y,\cdots z)}{Q_1(x,y,\cdots z)},$$

其充分必要条件是恒等式

$$P(x,y,\cdots,z)Q_1(x,y,\cdots,z)\equiv P_1(x,y,\cdots,z)Q(x,y,\cdots,z)$$

对于给定数域内任意自变数值组都成立.

2° 有理分式的分简　任何有理分式 $\frac{P(x,y,\cdots,z)}{Q(x,y,\cdots,z)}$ 都有与它恒等的既约分式，即

$$\frac{p(x,y,\cdots,z)}{q(x,y,\cdots,z)}=\frac{P(x,y,\cdots,z)}{Q(x,y,\cdots,z)}.$$

所谓既约分式，是指其分子和分母没有任何公(多项式)因式，即分子和分母是互素多项式.

3° 延拓原理　既约分式的定义域包含了原来分式的定义域，即增加了那些使分母 $Q(x,y,\cdots,z)$ 等于零而分母 $q(x,y,\cdots,z)$ 不等于零的自变数值组. 为了使得彼此恒等的这两个有理分式有相同的定义域，约定采用既约分式的定义域，这是原来分式定义域的拓宽，叫延拓原理.

3. 分式的运算与恒等变形

1° 加、减法

$$\frac{P}{Q}\pm\frac{M}{N}=\frac{PN\pm QM}{QN}.$$

式中公分母取各分母的最低公倍式则更适宜.

2° 乘、除法

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{M}{N}=\frac{PM}{QN},\quad \frac{P}{Q}\div\frac{M}{N}=\frac{P}{Q}\times\frac{N}{M}=\frac{PN}{QM}.$$

加法、乘法均满足交换律、结合律和分配律. 除式的分母不能恒等于零.

3° 恒等变形举例

例如,化简

$$R(x,y,z)=\left(\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{yx}+\frac{1}{xz}}+(x+y+z)^2.$$

因为

$$\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3yz}{y+z}$$
$$=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x(y+z)},$$

$$\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{yx}+\frac{1}{xz}}=\frac{2x(y+z)}{x+y+z},$$

所以

$$R(x,y,z)=\frac{2(x^3+y^3+z^3-3xyz)}{x+y+z}+(x+y+z)^2$$
$$=2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)+(x+y+z)^2$$
$$=3(x^2+y^2+z^2).$$

3.3 部分分式

1. 真分式

考虑一元有理分式

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0},$$

这里 $Q(x)\neq0, a_n\neq0, b_m\neq0$. 当 $n<m$ 时称为真分式;$n\geqslant m$ 时称为假分式. 假分式可以用多项式的带余式的除法求出整式部分 $\Phi(x)$,再加上真分式$\frac{r(x)}{Q(x)}$.

2. 部分分式

1° 任一既约真分式都可唯一地(在实数域上)分解成形如$\frac{A}{(x-\alpha)^k}$或$\frac{Fx+G}{(x^2+px+q)^l}$(其中 $p^2-4q<0$)的基本真分式之和,这些基本真分式称为原来那个既约真分式的部分分式. 这个分解过程称为部分分式展开.

2° 一般地,如果真分式$\frac{A(x)}{P(x)Q(x)}$的 $P(x)$与 $Q(x)$是互素的整式,则可唯一地

分解为

$$\frac{A(x)}{P(x)Q(x)}=\frac{A(x)M(x)}{P(x)}+\frac{A(x)N(x)}{Q(x)}=\frac{B(x)}{P(x)}+\frac{C(x)}{Q(x)},$$

右端两个分式都是真分式,也称原来分式的部分分式.

3° 若分母中含单因式$(x-\alpha)$,$(x-\beta)$,…,则对应部分分式为

$$\frac{N(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)G(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)}+\frac{B}{(x-\beta)}+\frac{F(x)}{G(x)}\quad(\alpha\neq\beta).$$

例如,$\frac{x^2+3}{x(x-2)(x^2+2x+4)}$的部分分式为

$$\frac{-\frac{3}{8}}{x}+\frac{\frac{7}{24}}{x-2}+\frac{\frac{1}{12}x+\frac{7}{12}}{x^2+2x+4}.$$

4° 若分母中有k重因式$(x-\alpha)$,即$(x-\alpha)^k$,则对应的部分分式是

$$\frac{N(x)}{(x-\alpha)^k}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

例如,$\frac{4x^3+12x^2+48x+108}{(x+1)^4}$的部分分式为

$$\frac{4}{x+1}+\frac{0}{(x+1)^2}+\frac{36}{(x+1)^3}+\frac{68}{(x+1)^4}.$$

5° 若分母中含有单重因式(x^2+px+q),这里$p^2-4q<0$.则对应的部分分式是$\frac{Fx+G}{x^2+px+q}$.

6° 若分母中含有k重因式(x^2+px+q),即$(x^2+px+q)^k$,这里$p^2-4q<0$.则对应的部分分式是k个分式:

$$\frac{F_1x+G_1}{x^2+px+q}+\frac{F_2x+G_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{F_kx+G_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

3.4　根　　式

1. 算术根的有关计算法则

1° 幂指数与根指数相约的法则

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}\quad(a\geqslant0,m,n,p\in\mathbf{N},n>1).$$

2° 积的开方法则

$$\sqrt[n]{\alpha\beta}=\sqrt[n]{\alpha}\cdot\sqrt[n]{\beta}\quad(\alpha,\beta\geqslant0,n\in\mathbf{N},n>1).$$

3° 分数的开方法则

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}\quad(\alpha\geqslant0,\beta>0,n\in\mathbf{N},n>1).$$

4° 幂的开方法则

$$\sqrt[n]{\alpha^m}=(\sqrt[n]{\alpha})^m\quad(\alpha\geqslant0,m,n\in\mathbf{N},n>1).$$

5° 根式的开方法则

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (a \geqslant 0, m, n \in \mathbf{N}, m, n > 1).$$

6° 因式移出或移入根号的法则

$$\sqrt[n]{\alpha^n\beta} = \alpha\sqrt[n]{\beta}, \quad \alpha\sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha^n\beta}$$
$$(\alpha, \beta \geqslant 0, n \in \mathbf{N}, n > 1).$$

7° 通根指数的法则

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[nk_1]{\alpha^{k_1}} = \sqrt[p]{\alpha^{k_1}} \quad (\alpha \geqslant 0, n \in \mathbf{N}, n > 1),$$
$$\sqrt[m]{\beta} = \sqrt[mk_2]{\beta^{k_2}} = \sqrt[p]{\beta^{k_2}} \quad (\beta \geqslant 0, m \in \mathbf{N}, m > 1),$$

其中 p 是 n 与 m 的最小公倍数，$p = nk_1 = mk_2$.

2. **根式的化简**

将根式化为最简根式，应将被开方数的指数与根指数的公因数约去；应对每一个因式的指数与根指数作带余除法，以确定移出根号的因式的指数与还留在根号内的因式的指数；需要对被开方的分式的分母进行有理化的恒等变形，这归结为寻求共轭因式问题.

如果 M 与 N 是两个不恒等于零的含有根式的代数式，乘积 MN 是有理式，则称 M 与 N 互为有理化因式，或共轭因式. 通常共轭因式有

1° $M = \sqrt[n]{X^pY^q}$ 与 $N = \sqrt[n]{X^{n-p}Y^{n-q}}$

2° $M = P\sqrt{X} + q\sqrt{Y}$ 与 $N = p\sqrt{X} - q\sqrt{Y}$.

3° $M = \sqrt[p]{X} - \sqrt[q]{Y}$ 与 $N = \sqrt[n]{X^{n-1}} + \sqrt[n]{X^{n-2}}\sqrt[n]{Y} + \sqrt[n]{X^{n-3}}\sqrt[n]{Y^2} + \cdots + \sqrt[n]{Y^{n-1}}$，这里 n 是 p 与 q 的最小公倍数.

4° $M = \sqrt[p]{X} + \sqrt[q]{Y}$ 与 $N = \sqrt[2k]{X^{2k-1}} - \sqrt[2k]{X^{2k-2}}\sqrt[2k]{Y} + \cdots + \sqrt[2k]{X}\sqrt[2k]{Y^{2k-2}} - \sqrt[2k]{Y^{2k-1}}$，这里 $2k$ 是 p 与 q 的最小公倍数.

5° $M = \sqrt[p]{X} + \sqrt[q]{Y}$ 与 $N = \sqrt[2k+1]{X^{2k}} - \sqrt[2k+1]{X^{2k-1}}\sqrt[2k+1]{Y} + \cdots - \sqrt[2k+1]{X}\sqrt[2k+1]{Y^{2k-1}} + \sqrt[2k+1]{Y^{2k}}$，这里 $2k+1$ 是 p 与 q 的最小公倍数.

6° $M = P_1(x) + P_2(x)\sqrt{X}$ 与 $N = P_1(x) - P_2(x)\sqrt{X}$.

3. **根式的运算**

1° 根式的加法、减法　要合并同类根式.

2° 根式的乘法、除法　要化成同次根式，使被开方数(式)相乘除，注意使分母有理化.

3° 根式的乘方、开方　按算术根乘方、开方计算法则.

4° 复合二次根式变形公式

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

其中 $A > 0, B > 0$，且 $A^2 > B$.

当 $A^2 - B$ 为完全平方时，公式右端就只剩单层根号.

5° $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ 可设为 $x \pm \sqrt{y}$，两式均立方，分别比较整式和根式部分，设法算出 x 和 y.

3.5 指数式与对数式

1. 幂概念的推广

下列幂指数的运算是在有理数域上进行的.

1° 零指数 $a^0=\dfrac{a^n}{a^n}=a^{n-n}=1\quad(a\neq 0)$.

适合 $$a^0a^m=a^m,(a^0)^m=a^{0m}=(a^m)^0.$$

2° 负指数 $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=a^{-(m-n)}(a\neq 0,m>n)$.

适合 $$a^n\cdot a^{-n}=a^0=1,a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

3° 分数指数 $a=a^{\frac{n}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^n$,则 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\quad(a\geqslant 0)$.

$$a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

$$a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}\cdot a^{rq}}=\sqrt[qs]{a^{ps+rq}}=a^{\frac{ps+rq}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^p})^r}=\sqrt[qs]{a^{pr}}=a^{\frac{pr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}.$$

$$a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

当 $a<0$ 时,只能讨论这样的指数为分数的幂:$a^{\frac{m}{n}}$ 中 $\dfrac{m}{n}$ 为既约分数,且 $n=2k+1$(奇数).

2. 指数集的进一步扩张

1° 在指数仅限于有理数的情形下,不可能完备地定义已知底数和幂的值求指数的运算.一个很简单的例子是 $2^x=3$ 中的 x 若为有理数 $x=\dfrac{p}{q}$,则 $2^p=3^q$,而2与3互素,不可能有这样的自然数 p 与 q 使等式成立.

2° 设 α 是正无理数,a 是正实数,α_n^- 和 α_n^+ 分别是 α 的精确到 $1/10^n$ 的不足近似值和过剩近似值,规定 a^α 是 $a^{\alpha_n^-}$ 与 $a^{\alpha_n^+}$ 的共同极限

$$a^\alpha=\lim_{n\to+\infty}a^{\alpha_n^-}=\lim_{n\to+\infty}a^{\alpha_n^+}.$$

规定 $$a^{-\alpha}=\frac{1}{a^\alpha}.$$

3° 在初等数学中,不能考虑负实数 a 的无理数指数幂.因为当 $a<0$ 时,$\lim\limits_{n\to+\infty}a^{\alpha_n}$ 不存在.例如,$(-2)^{\sqrt{2}}$ 用 $(-2)^{1.4},(-2)^{1.41},(-2)^{1.414},\cdots$ 来逼近,但 $(-2)^{1.4}=(-2)^1\cdot(-2)^{0.4}=(-2)\cdot\sqrt{(-2)^5}$ 在实数域内无意义.

4° 有理数指数幂的运算规则经过极限运算可以推广到无理数指数幂.

3. 对数式

(1) 对数存在定理 如果正实数 a 不等于1,那么对于任一给定的正实数 N,

有唯一的实数 α，使 a 的 α 次幂等于 N，即 $a^{\alpha}=N$.

(2) 对数的定义　如果不等于 1 的正实数 a 的某次乘方的幂等于正实数 N，则称这个幂的指数是以 a 为底的 N 的对数，记为 $\log_a N$.

按这个定义和记法，有

$$N=a^{\log_a N}.$$

零和负数在实数域内没有对数.

(3) 对数式的运算公式

1° $\log_a NM=\log_a N+\log_a M\quad(a>0,a\neq1,N>0,M>0)$.

2° $\log_a\dfrac{N}{M}=\log_a N-\log_a M\quad(a>0,a\neq1,N>0,M>0)$.

3° $\log_a N^k=k\log_a N\quad(a>0,a\neq1,N>0)$.

4° 换底公式　$\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}\quad(a>0,a\neq1,b>0,b\neq1,N>0)$.

因此 $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$. 换底公式中的 $\dfrac{1}{\log_b a}$ 称为由 $\log_a N$ 转换为 $\log_b N$ 的模数.

(4) 常用对数和自然对数.

以 $a=10$ 为底的对数称为常用对数(布里格(Briggs)对数)，记 $\log_{10}$ 为 lg.

以 e = 2.718281828459… 为底的对数称为自然对数(纳皮尔(Napier)对数)，记 $\log_e$ 为 ln.

两者的关系是 $\lg N=\dfrac{\ln N}{\ln 10}=\ln N\lg e$. 其中 $\dfrac{1}{\ln 10}=\lg e=M_{10}=0.43429\cdots$ 称为常用对数的模数. 而 $\ln N=\lg N\ln 10$，其中 $\ln 10=\dfrac{1}{M_{10}}=2.30259\cdots$ 称为自然对数的模数.

(5) 对数式的恒等变形

例如，$\log_{a^k}a^l=\log_{a^k}(a^k)^{\frac{l}{k}}=\dfrac{l}{k}$.

例如，若已知 $\log_a N,\log_b N,\cdots,\log_k N\quad(N\neq1)$，则

$$\log_{ab\cdots k}N=\frac{1}{\log_N(ab\cdots k)}=\frac{1}{\log_N a+\log_N b+\cdots+\log_N k}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{1}{\log_a N}+\dfrac{1}{\log_b N}+\cdots+\dfrac{1}{\log_k N}}.$$

4　方程与不等式

4.1　方程的概念

1. 方程的基本术语

(1) 方程　形状为 $F_1(x,y,\cdots,z)=F_2(x,y,\cdots,z)$ 的等式叫做方程，其中

$F_1(x,y,\cdots,z)$与$F_2(x,y,\cdots,z)$是在它们定义域的公共部分里所共同研究的两个函数(解析表达式).

(2) 方程的解　是在方程的定义域中使

$$F_1(x,y,\cdots,z)=F_2(x,y,\cdots,z)$$

成为真命题的一组数值 $x=a,y=b,\cdots,z=c$.

方程的解集　方程全体解的集合,可以记为

$$S=\{(x,y,\cdots,z)\mid x\in X,y\in Y,\cdots,z\in Z,\text{并且}\ F_1(x,y,\cdots,z)=F_2(x,y,\cdots,z)\}.$$

(3) 同解方程(两个方程等价)　在给定定义域上的两个方程,如果有相同的解集 S,则称这两个方程是同解方程,或称这两个方程等价.

在不同数域上,可能改变这种同解性.

(4) 方程的同解变形　一个方程用它的同解方程来代替,叫做方程的同解变形.例如

1° 若在方程的定义域上,$f_1\equiv F_1,f_2\equiv F_2$,则

$$F_1=F_2\Leftrightarrow f_1=f_2;$$

2° 若 F 在方程的定义域上有意义,则

$$F_1=F_2\Leftrightarrow F_1+F=F_2+F;$$

3° 若 F 在方程的定义域上有意义,且不为零,则

$$F_1=F_2\Leftrightarrow F_1F=F_2F.$$

(5) 方程的增根　将方程变形时,使定义域扩大了,新方程的解集比原方程的解集扩大,增加了不适合原方程的解,应舍去.

(6) 方程的遗根　若方程变形后,新方程的解集比原方程的解集缩小了,这样被遗漏的适合原方程的解,应找回.

4.2　方程的解法

1. 一元线性方程

一元线性方程(一个未知数的一次方程)为

$$ax+b=0,$$

其中 a,b 是给定数域里的数.

1° 当 $a\neq0$ 时方程有唯一解 $x=-\dfrac{b}{a}$,这个解也属于给定的数域;

2° 当 $a=0,b\neq0$ 时,方程无解;

3° 当 $a=0,b=0$ 时,方程有无数个解,即给定数域中的任何数.

2. 一元二次方程

(1) 一元二次多项式

$$P(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

(2) 一元二次方程

$$P(x)=ax^2+bx+c=0.$$

分解因式

$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]=0.$$

得两解

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(3) 根的判别式　$\Delta=b^2-4ac$.

1° 当$\Delta>0$时，一元二次多项式(方程)有两个不等实根；

2° 当$\Delta<0$时，没有实根；

3° 当$\Delta=0$时，有二重实根.

(4) 在复数域上，当 $\Delta<0$ 时，有一对共轭复根 $x_1=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$，$x_2=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

(5) 根与系数的关系

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

3. 一元三次方程

一元三次方程的一般形式为

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\quad(a\neq0).$$

(1) (三次)二项方程　$x^3+d=0$.

其最特殊的形式是　$x^3-1=0$.

分解因式

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

解得

$$x_1=1,\quad x_2=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\omega_1,\quad x_3=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\omega_2.$$

类似地可以解　$x^3+1=0$.

对于　$x_3+d=0$，可得

$$x_1=\sqrt[3]{-d},x_2=\sqrt[3]{-d}\,\omega_1,x_3=\sqrt[3]{-d}\,\omega_2.$$

(2) 一元三次方程经减根变换 $x=y-\frac{b}{3a}$，可化为缩减式

$$y^3+3py+2q=0,$$

其中

$$3p=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2};\quad 2q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}.$$

(3)对于缩减式 $y^3+3py+2q=0$，设想其解 $y=u+v$，应满足

$$(u+v)^3+3p(u+v)+2q=0,$$

即

$$u^3+v^3+2q+(u+v)(3uv+3p)=0.$$

对于 u,v 附加上条件 $3uv+3p=0$，得关于 u 和 v 应满足的方程组

$$\begin{cases} u^3+v^3=-2q, \\ uv=-p, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} u^6+2u^3v^3+v^6=4q^2, \\ 4u^3v^3=-4p^3. \end{cases}$$

上下相减得
$$(u^3-v^3)^2=4q^2+4p^3,$$

故
$$\begin{cases} u^3-v^3=\pm 2\sqrt{q^2+p^3}, \\ u^3+v^3=-2q. \end{cases}$$

解得
$$u^3=-q\pm\sqrt{q^2+p^3}, \quad v^3=-q\mp\sqrt{q^2+p^3}.$$

由条件 $u^3+v^3=-2q$ 及 $uv=-p$ 可知,只需考虑 $u^3=-q+\sqrt{q^2+p^3}$,$v^3=-q-\sqrt{q^2+p^3}$这一组解(或 $u^3=-q-\sqrt{q^2+p^3}$,$v^3=-q+\sqrt{q^2+p^3}$).

开立方又各得3个解:

$$u_1=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}, \quad u_2=u_1\omega_1, \quad u_3=u_1\omega_2;$$

$$v_1=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}, \quad v_2=v_1\omega_1, \quad v_3=v_1\omega_2.$$

这样可配成9个解 $y=u_i+v_j \quad (i=1,2,3;j=1,2,3)$,但实际上由附加条件 $u_iv_j=-p$,且因 $\omega_1\omega_2=1$,所以只有 u_1v_1,u_2v_3,u_3v_2 能满足.

(4) 判别式 q^2+p^3 有3种情形

1° $q^2+p^3>0$,可得一实根 y_1,二复根(共轭)y_2 和 y_3:

$$y_1=u_1+v_1=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},$$

$$y_2=u_1\omega_1+v_1\omega_2, \quad y_3=u_1\omega_2+v_1\omega_1.$$

2° $q^2+p^3=0$,可解得三实根(其中有二根相等):

$$y_1=2\sqrt[3]{-q}, \quad y_2=y_3=-\sqrt[3]{-q}.$$

3° $q^2+p^3<0$,引入三角函数

$$\cos\varphi=\frac{q}{(p\sqrt{-p})}, \quad 0<\varphi<\pi,$$

也可解得3个实根.

$$y_1=2\sqrt{-p}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$y_2=2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$y_3=2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right).$$

4. 一元四次方程

1° 标准形式为

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

作减根变换 $x=z-\frac{a}{4}$,得缩减式

$$z^4+pz^2+qz+r=0,$$

其中

$$p=b-\frac{3a^2}{8},$$

$$q=c-\frac{ab}{2}+\frac{a^3}{8},$$

$$r=d-\frac{ac}{4}+\frac{a^2b}{16}-\frac{3a^4}{256}.$$

2° 预解式

$$y^3+2py^2+(p^2-4r)y-q^2=0,$$

其根为 y_1,y_2,y_3,满足 $y_1\cdot y_2\cdot y_3=q^2>0$,可知 y_1,y_2,y_3 有3种情形(均为正实数,一正两负实数,一实数两共轭复数).

3° 缩减式的4个根

$$z_1=\frac{1}{2}(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}),\quad z_2=\frac{1}{2}(-\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}),$$

$$z_3=\frac{1}{2}(\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}),\quad z_4=\frac{1}{2}(-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}).$$

有3种情形:4个实根,两对共轭复根,两实根及一对共轭复根.并应使

$$\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3}=-\frac{q}{8}.$$

最终由 $x=z-\dfrac{a}{4}$ 算出 x_1,x_2,x_3,x_4.

4° (四次)二项方程 $x^4-1=0$,

可简单地由因式分解 $(x^2+1)(x+1)(x-1)=0$,

得 $x_1=1,x_2=-1,x_3=\mathrm{i},x_4=-\mathrm{i}$;

而 $x^4+1=0$,

经因式分解

$$\begin{aligned}x^4+2x^2+1-2x^2&=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2\\&=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=0\end{aligned}$$

解得

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}),\qquad x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}),$$

$$x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}),\quad x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\mathrm{i}).$$

5. 一元 n 次方程

一元 n 次方程的一般形式为

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0.$$

1° 余数定理 $P(x)$用 $x-a$ 除,其余数为 $P(a)$,即

$$\frac{P(x)}{x-a}=Q(x)+\frac{P(a)}{x-a}.$$

2° 若$P(x)$被 $x-a$ 所除尽,则 $x=a$ 为方程 $P(x)=0$ 的一个根. n 次方程有 n

个根.

3° 若多项式$P(x)$的因式分解式是

$$P(x)=P_1(x)P_2(x)\cdots P_k(x),$$

则解方程 $P(x)=0$,只要解方程 $P_1(x)=0, P_2(x)=0,\cdots, P_k(x)=0$,再将这些方程的各个根(解)集合起来,便得到所给方程的根的集(解集).

4° 根与系数的关系　若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为方程$P(x)=0$ 的 n 个根,则

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=(-1)^1\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=(-1)^2\dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \vdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

5° 整系数方程

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

如果有有理根$\dfrac{p}{q}$,其 p 与 q 互素,则 a_0 能被 p 整除,而 a_n 能被 q 整除.

6° (推论1)整系数多项式(整系数方程)的每个整根是常数项的因数.

7° (推论2)首项系数是1的整系数多项式(整系数方程)的每个有理根是整数.

8° 在方程$P(x)=0$中,若以 $x=\dfrac{y}{k}$代入,得出 $F(y)=0$ 的各根相应都为 $P(x)=0$ 各根的 k 倍.

9° 在方程 $P(x)=0$ 中,若以 $x=-y$ 代入,得出 $F(y)=0$ 的各根相应都和 $P(x)=0$ 的各根的绝对值相等,而符号相反.

10° 在方程$P(x)=0$中,若以 $x=y+h$ 代入,得出 $F(y)=0$ 的各根相应都等于 $P(x)=0$ 的各根减 h.

11° 在多项式$P(x)$中,若相邻两项系数符号正负相反,则称系数符号变更一次.笛卡儿(Descartes)符号定理指出:方程 $P(x)=0$ 中正根的数目不能超过 $P(x)$ 中系数符号变更的次数;负根的数目不能超过 $P(-x)$中系数符号变更的次数.

12° 若以实数$x=a, x=b$ 代入$P(x)$中,而 $P(a)$与 $P(b)$数值的符号相反,则$P(x)=0$中其值在 $x=a$ 与$x=b$ 之间的根必为奇数个(包括重根数).

13° 二项方程　$x^n-a=0$.

在复数域上,设 $a=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,则方程的 n 个根是

$$x=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

14° 复根的个数　若方程 $P(x)=0$ 各项的系数都是实数,则由笛卡儿符号定理可找到正负根(实根)至多各有多少个,再以方程的次数减这总数,其差额(若是

奇数则应加 1)就表明至少有这个数目的复根存在.

15° 综合除法 是依靠分离系数且随乘随加以求出多项式 $P(x)$除以$(x-a)$所得商式 $Q(x)$及余数 $P(a)$的方法.

16° 无理根的近似值 采用秦九韶法即霍纳(Horner)法.

17° 三项方程

$$ax^{2n}+bx^{n}+c=0 \quad (a\neq 0)$$

的根是
$$x=\sqrt[n]{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad (\text{共 }2n\text{ 个复根}).$$

双二次方程
$$ax^4+bx^2+c=0 \quad (a\neq 0)$$

是其特殊情形,
$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

18° 倒数方程

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+cx^2+bx+a=0.$$
即凡与首末两项一般远的两项,其系数都相等.它的任何一根不能为零,因为将 $x=0$代入,发现 $a=0$,但这时方程次数便没有 n 次.

如果 α 是上述方程的根,则其倒数$\frac{1}{\alpha}$也是它的根.因为

$$a\cdot\frac{1}{\alpha^n}+b\cdot\frac{1}{\alpha^{n-1}}+\cdots+b\cdot\frac{1}{\alpha}+a=\frac{a+b\alpha+\cdots+b\alpha^{n-1}+a\alpha^n}{\alpha^n}=0.$$

6. **分式方程和无理方程**

1° 既约分式方程

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0,$$
其解与 $P(x)=0$ 的解相同(方程等价).

2° 无理方程

$$F(x,\sqrt[n]{P(x)})=0,$$
其中 $F(x,y)$是变数 x 与 y 的多项式,$P(x)$是一元多项式.

常利用将方程两端乘同次方以消去根式.这样得到的有理方程在复数域上是同原方程同解(等价)的,而在实数域上则不然.

7. **指数方程和对数方程**

(1) 指数方程

1° 最简方程 $a^x=c(a>0$ 且 $a\neq 1)$,当 $c>0$ 时有唯一解 $x=\log_a c$;当 $c\leqslant 0$ 时无解.

2° 形如 $F(a^x)=0$ 的方程,其中 $F(x)$是代数式.如方程 $\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})=m$.

(2) 对数方程

最简方程 $\log_a x=c(a>0,a\neq 1)$对于任何实数 c 有唯一解 $x=a^c$.

(3) 在用初等方法解指数方程与对数方程时,常常将两端对数化或乘幂化,这可能改变式子的定义域,而破坏方程的等价性(同解性).

1° 方程$f(x)=\varphi(x)$与 $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}(a>0,a\neq 1)$同解.

2° 若$f(x)>0,\varphi(x)>0$,则方程 $f(x)=\varphi(x)$与 $\log_a f(x)=\log_a\varphi(x)$同解;若$f(x),\varphi(x)$不能保持恒正,则取对数后可能失掉解.

3° 应用积、商、幂的对数公式时可能失掉解.

8. 方程组

(1) 二元线性方程组$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1,\\a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}$的初等解法有代入法,互等法,加减消元法.

(2) 二元二次方程组的几种特殊情形

1° 一个方程是二次的,另一个是线性的方程,可用代入法解.

2° 纯二次方程(无 xy 项),可用加减消元法解.

3° 方程组中只含 xy 二次项,可用加减消元法及代入法解.

4° 方程组为两个齐次二次方程时,可作变量代换 $y=xz$,化为 z 的二次方程.

4.3 不　等　式

1. 不等式的概念

(1) 不等式　若两个解析表达式用符号 $<,\leqslant,>,\geqslant,\neq$之一联结,则称整个关系式为不等式.

如果这样的关系式不含变数,则该不等式就是一个确定的真命题或假命题.例如 $5+2>3$ 是一个真命题.

如果这样的关系式中至少含有一个变数,则当变数在式子的定义域中取不同值时,该不等式可以是真命题或假命题.

使不等式成为真命题的全体变数数值的集合叫做不等式的解集.

(2) 不等式的基本性质

1° 非对逆性　$A<B\Leftrightarrow B>A$.

2° 传递性　$A<B$ 且 $B<C\Rightarrow A<C$.

3° $A<B\Leftrightarrow B-A>0$(或 $A-B<0$).

4° 加法的单调性　$A<B\Rightarrow A+C<B+C$

5° 同向不等式可以两端分别相加

$$A<B \text{ 且 } C<D\Rightarrow A+C<B+D.$$

6° 乘法单调性

$$A<B\Rightarrow Am<Bm(m>0)\text{或 } Am>Bm\quad(m<0),$$

特别　$$A<B\Rightarrow -A>-B.$$

7° 异向不等式可以两端分别相减

$$A<B \text{ 且 } C>D\Rightarrow A-C<B-D.$$

8° 正数同向不等式可以两端分别相乘

$A<B$ 且 $C<D$,A,B,C,D 均为正数$\Rightarrow AC<BD$.

负数同向不等式两端相乘不等号反向.

$A < B$ 且 $C < D$，A,B,C,D 均为负数$\Rightarrow AC > BD$.

9° 正数不等式两端可以自乘同次方

$$A < B,\ A,B \text{ 是正数} \Rightarrow A^n < B^n,\ n \text{ 是自然数}.$$

10° 同号(两端同为正数或同为负数)不等式两端取倒数,则不等号反向

$$A < B \quad 且 \quad A,B \text{ 同号} \Rightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{B}.$$

(3)用不等式给出的数集

1° 数的区间　若实数 a,b 有关系 $a < b$,则

实数 x 的集 $a < x < b$ 叫开区间 (a,b);

实数 x 的集 $a \leqslant x \leqslant b$ 叫闭区间 $[a,b]$;

实数 x 的集 $a \leqslant x < b$ 叫半闭区间 $[a,b)$;

实数 x 的集 $a < x \leqslant b$ 叫半开区间 $(a,b]$.

2° 含有绝对值的不等式

$|x| < a\ (a>0) \Leftrightarrow -a < x < a$.

$|x| > a\ (a>0) \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$.

$|x| > a\ (a<0) \Leftrightarrow -\infty < x < +\infty$.

$|x-a| < b\ (b>0) \Leftrightarrow a-b < x < a+b$.

3° 含有 $-\infty$(负无穷大)或 $+\infty$(正无穷大)的不等式

所有实数的集合记为 $-\infty < x < +\infty$,或以开区间 $(-\infty,+\infty)$ 表示它.

大于(或小于)数 a 的所有实数的集合记为 $a < x < +\infty$(或 $-\infty < x < a$),或以开区间 $(a,+\infty)$(或 $(-\infty,a)$)表示之.

2. 绝对不等式

假若对于变数任意的容许值组,表达式 $F_1(x,y,\cdots,z)$ 和 $F_2(x,y,\cdots,z)$ 的值恒成立不等式 $F_1(x,y,\cdots,z) > F_2(x,y,\cdots,z)$(不等号也可以是 $\geqslant,<,\leqslant,\neq$),则称这个关系式为绝对不等式.下面是一些著名的例子:

1° 对于任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,下列不等式成立:

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

2° $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

3° $\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\right|$

$\leqslant |a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|$.

4° $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}$　(仅当 a_i 与 b_i 成比例时等号成立).

5° 若分数 $\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_n}{b_n}$ 的分母是正数,$\min\frac{a_i}{b_i}$ 与 $\max\frac{a_i}{b_i}$ 分别是各分数 $\frac{a_i}{b_i}$ 中的最小数和最大数,则

$$\min\frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots b_n} \leqslant \max\frac{a_i}{b_i}.$$

6°算术平均$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i=A$，几何平均$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G$，调和平均$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=H$之间的关系：$\min a_i\leqslant H\leqslant G\leqslant A\leqslant\max a_i$．这里需假设各$a_i$为正数．

7° 加权平均与$\min a_i,\max a_i$的关系：设k_i为任意正数，则

$$\min a_i\leqslant\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1+k_2+\cdots+k_n}\leqslant\max a_i.$$

8° 伯努利(Bernoulli)不等式　对$h>0$及对任何有理数$r>1$，成立

$$(1+h)^r>1+rh.$$

9° 柯西-布尼亚科夫斯基(Cauchy-Буняковский)不等式(或称柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式)　对于任意实数$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，成立不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

10° 算术平均数与均方根数

$$\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_n|}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

11° 切比雪夫(Чебышев)不等式　设$a_i,b_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，若$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，或$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n,b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则成立

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k}{n}}\cdot\sqrt[k]{\frac{b_1^k+b_2^k+\cdots+b_n^k}{n}}\leqslant\sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k+(a_2b_2)^k+\cdots+(a_nb_n)^k}{n}}.$$

12° 若$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$，则上述不等式的不等号$\leqslant$改为$\geqslant$.

13° 闵可夫斯基(Minkowski)不等式

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\quad(r>1),$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\quad(0<r<1),$$

其中$a_i,b_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

等号仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时成立.

当$r=2$时称为三角形不等式，表明三角形两边之和大于第三边.

14° 赫尔德(Hölder)不等式　设$a_i,b_i,\cdots,l_i(i=1,2,\cdots,n)$为正数，又$\alpha,\beta,\cdots,\lambda$为正数，且$\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^\alpha b_i^\beta\cdots l_i^\lambda\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^\beta\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}l_i\right)^\lambda.$$

等号仅当$\frac{a_k}{\sum a_i}=\frac{b_k}{\sum b_i}=\cdots=\frac{l_k}{\sum l_i}$时成立.

15° 设$a_i,b_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，又$k>0,k\neq1$，且满足$\frac{1}{k'}+\frac{1}{k}=1$或$(k-1)\cdot$

$(k'-1)=1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \quad (k>1),$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \quad (0<k<1).$$

等号仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时成立.

16° 詹森(Jensen)不等式 设 $a_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$且$0<r\leqslant s$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

3. **解不等式**

(1) 不等式的等价性(同解性)

1° 不等式 $F_1<F_2$ 与不等式 $F_1+\varphi<F_2+\varphi$ 等价,如果 φ 对前一不等式的变数的所有容许值组都有意义.

推论:任一被加数可以从不等号的一端移到另一端,并且变号.

2° 不等式 $F_1<F_2 \Leftrightarrow F_2>F_1$.

3° 若φ 对于不等式$F_1<F_2$ 的变数的所有容许值组都是正(负)的,则这不等式与 $\varphi F_1<\varphi F_2(\varphi F_1>\varphi F_2)$等价.

4° 不等式$\frac{F}{\Phi}>0$ 与不等式 $F\Phi>0$ 等价.

(2) 线性不等式

1° 一元一次不等式

$$ax+b>0.$$

若 $a>0$,有 $x>-\frac{b}{a}$;若 $a<0$,有 $x<-\frac{b}{a}$.

若 $a=0$,则当 $b>0$ 时有 $-\infty<x<+\infty$满足不等式;而当 $b\leqslant 0$ 时不等式无解.

2° 一元线性不等式组

$$a_1x+b_1>0, a_2x+b_2>0, \cdots, a_nx+b_n>0.$$

逐个解每一不等式,并求出这 n 个解集的交集.如果这个交集是空集,则不等式组矛盾,无解;如果这个交集非空,则它适合每一个不等式,成为这个不等式组的解.

3° 多元线性不等式组 其每个不等式的解集要借助解析几何及线性代数知识说明,所有解集的交集也是这样.

(3)一元二次不等式 一元二次三项式 $y=P(x)=ax^2+bx+c$ 的值的符号:

1° 当$\Delta>0$时,$y=P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$,这里规定 $x_1<x_2$,则 y 的符号由下表可知,一元二次不等式的解集(区间)由下表也可找到.

	$-\infty < x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < +\infty$
$x - x_1$	−	+	+
$x - x_2$	−	−	+
$y(a>0)$	+	−	+
$y(a<0)$	−	+	−

2° 当$\Delta = 0$时,$y = P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$,则当 $x \neq -\frac{b}{2a}$时 y 与 a 同号;$x = -\frac{b}{2a}$时 y 为 0.

3° 当$\Delta < 0$时,$y = P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$,则 y 的符号与 a 的符号相同.

这两种情形也可确定所给一元二次不等式是否有解.

(4)一元分式不等式　设一元分式不等式$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$(不等号也可取$\geqslant, <, \leqslant, \neq$),则由$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$与 $P(x)Q(x) > 0$ 等价,得出其解集.

(5)无理不等式(以含二次根式$\sqrt{\quad}$为例)

1° 无理不等式经适当变形成为$\sqrt{f(x)} > a$(或$< a$),

若 $a > 0$,应解$\begin{cases} f(x) > a^2 (\text{或} < a^2); \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$

若 $a = 0$,应解 $f(x) > 0$(或无解).

若 $a < 0$,应解 $f(x) \geqslant 0$(或无解).

2° 无理不等式经适当变形成为$\sqrt{f(x)} > g(x)$(或$< g(x)$),

应解$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases}$　$\left(\text{或}\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}\right)$

或解$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$

(6)绝对值不等式　需转化为不含绝对值的不等式.例如$|x+2| > |x-3|$,可找出区间分界点 −2 及 3,分段去绝对值讨论求解;也可两端平方去掉绝对值符号求解.

·经典数学卷·

附录 2

平面三角

编　者　陈传理
审校者　费澍生

目　录

1 三 角 函 数

1.1 角的度量与换算

1. **角度制**

整个圆周的$\frac{1}{360}$的弧称为含有 1 度的弧，而 1 度的弧所对的圆心角称为 1 度的角，记为 1°.

1 周角 = 360°，半周角 = 180°，直角 = 90°，1° = 60′(分)，1′ = 60″(秒).

2. **弧度制**

把等于半径长的圆弧称为含有 1 弧度的弧，而 1 弧度的弧所对的圆心角称为 1 弧度的角. 这种用弧度做单位来度量角的制度称为弧度制. 在使用时，“弧度”两字通常省略.

1 周角 = 2π，半周角 = π，直角 = $\frac{\pi}{2}$，$60° = \frac{\pi}{3}$，$30° = \frac{\pi}{6}$.

3. **度与弧度的换算**

度与弧度的换算如表 1-1 所示.

表 1-1

弧度/rad	度/(°)	分/(′)	秒/(″)
1	$57.29577951 = \frac{180}{\pi}$	3437.746771	206264.8063
0.017453293	1	60	3600
0.0002908882	0.016666667	1	60
0.0000048481	0.000277778	0.016666667	1

1rad ≈ 57°17′44.806″.

1.2 锐角三角函数

1. **锐角三角函数的定义**

在直角三角形 ABC 中(见图 1-1)任意取两条边可以组成 6 个不同的比值，这些比值是依 A 角的大小来确定的，所以它们是 A 角的函数，其定义如表 1-2 所示.

A 角的这些函数，叫做 A 角的三角函数. 锐角三角函数的值通常有表可查.

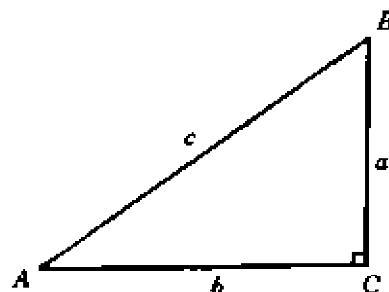


图 1-1

表 1-2

函数名称	记　号	定　义
A 角的正弦	$\sin A$	$\sin A = a/c$
A 角的余弦	$\cos A$	$\cos A = b/c$
A 角的正切	$\tan A$	$\tan A = a/b$
A 角的余切	$\cot A$	$\cot A = b/a$
A 角的正割	$\sec A$	$\sec A = c/b$
A 角的余割	$\csc A$	$\csc A = c/a$

2. 余角的三角函数

直角三角形的两个锐角 A 与 B 互为余角．由锐角三角函数的定义，有

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A,\quad \cos(90^\circ - A) = \sin A,$$
$$\tan(90^\circ - A) = \cot A,\quad \cot(90^\circ - A) = \tan A,$$
$$\sec(90^\circ - A) = \csc A,\quad \csc(90^\circ - A) = \sec A.$$

通常把正弦和余弦、正切和余切、正割和余割互相叫做余函数．

3. 解直角三角形

解直角三角形有 4 种情形，如表 1-3 所示．

表 1-3

已　知	所　求		
c, A	$B = 90^\circ - A$	$a = c\sin A$	$b = c\cos A$
a, A	$B = 90^\circ - A$	$b = a\cot A$	$c = a/\sin A$
c, a	$\sin A = a/c$	$B = 90^\circ - A$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ 或 $b = c\sin B$
a, b	$\tan A = a/b$	$B = 90^\circ - A$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 或 $c = a/\sin A$

1.3　任意角三角函数

1. 角的概念的推广

角可视为一条射线由原来的位置 OA（始边），绕着它的端点 O 旋转到另一位置 OB（终边），所形成的角 α，O 是角 α 的顶点．规定：按逆时针方向旋转所形成的角是正角，反之为负角，当一条射线没有作任何旋转时，这个角叫做零度角．

如果角的顶点与直角坐标系的原点重合，角的始边与 x 轴正半轴重合，那么，角的终边落在第几象限，就叫第几象限的角．

2. **任意角三角函数的定义**

设任意角 α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x, y)，如图 1-2 所示，它与原点的距离是 $r(r>0)$. 那么角 α 的三角函数定义为

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x},\quad \cot\alpha=\frac{x}{y},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x},\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

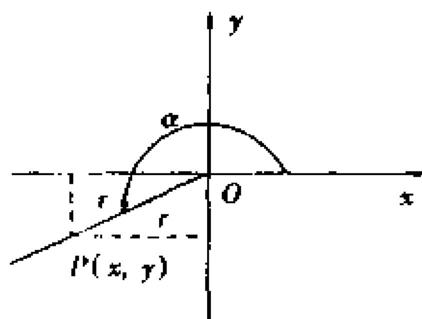


图 1-2

3. **化任意角三角函数为锐角三角函数**

(1) 三角函数在各象限里的符号　三角函数在每个象限的符号如图 1-3 所示.

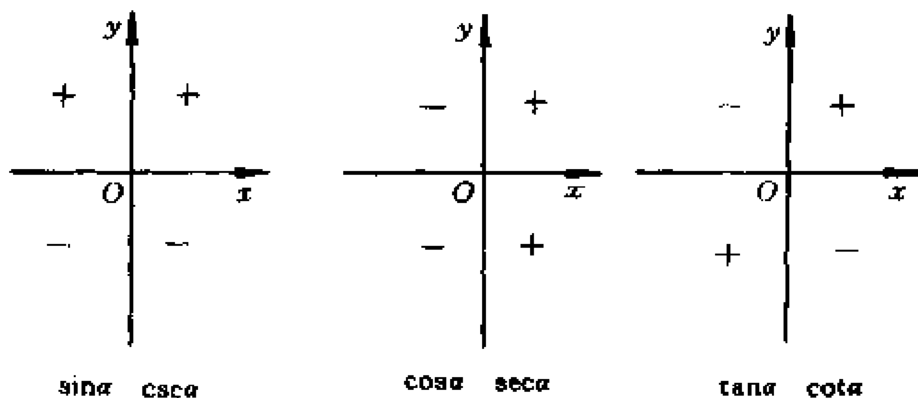


图 1-3

(2) 三角函数的诱导公式　设 α 是任意角，n 是整数，三角函数的诱导公式如表 1-4 所示.

表 1-4

角	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$\pi\pm\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$
$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$2\pi\pm\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$
$n\pi\pm\alpha$	$\pm(-1)^n\sin\alpha$	$(-1)^n\cos\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$(-1)^n\sec\alpha$	$\pm(-1)^n\csc\alpha$

(3) 求任意角三角函数值　任意角三角函数值的求法可通过三角函数的同期性、互余性、互补性和诱导公式化为锐角来求.

4. 特殊角的三角函数值

特殊角的三角函数值如表 1-5 所示.

表 1-5

φ 度/(°)	φ 弧度/rad	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$	$\cot\varphi$	$\sec\varphi$	$\csc\varphi$
0	$0_{\mp 0}$	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$
15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
18	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5}+1$
22.5	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{4-2\sqrt{2}}$	$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
36	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5}-1$	$\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
67.5	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$\sqrt{4-2\sqrt{2}}$
72	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5}+1$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$
75	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
90	$\frac{\pi}{2}_{\mp 0}$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1

表中 $\frac{\pi}{2}_{\mp 0}$ 表示 $\varphi \to \frac{\pi}{2} \mp 0$(即左右极限).

1.4 三角函数的图像和性质

1. 三角函数线

一个已知角的三角函数值,可以用单位圆中的有向线段表示.

设单位圆与角 α 的终边相交于点 P,与 x 轴和 y 轴的正方向分别交于 A 和 B 两点,过 A,B 两点分别作单位圆的切线,与角 α 的终边(或反向延长线)相交于 T、S,并过 P 作 x 轴的垂线,垂足为 M(见图 1-4).把这些平行于坐标轴的线段 MP、

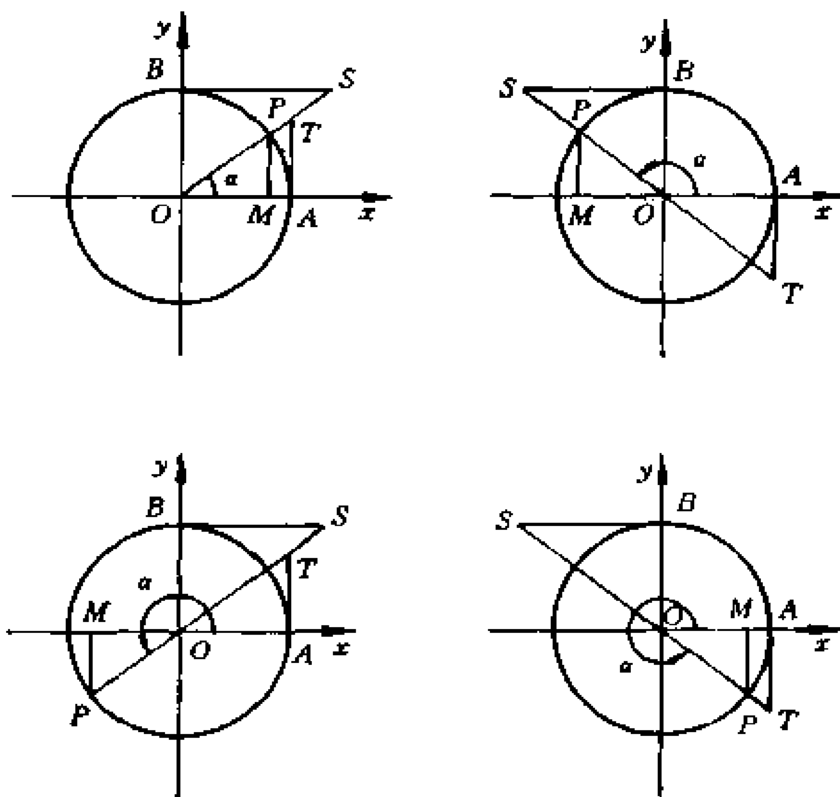


图 1-4

$$\sin\alpha = MP,\quad \cos\alpha = OM,$$
$$\tan\alpha = AT,\quad \cot\alpha = BS,$$

OM,AT,BS 都看成是有向线段,其方向应和坐标轴方向保持一致.这样一来,有这些有向线段的数量依次等于圆心角 α 的正弦、余弦、正切、余切的值,它们分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线、余切线,统称为三角函数线.

2. 正弦函数、余弦函数的图像

(1) $y=\sin x$ 的图像 利用单位圆中的正弦线可以比较精确地作出正弦函数的图像.

在直角坐标系的 x 轴上任意取一点 O_1,以 O_1 为圆心作一个单位圆,从这个单位圆和 x 轴的交点 A 起,把圆分成若干等分,例如 12 等分,这时对应的圆心角也被

分成12等分.过圆上各分点分别作 x 轴的垂线,那么这些垂线的长度和方向就是对应角的正弦线.相应地把 x 轴上从0到 2π 这一段也分成12等分,过圆上各分点作平行于 x 轴的直线,分别与过 x 轴上表示各对应角的分点 $(0,0)$,$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$,$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$,$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$,$\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$,…,$(2\pi,0)$ 所作的 x 轴的垂线相交,就得到 $y=\sin x$ 的图像上的各点.把这些点用平滑的曲线连结起来,就得到正弦函数 $y=\sin x$ 在0到 2π 上的一段图像(见图1-5).由于终边相同的角的三角函数值相等,就可以作出 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$ 的图像(见图1-6).

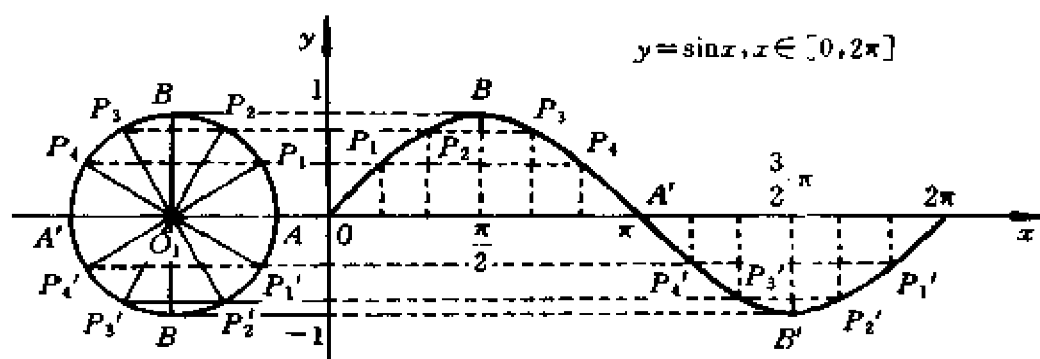


图1-5

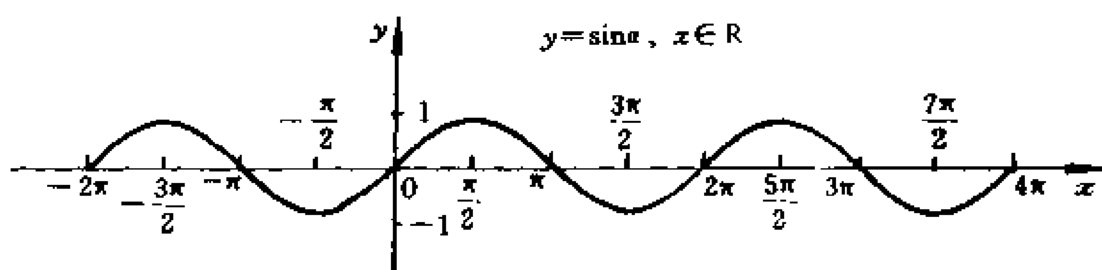


图1-6

(2) $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图像　把 $y=\sin x$ 的图像上所有点沿 x 轴向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<0$)移动 $|\varphi|$ 单位,再把所得各点的纵坐标缩短($\omega>1$)或伸长($0<\omega<1$)到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍(纵坐标不变);然后把所得各点的纵坐标伸长($A>1$)或缩短($0<A<1$)到原来的 A 倍(横坐标不变),从而得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像.

(3) $y=\cos x$ 的图像　利用正弦和余弦的互余关系和上述方法,可作出 $y=\cos x$ 的图像.如图1-7、图1-8所示.

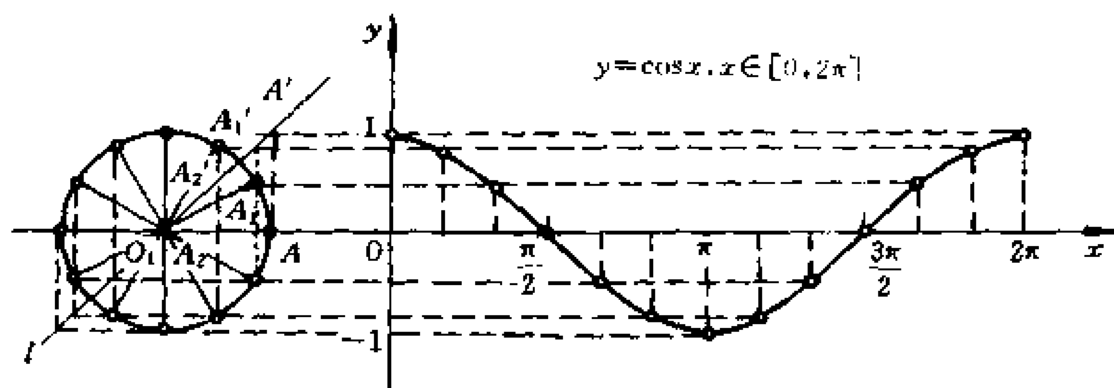


图 1-7

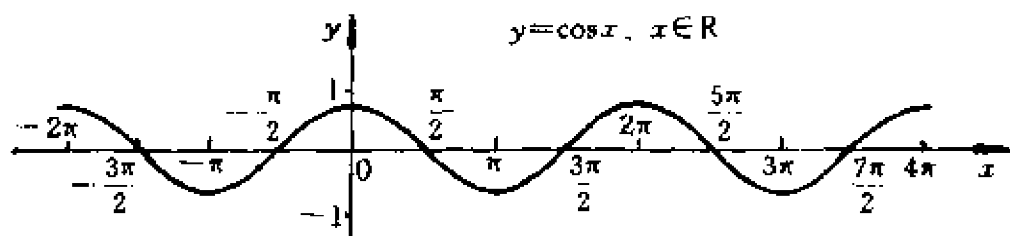


图 1-8

3. 正切函数和余切函数的图像

利用单位圆,可以画出正切函数 $y=\tan x, x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ ($n\in\mathbf{Z}$)的图像.如图 1-9、图 1-10 所示.

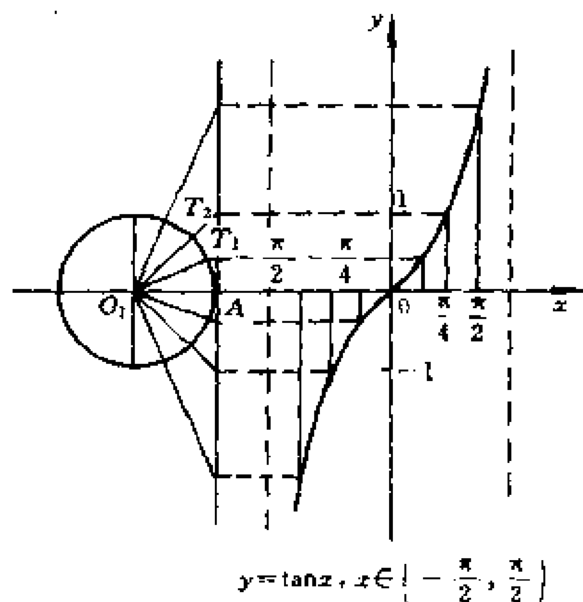


图 1-9

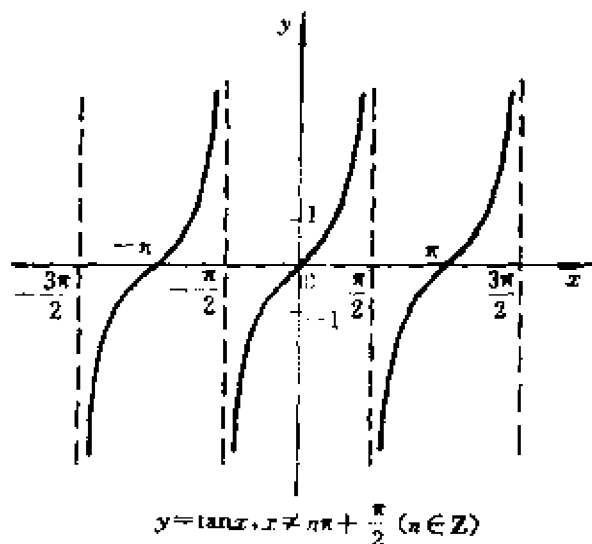


图 1-10

由于 $\cot x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，用图像的平移变换可以作出 $y=\cot x, x\neq n\pi(n\in\mathbf{Z})$ 的图像，如图 1-11 所示．

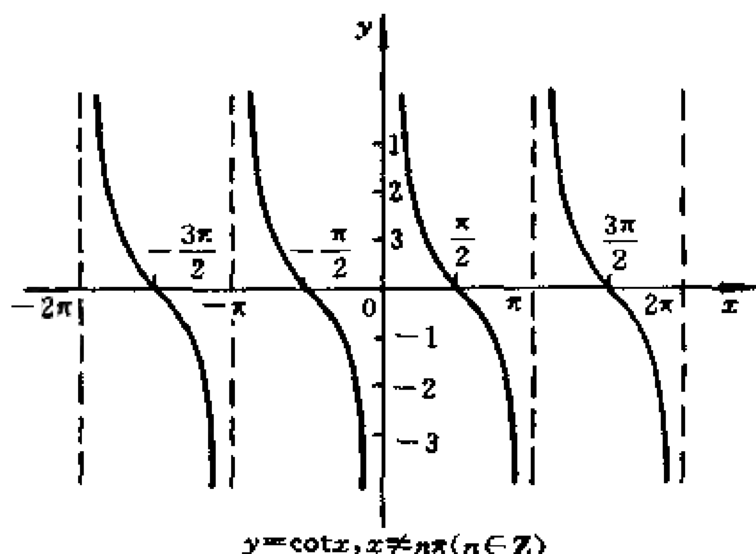


图 1-11

4．正割函数和余割函数的图像

由于 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$，$\csc x=\frac{1}{\sin x}$，所以根据这个倒数关系，利用单位圆可以画出正割函数 $y=\sec x$、余割函数 $y=\csc x$ 的图像，如图 1-12(a)、(b)所示．

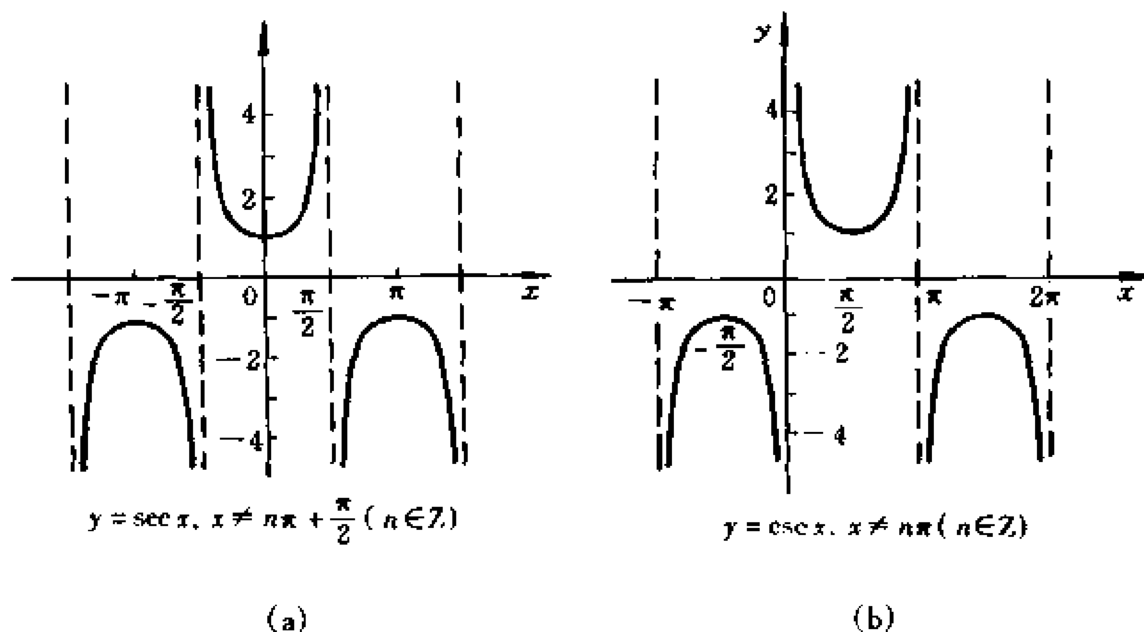


图 1-12

三角函数的作图除上面方法外，一般还采用"描点法"．

5．三角函数的性质

各个三角函数的定义域、值域和一些重要性质，可归纳成表 1-6 所示．

表 1-6

性　质	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
定义域	**R**	**R**	$\left(n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$	$(n\pi,n\pi+\pi)$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	**R**	**R**
周期性	2π	2π	π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
有界性	有　界	有　界	无　界	无　界
单调性	$\left[2n\pi-\frac{\pi}{2},2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 递增 $\left[2n\pi+\frac{\pi}{2},2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 递减	$[2n\pi+\pi,2n\pi+2\pi]$ 递增 $[2n\pi,2n\pi+\pi]$递减	$\left(n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 递增	$(n\pi,n\pi+\pi)$递减
极值	最大值是 1 最小值是 −1	最大值是 1 最小值是 −1		

1.5　三角函数的关系

1. 同角三角函数之间的关系

(1) 同角三角函数的基本关系式

1° 倒数关系

$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$,　$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$,　$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$;

2° 商数关系

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,　$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

3° 平方关系

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,　$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$,　$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$.

(2) 三角函数的相互关系如表 1-7 所示.

表 1-7

	$\sin\alpha=x$	$\cos\alpha=x$	$\tan\alpha=x$	$\cot\alpha=x$	$\sec\alpha=x$	$\csc\alpha=x$
$\sin\alpha=$	x	$\pm\sqrt{1-x^2}$	$\pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos\alpha=$	$\pm\sqrt{1-x^2}$	x	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\pm\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
$\tan\alpha=$	$\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\pm\sqrt{x^2-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

续表

	$\sin\alpha = x$	$\cos\alpha = x$	$\tan\alpha = x$	$\cot\alpha = x$	$\sec\alpha = x$	$\csc\alpha = x$
$\cot\alpha =$	$\pm\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\sqrt{x^2-1}$
$\sec\alpha =$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\pm\sqrt{1+x^2}$	$\pm\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\pm\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\csc\alpha =$	$\frac{1}{x}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\pm\sqrt{1+x^2}$	$\pm\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x

例如，若 $\sin\alpha = x$，则 $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-x^2}$.

利用这些关系式可以进行恒等变形，也可以根据角 α 的某一个三角函数值，求出这个角的其他三角函数值. 但当未指定角 α 终边所在象限时，要根据 α 终边可能在的两个象限分别求其他三角函数值.

2. 两角和与差的三角函数

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta},$$

$$\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta\mp 1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}.$$

3. 倍角公式

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha},$$

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha},$$

$$\tan2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},$$

$$\cot2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha},$$

$$\sec2\alpha = \frac{\sec^2\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\cot\alpha+\tan\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha},$$

$$\csc2\alpha = \frac{1}{2}\sec\alpha\cdot\csc\alpha = \frac{1}{2}(\tan\alpha+\cot\alpha),$$

$$\sin3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha,$$

$$\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$\tan3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha},$$

$$\cot3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1},$$

$$\sin n\alpha = n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \cdots,$$

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - C_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha + \cdots,$$

其中 n 为正整数.

4. 半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},$$

$$\sec\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{2\sec\alpha}{\sec\alpha+1}},$$

$$\csc\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{2\sec\alpha}{\sec\alpha-1}}.$$

公式中根号所取符号与等号左边的符号一致.

5. 万能公式

由二倍角公式即可得到万能公式:

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

6. 和差与积互化公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\ \cos\beta},$$

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \pm \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \ \sin\beta},$$

$$\tan\alpha \pm \cot\beta = \pm \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha \ \sin\beta};$$

$$\sin\alpha \ \sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha \ \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha \ \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)].$$

7. 降幂公式

利用倍角公式可推出降幂公式.

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos2\alpha),$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin3\alpha),$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(3 - 4\cos2\alpha + \cos4\alpha),$$

$$\sin^{2n}\alpha = \frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_{2n}^{k}\cos(2n-2k)\alpha + \frac{1}{2}C_{2n}^{n}\right],$$

$$\sin^{2n+1}\alpha = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_{2n+1}^{k}\sin(2n-2k+1)\alpha;$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos2\alpha),$$

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos3\alpha),$$

$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(3 + 4\cos2\alpha + \cos4\alpha),$$

$$\cos^{2n}\alpha = \frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{k}\cos(2n-2k)\alpha + \frac{1}{2}C_{2n}^{n}\right],$$

$$\cos^{2n+1}\alpha = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{k}\cos(2n-2k+1)\alpha$$

其中 n 为正整数.

8. 三角函数有限和

利用三角式的恒等变形,可以求出三角函数有限和.

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sin\frac{j\pi}{n} = \cot\frac{\pi}{2n},$$

$$\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{(2j-1)\pi}{n} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{(2j-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2},$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sin\frac{2j^2\pi}{n}=\frac{\sqrt{n}}{2}\left(1+\cos\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\cos\frac{2j^2\pi}{n}=\frac{\sqrt{n}}{2}\left(1+\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}\right)-1,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\cot^2\frac{j\pi}{2n+1}=\frac{1}{3}n(2n-1),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\cot^2\frac{(2j-1)\pi}{4n}=n(2n-1),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sec^2\frac{(4j-3)\pi}{4n}=2n^2,$$

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}\csc^2\frac{j\pi}{n}=\begin{cases}\frac{1}{6}(n^2-1), & n\text{ 为奇数},\\ \frac{1}{6}(n^2-4), & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\csc^2\frac{(2j-1)\pi}{2n}=\begin{cases}\frac{1}{2}(n^2-1), & n\text{ 为奇数},\\ \frac{1}{2}n^2, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{2n}\csc^2\frac{j\pi}{2n+1}=\frac{4}{3}n(n+1),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\tan^4\frac{j\pi}{2n+1}=\frac{1}{3}n(2n+1)(4n^2+6n-1),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\cot^2\frac{j\pi}{2n+1}=\frac{1}{45}n(2n-1)(4n^2+10n-9).$$

1.6 三角形内角的三角函数间的关系

在任意三角形中,三内角的和等于 180°.应用三角函数的和化积公式,可以推出 3 个内角的三角函数间的各种关系.

设 A,B,C 是三角形 ABC 的 3 个内角,则有如下基本关系式:

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C,$$

$$\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C+\csc A\csc B\csc C;$$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C,$$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C;$$

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C,$$
$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C;$$
$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$
$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$
$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4},$$
$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2};$$
$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1,$$
$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1;$$
$$\sin 2nA+\sin 2nB+\sin 2nC=(-1)^{n+1}4\sin nA\sin nB\sin nC,$$
$$\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C$$
$$=(-1)^n4\cos\frac{2n+1}{2}A\cos\frac{2n+1}{2}B\cos\frac{2n+1}{2}C,$$
$$\cos 2nA+\cos 2nB+\cos 2nC=(-1)^n4\cos nA\cos nB\cos nC-1,$$
$$\cos(2n+1)A+\cos(2n+1)B+\cos(2n+1)C$$
$$=(-1)^n4\sin\frac{2n+1}{2}A\sin\frac{2n+1}{2}B\sin\frac{2n+1}{2}C+1,$$
$$\tan nA+\tan nB+\tan nC=\tan A\tan B\tan C.$$

其中 n 为整数.

2　反三角函数

2.1　反三角函数及其图像

1. 反三角函数的定义

由于三角函数是周期函数,在定义域内,它的自变量 x 和函数 y 之间不是一一对应的,所以,为了建立它的反函数,我们总是在每一个三角函数的定义域内选择一个区间,使得在这个区间内,三角函数的值是单调的,并且三角函数的值可以取到所有可能的值,同时尽可能使函数的图像连续. 由此,我们选取包括锐角的闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$建立正弦函数的反函数.

正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数,叫做反正弦函数的主值,简称反正弦函数,记作 $y=\arcsin x$,它的定义域是$[-1,1]$,值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

根据定义,arc $\sin x$ 表示一个角,这个角在 $-\frac{\pi}{2}$ 到$\frac{\pi}{2}$之间,它的正弦值正好等

于 x,即

$$\sin(\arcsin x)=x,\quad x\in[-1,1].$$

同理,可分别定义其他几个三角函数的反函数.反三角函数的定义域与主值范围可归纳如表 2-1 所示.

表 2-1

函 数	主值记号	定义域	主值范围
反正弦	$y=\arcsin x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\pi/2\leqslant y\leqslant \pi/2$
反余弦	$y=\arccos x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant \pi$
反正切	$y=\arctan x$	$-\infty<x<\infty$	$-\pi/2<y<\pi/2$
反余切	$y=\mathrm{arccot}\, x$	$-\infty<x<\infty$	$0<y<\pi$
反正割	$y=\mathrm{arcsec}\, x$	$x\leqslant -1, x\geqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant \pi, y\neq \pi/2$
反余割	$y=\mathrm{arccsc}\, x$	$x\leqslant -1, x\geqslant 1$	$-\pi/2\leqslant y\leqslant \pi/2, y\neq 0$

一般反三角函数与主值的关系为

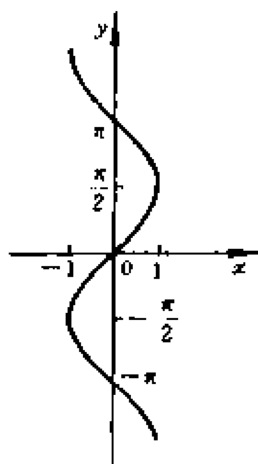
$$\mathrm{Arcsin}\, x=n\pi+(-1)^n\arcsin x,$$
$$\mathrm{Arccos}\, x=2n\pi\pm\arccos x,$$
$$\mathrm{Arctan}\, x=n\pi+\arctan x.$$

其中 n 为任意整数.

2. **反三角函数的图像及特征**

反正弦曲线

$y=\arcsin x$



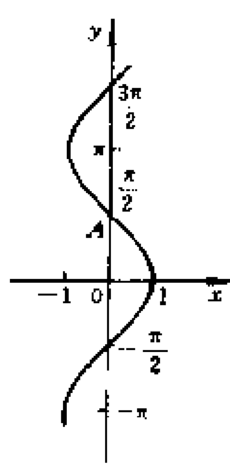
拐点(同曲线对称中心):

$O(0,0)$,该点切线斜率为 1

图 2-1

反余弦曲线

$y=\arccos x$



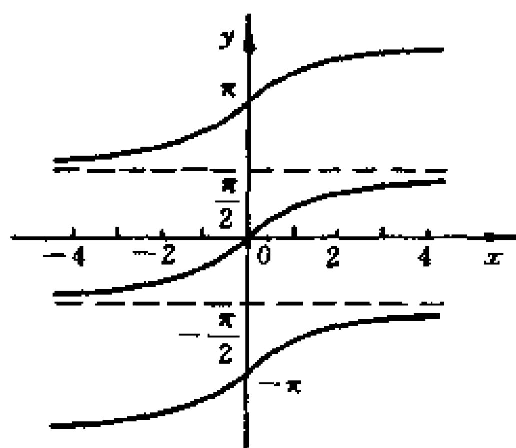
拐点(同曲线对称中心):

$A(0,\pi/2)$,该点切线斜率为 -1

图 2-2

反正切曲线

$y=\arctan x$



拐点(同曲线对称中心):

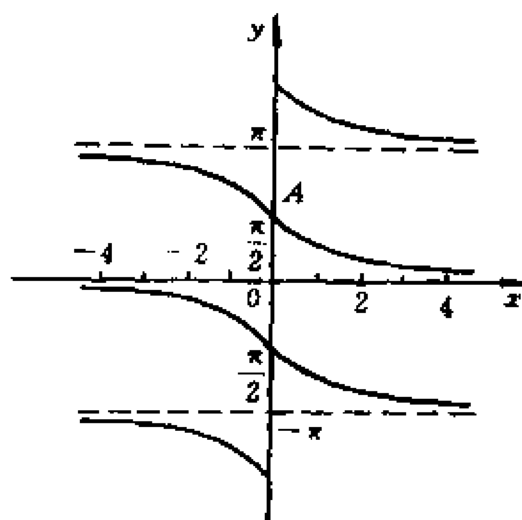
$O(0,0)$,该点切线斜率为 1

渐近线:$y=\pm\pi/2$

图 2-3

反余切曲线

$y=\operatorname{arccot} x$



拐点(同曲线对称中心):

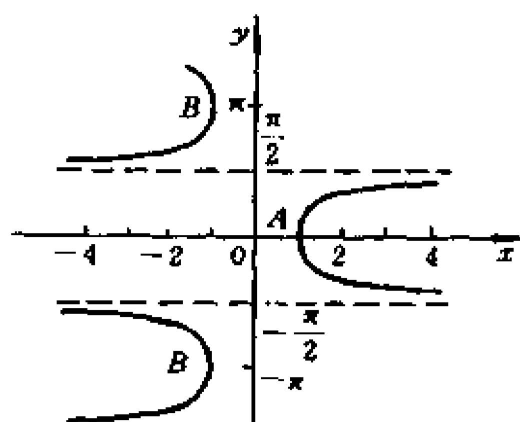
$A(0,\pi/2)$,该点切线斜率为 -1

渐近线:$y=0,y=\pi$

图 2-4

反正割曲线

$y=\operatorname{arcsec} x$



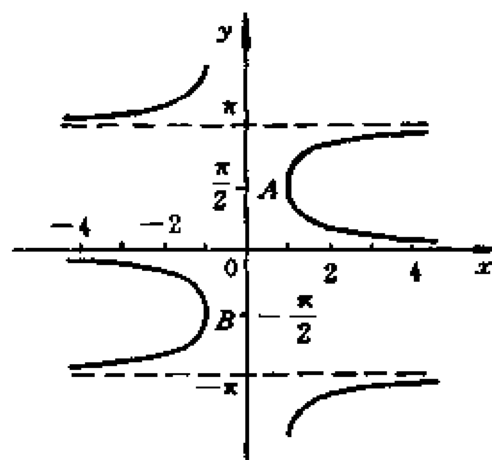
顶点:$A(1,0),B(-1,\pi)$

渐近线:$y=\pi/2$

图 2-5

反余割曲线

$y=\operatorname{arccsc} x$



顶点:$A(1,\pi/2),B(-1,-\pi/2)$

渐近线:$y=0$

图 2-6

2.2 反三角式的三角运算

反三角函数的表达式统称为反三角式.由这些反三角式组成的代数关系式也称为反三角式.它们都表示某一个区间内的角.求角的三角函数,通常叫做三角运算.

根据反三角式的定义,当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,有

$$\sin(\arcsin x)=x,\quad \cos(\arccos x)=x.$$

当 $-\infty<x<\infty$ 时,有

$$\tan(\arctan x)=x,\quad \cot(\operatorname{arccot} x)=x.$$

上述等式被认为是对反三角式施行三角运算的结果.由同角三角函数的关系,容易得到下列公式:

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},$$

$$\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\cot(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},$$

$$\tan(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\cot(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\cot(\arctan x)=\frac{1}{x};$$

$$\sin(\operatorname{arccot} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\cos(\operatorname{arccot} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\tan(\operatorname{arccot} x)=\frac{1}{x}.$$

应用二倍角的三角函数和半角的三角函数公式可得到

$$\sin(2\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2},$$

$$\cos(2\arccos x)=2x^2-1,$$

$$\tan(2\arctan x)=\frac{2x}{1-x^2};$$

$$\sin(2\arctan x)=\frac{2x}{1+x^2},$$

$$\cos(2\arctan x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\frac{1+x}{2}},$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\frac{1-x}{2}},$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}.$$

应用两角和的正弦、余弦、正切公式又可以得到

$$\sin(\arcsin x+\arcsin y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2},$$

$$\cos(\arccos x+\arccos y)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan(\arctan x+\arctan y)=\frac{x+y}{1-xy}.$$

以上各个等式只有在左边的运算始终满足定义的情况下才成为恒等式.

2.3　反三角函数的相互关系与基本公式

1. 反三角函数的相互关系

如果一个反三角式与另一个反三角式的取值范围是相同的，并且它们对于某一个三角运算的值是相等的，那么这两个反三角式被认为具有恒等关系. 反三角函数的相互关系如表 2-2 所示.

表 2-2

$\arcsin x=$	$\arccos x=$	$\arctan x=$	$\operatorname{arccot} x=$
$-\arcsin(-x)$	$\pi-\arccos(-x)$	$-\arctan(-x)$	$\pi-\operatorname{arccot}(-x)$
$\frac{\pi}{2}-\arccos x$	$\frac{\pi}{2}-\arcsin x$	$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arccot} x$	$\frac{\pi}{2}-\arctan x$
$\arccos\sqrt{1-x^2}\ ^*$	$\arcsin\sqrt{1-x^2}\ ^*$	$\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ^*$
$\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ ^*$	$\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ^*$	$\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ ^*$	$\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccot}\frac{1}{x}\ ^*$	$\arctan\frac{1}{x}\ ^*$

带 * 号者只有当 x 为正值时才适用.

2. 反三角函数基本公式

以一个反三角式代换另一个与它恒等的反三角式,便称为是反三角式的恒等变形.反三角式恒等变形的一些基本公式如下:

1° $\arcsin x+\arcsin y$

$$=\begin{cases}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}) & (xy\leqslant 0\text{ 或 }x^2+y^2\leqslant 1),\\ \pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}) & (x>0,y>0,x^2+y^2>1),\\ -\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}) & (x<0,y<0,x^2+y^2>1).\end{cases}$$

2° $\arcsin x-\arcsin y$

$$=\begin{cases}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}) & (xy\geqslant 0\text{ 或 }x^2+y^2\leqslant 1),\\ \pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}) & (x>0,y<0,x^2+y^2>1),\\ -\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}) & (x<0,y>0,x^2+y^2>1).\end{cases}$$

3° $\arccos x+\arccos y$

$$=\begin{cases}\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & (x+y\geqslant 0),\\ 2\pi-\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & (x+y<0).\end{cases}$$

4° $\arccos x-\arccos y$

$$=\begin{cases}-\arccos(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & (x\geqslant y),\\ \arccos(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & (x<y).\end{cases}$$

5° $\arctan x+\arctan y$

$$=\begin{cases}\arctan\dfrac{x+y}{1-xy} & (xy<1),\\ \pi+\arctan\dfrac{x+y}{1-xy} & (x>0,xy>1),\\ -\pi+\arctan\dfrac{x+y}{1-xy} & (x<0,xy>1).\end{cases}$$

6° $\arctan x-\arctan y$

$$=\begin{cases}\arctan\dfrac{x-y}{1+xy} & (xy>-1),\\ \pi+\arctan\dfrac{x-y}{1+xy} & (x>0,xy<-1),\\ -\pi+\arctan\dfrac{x-y}{1+xy} & (x<0,xy<-1).\end{cases}$$

7° $2\arcsin x$

$$=\begin{cases}\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) & \left(|x|\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\\ \pi-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant 1\right),\\ -\pi-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) & \left(-1\leqslant x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{cases}$$

8° $2\arccos x$

$$=\begin{cases}\arccos(2x^2-1) & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ 2\pi-\arccos(2x^2-1) & (-1\leqslant x<0).\end{cases}$$

9° $2\arctan x$

$$=\begin{cases}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2} & (|x|<1),\\ \pi+\arctan\dfrac{2x}{1-x^2} & (|x|>1),\\ -\pi+\arctan\dfrac{2x}{1-x^2} & (x<-1).\end{cases}$$

10° $\cos(n\arccos x)=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}\quad(n\geqslant 1).$

2.4　三角式的反三角运算

根据反三角式的定义，当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，分别有

$$\arcsin(\sin x)=x,\quad \arctan(\tan x)=x.$$

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$0<x<\pi$ 时，分别有

$$\arccos(\cos x)=x,\quad \operatorname{arccot}(\cot x)=x.$$

上述 4 个等式被认为是对三角式施行反三角运算的结果.

对三角式施行上述反三角运算时，如果变数字母的取值不在与反三角式的定义相应的区间内，则必须将反三角运算符号下的三角式作恒等变换，使其变换为取值于上述相应区间内的三角式.

如果对某个三角式所施行的反三角运算不是与这个三角式相应的逆运算，那么可以利用三角式的恒等式或反三角式的恒等式作恒等变形，以便利用互逆的运算关系求得结果.

3　三角方程

3.1　最简三角方程

含有未知数的三角函数的方程叫做三角方程. 求出适合于三角方程的未知数的一切值，叫做解三角方程，这些值叫做三角方程的解，而所有解的集合叫做三角方程的解集.

形如 $\sin x=a$，$\cos x=a$，$\tan x=a$，$\cot x=a$ 等的方程叫做最简三角方程. 其解如下：

$\sin x=a(|a|\leqslant 1)$ 的解集为

$$\{x\mid x=n\pi+(-1)^n\arcsin a,\ n\in\mathbf{Z}\}.$$

$\cos x=a(|a|\leqslant 1)$ 的解集为

$$\{x \mid x = 2n\pi \pm \arccos a, n \in \mathbf{Z}\}.$$

$\tan x = a$ 的解集为

$$\{x \mid x = n\pi + \arctan a, n \in \mathbf{Z}\}.$$

$\cot x = a$ 的解集为

$$\{x \mid x = n\pi + \operatorname{arccot} a, n \in \mathbf{Z}\}.$$

3.2 一般三角方程

解三角方程的基本思想是设法把三角方程化成最简三角方程来解.与代数方程相类似,在解一般的三角方程的过程中,也会产生增根和失根.因此,在解三角方程时,应该尽可能避免破坏方程同解性的变形或者三角变换,特别要避免产生失根的变形或者三角变换.但有时候这种变形是避免不了的,这时就应当注意验根.

同一个三角方程往往可以有几种解法,得到解的形式不一定相同,但这些解是等效的,表示在单位圆上是一致的.通常把三角方程的解表示在单位圆上,以便检验.

1. 只含同角的同名三角函数的三角方程

例如,解方程 $\tan^2 2x - 1 = 0$. 先把 $\tan 2x$ 看成一个变元,得到最简三角方程

$$\tan 2x = \pm 1.$$

由 $\tan 2x = 1$,得 $$x = n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8},$$

由 $\tan 2x = -1$,得 $$x = n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8},$$

所以方程的解集是

$$\{x \mid x = n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, n \in \mathbf{Z}\} \cup \{x \mid x = n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, n \in \mathbf{Z}\}.$$

2. 可化成含同角的同名三角函数的三角方程

如果一个三角方程经过变形,可以化成只含同一个角的同一个三角函数的三角方程,那么就可以用上述例中的解法来解.

例如,解方程 $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$. 利用同角三角函数关系,得

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

原方程的解集是

$$\{x \mid x = (2n+1)\pi, x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}\}.$$

3. 可化为一边为零而另一边是若干个因式的积的三角方程

可化成一边为零而另一边为若干个因式的积的三角方程,令各个因式等于零,解所得的三角方程.

例如,解方程 $\sin x\cos x - \cos x = \sin x - 1$. 移项、因式分解,得

$$(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0.$$

由 $\sin x - 1 = 0$,得 $$x = 2n\pi + \frac{\pi}{2},$$

由 $\cos x - 1 = 0$,得 $$x = 2n\pi.$$

因此,原方程的解集是

$$\{x \mid x=2n\pi, 2n\pi+\frac{\pi}{2}, n\in \mathbf{Z}\}.$$

3.3 某些特殊形式的三角方程

1. 形如 $a\sin x+b\cos x=c$ 的三角方程

形如 $a\sin x+b\cos x=c$ 的三角方程,可以利用三角变换,由辅助角 $\varphi=\arctan\frac{b}{a}$,把左边化成一个角的正弦来解.

把方程 $a\sin x+b\cos x=c$ 的两边都除以 a,得

$$\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}.$$

令 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$,代入后,得

$$\sin x+\tan\varphi\cos x=\frac{c}{a}.$$

应用三角变换,得

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{a}\cos\varphi.$$

所以

$$x=2n\pi-\varphi+\arcsin\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right);$$

$$x=(2n+1)\pi-\varphi-\arcsin\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right).$$

2. $\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次方程

$\sin x$ 和 $\cos x$ 的一次齐次方程和二次齐次方程的标准形式分别是

$$a\sin x+b\cos x=0,$$

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0.$$

可以把它们化成只含有未知数的正切的三角方程来解.

例如,解方程 $5\sin x+2\cos x=0$. 由方程知道,$\cos x\neq 0$,可以把方程两边都除以 $\cos x$,得出同解方程

$$5\tan x+2=0.$$

所以,原方程的解集是

$$\{x \mid x=n\cdot 180^\circ-21^\circ 48', n\in \mathbf{Z}\}.$$

3.4 最简三角不等式

最简三角方程中的等号换成不等号就叫做最简三角不等式.求出适合于三角不等式的未知数的一切值,叫做解三角不等式.所有解的集合叫做三角不等式的解集.

应用三角函数的图像和性质,借助于单位圆和三角函数线,能够清楚地表达出最简三角不等式的解集.

例如,求不等式 $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集.由于函数 $\cos x$ 的周期是 2π,所以在$[-\pi,\pi]$内研究不等式的解.作函数线 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$,如图 3-1(a)所示,它在$[-\pi,\pi)$内对应的角是 $x=-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}$.所以 $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解是 $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$.由周期性得不等式的解集

$$\left\{x \mid 2n\pi-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}\right\}.$$

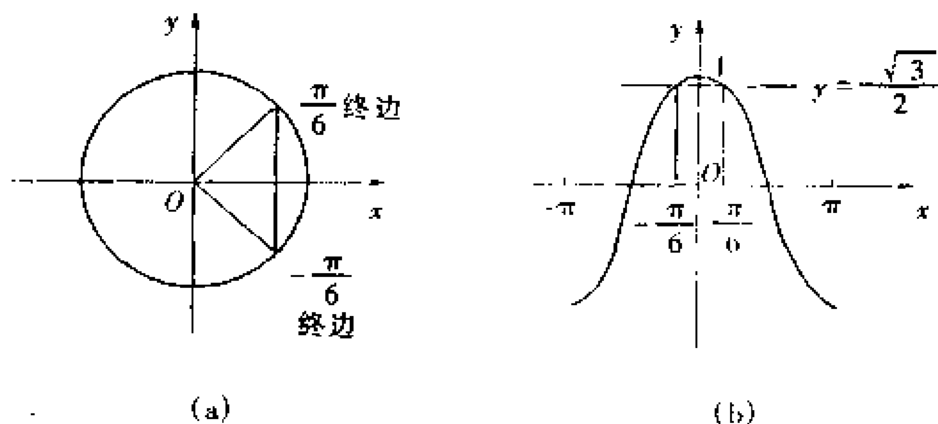


图 3-1

也可以应用函数的图像的方法:

作函数 $y=\cos x, y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 在其周期$[-\pi,\pi)$上的图像如图 3-1(b)所示,可以看出不等式的解为 $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$.根据余弦函数的周期 2π,从而得出不等式的解集.

4　三角形定理

4.1　三角形定理

如图 4-1 所示,设三角形 ABC 的三个角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,三个角与三条边为三角形的元素.三角形外接圆的半径为 R,内切圆半径为 r,面积为 S.若这些几何量与三角形元素之间的关系用公式表述,则统称为三角形定理.

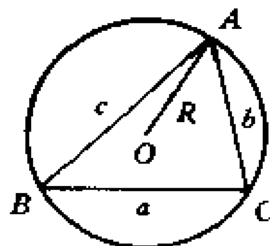


图 4-1

1. 三角形基本定理

1° 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

或
$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C.$$

2° 余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

或

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos B=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

3° 射影定理

$$c=a\cos B+b\cos A,\quad a=b\cos C+c\cos B,\quad b=c\cos A+a\cos C.$$

4° 莫尔威德(Mollweide)公式

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}};\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

5° 正切定理

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},$$

或

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}},\quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}},$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}.$$

2. 半角定理

若用 p 表示三角形半周长,即 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,那么半角与边长关系式:

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$
$$\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$
$$\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{p-c}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

这3个公式叫做半角定理.进一步,可以得到:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$
$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}};$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}},$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

3. 与面积有关的定理

1° 面积公式

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}.$$

$$S=rp,$$

$$S=\frac{abc}{4R}.$$

2° 外接圆、内切圆、旁切圆的半径

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4S}.$$

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=(p-a)\tan\frac{A}{2}$$

$$=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}=\frac{S}{p}.$$

$$r_a=p\tan\frac{A}{2}=\frac{S}{p-a},$$

$$r_b=p\tan\frac{B}{2}=\frac{S}{p-b},$$

$$r_c=p\tan\frac{C}{2}=\frac{S}{p-c}.$$

其中 r_a、r_b、r_c 分别表示外切于边 a、b、c 的旁切圆半径.

4.2 解斜三角形

在 1.2 节中指出了解直角三角形的方法,应用 4.1 节中的三角形基本定理可以解斜三角形(非直角三角形).在斜三角形的 6 个元素中,根据已经知道的 3 个元素(其中至少有一边),可以求出其他的 3 个元素.应用三角形定理,可以求出有关的几何量来.关于斜三角形的解法,归纳如表 4-1 所示.

莫尔威德公式中都含有三角形中的三个角和三条边,在解斜三角形求出未知元素后,可以利用它们来进行验算.

表 4-1

已知元素	其他元素的求法	
一边 a 及两角 B,C	$A=180°-(B+C)$，　$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$，　$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$	
两边 a,b 及夹角 C	$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$， $\sin A=\frac{a\sin C}{c}$，$\sin B=\frac{b\sin C}{c}$	
三边 a,b,c	$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，　$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$， $C=180°-(A+B)$．或用半角定理求 A,B,C	
两边 a,b 及其中一边对角 A	$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$ $C=180°-(A+B)$ $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$	$b\sin A<a$ 时，有两解 $b\sin A>a$ 时，无解 $b\sin A=a$ 时，有一解

5　双 曲 函 数

5.1　双曲函数的定义及图像

1. 双曲函数的定义

双曲正弦 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$；

双曲余弦 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；

双曲正切 $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$；

双曲余切 $\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$；

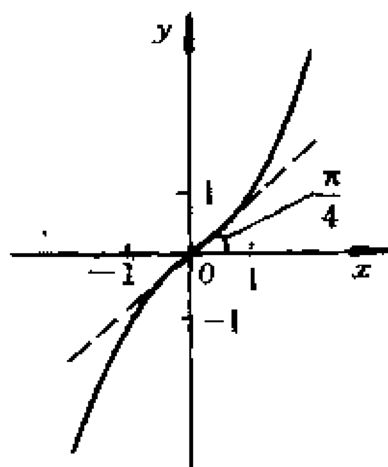
双曲正割 $\mathrm{sech}\,x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$；

双曲余割 $\mathrm{csch}\,x=\frac{1}{\sinh x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$．

2. 双曲函数的图像

双曲正弦曲线

$y=\sinh x$

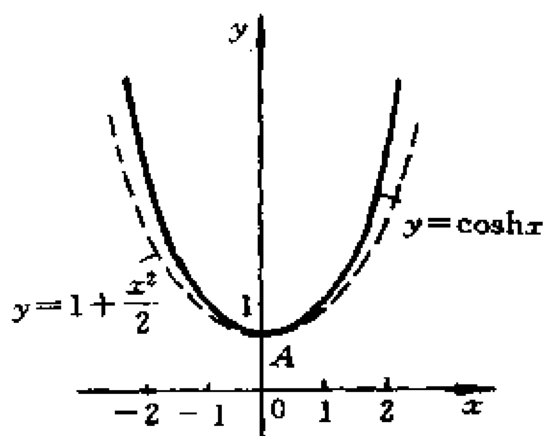


曲线关于原点对称.
拐点(同曲线对称中心):
$O(0,0)$,该点切线斜率为1

图 5-1

双曲余弦曲线

$y=\cosh x$

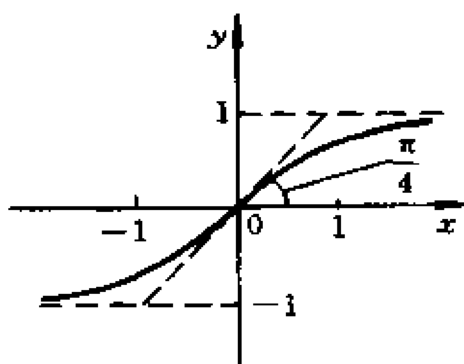


曲线关于 y 轴对称.
顶点(同极小值点):$A(0,1)$

图 5-2

双曲正切曲线

$y=\tanh x$

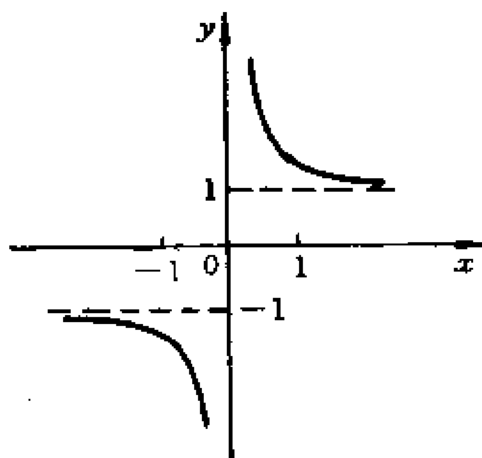


曲线关于原点对称.
拐点(同曲线对称中心):
$O(0,0)$,该点切线斜率为1
渐近线:$y=\pm1$

图 5-3

双曲余切曲线

$y=\coth x$

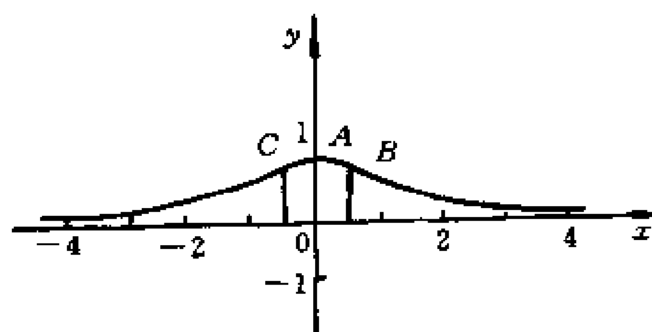


曲线关于原点对称.
不连续点:$x=0$
渐近线:$x=0, y=\pm1$

图 5-4

双曲正割曲线

$y = \operatorname{sech} x$



曲线关于 y 轴对称.

顶点(同极大点): $A(0,1)$

拐点: $B(\operatorname{Artanh}\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

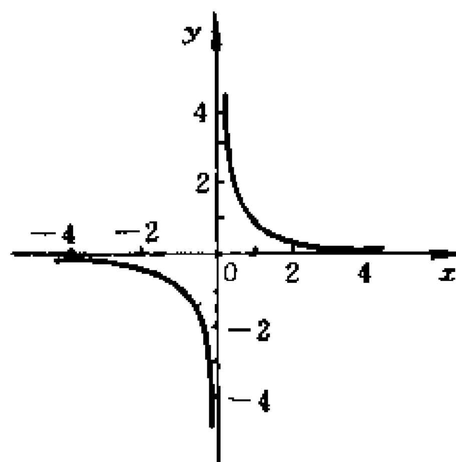
$C(-\operatorname{Artanh}\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

渐近线: $y=0$

图 5-5

双曲余割曲线

$y = \operatorname{csch} x$



曲线关于原点对称.

不连续点: $x=0$

渐近线: $x=0, y=0$

图 5-6

5.2　双曲函数的关系

1. 双曲函数的相互关系

双曲函数的相互关系如表 5-1 所示.

表 5-1

双曲函数	$\sinh x = a$	$\cosh x = a$	$\tanh x = a$	$\coth x = a$	$\operatorname{sech} x = a$	$\operatorname{csch} x = a$
$\sinh x =$	a	$\sqrt{a^2-1}$	$\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$	$\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\dfrac{1}{a}$
$\cosh x =$	$\sqrt{1+a^2}$	a	$\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$	$\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$	$\dfrac{1}{a}$	$\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}$
$\tanh x =$	$\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$	a	$\dfrac{1}{a}$	$\sqrt{1-a^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
$\coth x =$	$\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}$	$\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$	$\dfrac{1}{a}$	a	$\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$	$\sqrt{1+a^2}$
$\operatorname{sech} x =$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\dfrac{1}{a}$	$\sqrt{1-a^2}$	$\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$	a	$\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
$\operatorname{csch} x =$	$\dfrac{1}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$	$\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\sqrt{a^2-1}$	$\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	a

此外双曲函数还有如下基本关系：

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\quad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x},\quad \tanh x\coth x=1;$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1,\quad \operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x=1,\quad \coth^2 x-\operatorname{csch}^2 x=1;$$

$$\cosh x+\sinh x=e^x,\quad \cosh x-\sinh x=e^{-x};$$

$$\sinh(-\theta)=-\sinh\theta,\ \cosh(-\theta)=\cosh\theta,\ \tanh(-\theta)=-\tanh\theta,\ \coth(-\theta)=-\coth\theta.$$

2. 双曲函数的基本公式

1° 和差的双曲函数

$$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y,$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y,$$

$$\tanh(x\pm y)=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y},$$

$$\coth(x\pm y)=\frac{1\pm\coth x\coth y}{\coth x\pm\coth y}.$$

2° 双曲函数的和差

$$\sinh x\pm\sinh y=2\sinh\frac{x\pm y}{2}\cosh\frac{x\mp y}{2},$$

$$\cosh x+\cosh y=2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2},$$

$$\cosh x-\cosh y=2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2},$$

$$\tanh x\pm\tanh y=\frac{\sinh(x\pm y)}{\cosh x\cosh y},$$

$$\coth x\pm\coth y=\pm\frac{\sinh(x\pm y)}{\sinh x\sinh y},$$

3° 倍角公式

$$\sinh 2x=2\sinh x\cosh x=\frac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x},$$

$$\cosh 2x=\sinh^2 x+\cosh^2 x=1+2\sinh^2 x=2\cosh^2 x-1=\frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x},$$

$$\tanh 2x=\frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x},$$

$$\coth 2x=\frac{1+\coth^2 x}{2\coth x}.$$

4° 半角公式

$$\sinh\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\cosh x-1}{2}}\text{（若 }x>0\text{，则取“+”；若 }x<0\text{，则取“-”）},$$

$$\cosh\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\cosh x+1}{2}},$$

$$\tanh\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\cosh x-1}{\cosh x+1}}=\frac{\sinh x}{\cosh x+1}=\frac{\cosh x-1}{\sinh x},$$

$$\coth\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\cosh x+1}{\cosh x-1}}=\frac{\sinh x}{\cosh x-1}=\frac{\cosh x+1}{\sinh x}.$$

5° 双曲函数棣莫弗公式

$$(\cosh x\pm\sinh x)^n=\cosh nx\pm\sinh nx\ (n\in\mathbf{N}).$$

5.3　反双曲函数的定义及图像

1. 反双曲函数的定义

反双曲正弦　若 $x=\sinh y$，则

$$y=\operatorname{Arsinh}x;$$

反双曲余弦　若 $x=\cosh y$，则

$$y=\operatorname{Arcosh}x;$$

反双曲正切　若 $x=\tanh y$，则

$$y=\operatorname{Artanh}x;$$

反双曲余切　若 $x=\coth y$，则

$$y=\operatorname{Arcoth}x.$$

2. 反双曲函数的对数表达式

$$\operatorname{Arsinh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$\operatorname{Arcosh}x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1),$$

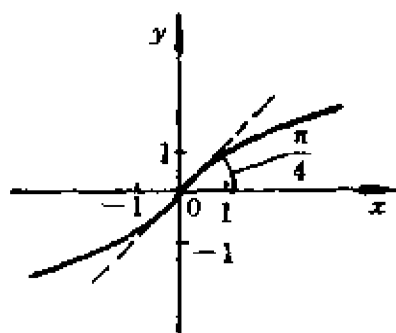
$$\operatorname{Artanh}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (|x|<1),$$

$$\operatorname{Arcoth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\ (|x|>1).$$

3. 反双曲函数的图像

反双曲正弦曲线

$y=\operatorname{Arsinh}x$

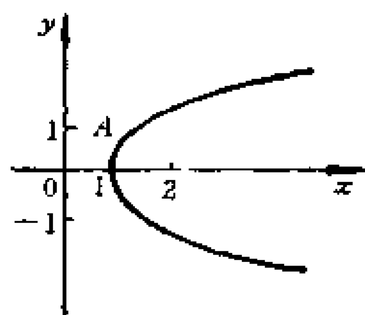


曲线关于原点对称.
拐点(同曲线对称中心)：
$O(0,0)$，该点切线斜率为 1

图 5-7

反双曲余弦曲线

$y=\operatorname{Arcosh}x$

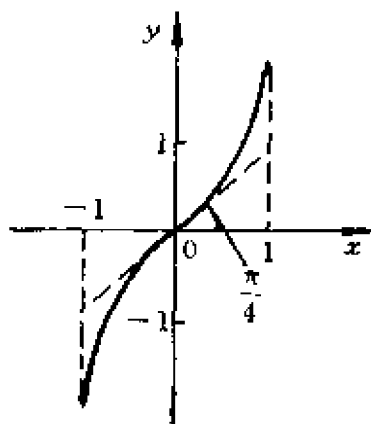


曲线关于 x 轴对称.
顶点：$A(1,0)$

图 5-8

反双曲正切曲线

$y = \mathrm{Artanh}x$

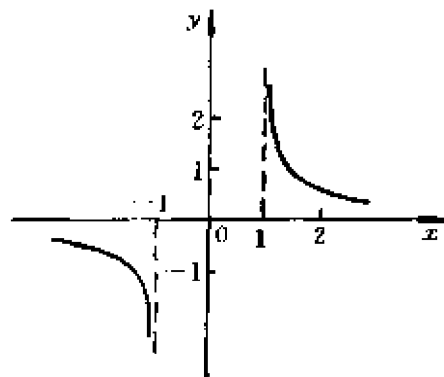


曲线关于原点对称.
拐点(同曲线对称中心):
$O(0,0)$,该点切线斜率为 1

图 5-9

反双曲余切曲线

$y = \mathrm{Arcoth}x$



曲线关于原点对称.
不连续点:$x = \pm 1$
渐近线:$y = 0, x = \pm 1$

图 5-10

5.4 反双曲函数的关系

1. 反双曲函数的相互关系

$$\mathrm{Arsinh}x = \varepsilon\,\mathrm{Arcosh}\sqrt{x^2+1} = \mathrm{Artanh}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{Arcoth}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

$$\mathrm{Arcosh}x = \varepsilon\,\mathrm{Arsinh}\sqrt{x^2-1} = \varepsilon\,\mathrm{Artanh}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \varepsilon\,\mathrm{Arcoth}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\mathrm{Artanh}x = \mathrm{Arsinh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \varepsilon\,\mathrm{Arcosh}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcoth}\frac{1}{x},$$

$$\mathrm{Arcoth}x = \mathrm{Arsinh}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \varepsilon\,\mathrm{Arcosh}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{Artanh}\frac{1}{x},$$

其中,若 $x>0$,则 $\varepsilon=1$;若 $x<0$,则 $\varepsilon=-1$.

2. 反双曲函数的基本公式

$$\mathrm{Arsinh}x \pm \mathrm{Arsinh}y = \mathrm{Arsinh}(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}),$$

$$\mathrm{Arcosh}x \pm \mathrm{Arcosh}y = \mathrm{Arcosh}(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}),$$

$$\mathrm{Artanh}x \pm \mathrm{Artanh}y = \mathrm{Artanh}\frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$$

附录 3

欧氏几何

编　者　郑隆炘
审校者　周春荔

目　录

1 直 线 (段)

1.1 点和直线

1. 对体、面、线、点的认识

各方面都有限界的空间部分称为体,空间相邻两区域的公共部分称为面.一个面上相邻两区域的公共部分称为线,一线上相邻两部分所公有的称为点.点、线、面、体的任何集合,称为图形.

2. 直线(段)的性质(公理)

1° 两点决定一条直线.

2° 所有连结两点的线中,线段最短.

3° 经过已知直线外的一点,有且仅有一条直线和已知直线平行.

4° 经过一点有且仅有一条直线垂直于已知直线.

5° 从直线外一点到这条直线上各点所连结的线段中,和这条直线垂直的线段最短.

1.2 相交线和平行线

1. 角的性质

1° 角平分线上任意一点到两边等距.

2° 若一角的两边分别平行于另一角的两边,则两角相等或互补.

3° 同角的余(补)角相等.

2. 对顶角的性质与判定

1° 对顶角的性质　对顶角相等;对顶角相邻两角互补;对顶角相邻两角的平分线互相垂直.

2° 对顶角的判定　若一角的两边是另一个角的两边的反向延长线,则这两个角是对顶角.

3. 线段垂直平分线的性质与判定

1° 线段垂直平分线的性质　线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.

2° 线段垂直平分线的判定　距线段两端有等距离的点的集合,是线段的垂直平分线.

4. 平行线的性质与判定

(1)性质

1° 两平行线的内错角相等;同位角相等;同旁内角互补.

2° 两平行线间的平行线段相等,且距离处处相等.

(2)判定

1° 若两直线被第三直线所截,内错角相等,或同位角相等,或同旁内角互补,

则两直线平行.

2° 若 $a /\!/ b, c /\!/ b$,则 $a /\!/ c$.

3° 若 $a \perp c, b \perp c$,则 $a /\!/ b$.

1.3 成比例线段

1. 比例的性质定理

设 $a, b, c, d, \cdots, p, q$ 为线段,则有如下的定理:

1° 基本定理

若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,则 $ad = bc$.

2° 合比、分比、合分比定理

若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,则

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

3° 等比定理

若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \cdots = \frac{p}{q}$ 则 $\frac{a+c+\cdots+p}{b+d+\cdots+q} = \frac{a}{b}$.

2. 成比例线段

1° 平行线分线段成比例定理 两直线被一组平行线所截得的线段对应成比例.

2° 分线段成比例的两直线定理 若两条相交直线被另外两条直线所截,截得的对应线段成比例,则另外两条直线平行.

2 三 角 形

2.1 三角形中的主要线段

1. 三角形的边的垂直平分线和外心

三角形的 3 条边的垂直平分线相交于一点,这一点到三角形各顶点的距离都相等,这点叫三角形的外心(即外接圆的圆心).

2. 三角形的角平分线和内心

三角形的 3 个内角的平分线相交于一点,这一点到三角形各边的距离相等,这点叫三角形的内心(即内切圆的圆心).

3. 三角形的中线和重心

三角形的 3 条中线相交于一点,这点到各边中点的距离等于这边上中线的 1/3,这点叫三角形的重心.

4. 三角形的高和垂心

三角形的三条高相交于一点,这点叫三角形的垂心.

2.2　三角形中的边与角的关系

1. 3条边的关系

1° 三角形任意两边的和大于第三边.

2° 三角形任意两边的差小于第三边.

2. 内角与外角

1° 三角形3个内角的和等于180°.

2° 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

3. 边与角的关系

1° 三角形中,较大的边所对的角较大.

2° 三角形中,较大的角所对的边较大.

4. 中位线

1° 三角形的中位线平行于第三边,且等于它的一半.

2° 过三角形一边的中点而与另一边平行的直线平分第三边.

2.3　特殊三角形的性质与判定

1. 等腰三角形

1° 等腰三角形的性质　两底角相等;顶角平分线即底边上的中线和高.

2° 等腰三角形的判定　有两个角相等的三角形是等腰三角形;高、中线、角平分线中有两者相重的三角形是等腰三角形.

2. 直角三角形

1° 直角三角形的性质　两锐角互为余角;斜边上的中线等于斜边的一半;两直角边平方的和等于斜边的平方(勾股定理);一锐角是30°,则此角的对边是斜边的一半,反之,若一角的对边是斜边的一半,则对角为30°.

2° 直角三角形的判定　两个角互为余角的三角形是直角三角形;有一条边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形;两边的平方和等于第三边的平方的三角形(勾股定理的逆定理)是直角三角形.

2.4　两个三角形的全等与相似

1. 两个三角形全等

1° 全等三角形的性质　对应角相等;对应线段(边、高、中线、角平分线、…)相等;周长相等;面积相等.

2° 全等三角形的判定　两边和它们的夹角对应相等(SAS)的两个三角形是全等三角形;两角和它们的夹边对应相等(ASA)的两个三角形是全等三角形;三边对应相等(SSS)的两个三角形是全等三角形;有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形(HL)是全等三角形.

2. 两个三角形相似

1° 相似三角形的性质　对应角相等;对应线段(边、高、中线、角平分线、…)成比例;周长比等于相似比;面积比等于相似比(对应边之比)的平方.

2° 相似三角形的判定　两角对应相等的两个三角形是相似三角形；两边对应成比例，夹角相等的两个三角形是相似三角形；三边对应成比例的两个三角形是相似三角形.

2.5　三角形度量计算公式

1. 直角三角形

设直角三角形如图 2-1 所示，则

1° 周长 l

$$l = a + b + c = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2° 面积 S

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{a^2}{2}\tan B = \frac{c^2}{4}\sin 2A = \frac{c^2}{4}\sin 2B.$$

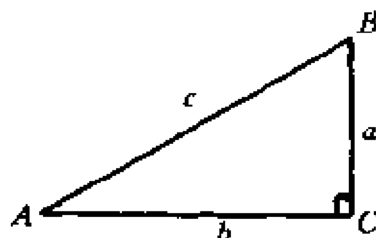


图 2-1

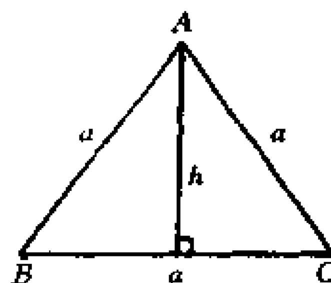


图 2-2

2. 等边三角形

设等边三角形如图 2-2 所示，则

1° 周长 l

$$l = 3a.$$

2° 高 h

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

3° 外接圆半径 R 与内切圆半径 r

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = 2r, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

4° 面积 S

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

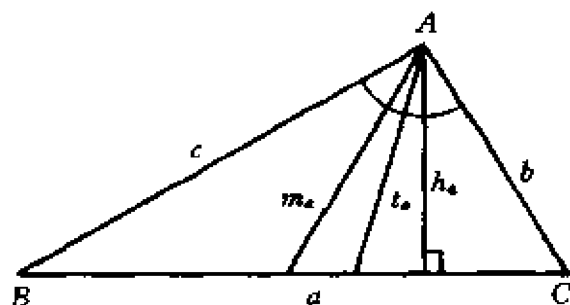


图 2-3

3. 一般三角形

设一般三角形如图 2-3 所示，则

1° 高 h_a

$$h_a = b\sin C = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2}.$$

2° 中线 m_a

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}.$$

3° 角平分线 t_a

$$t_a=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

4° 外接圆半径 R

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4S}.$$

5° 内切圆半径 r

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$=p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

6° 面积 S

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=2R^2\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{2}ah_a=rp=\frac{abc}{4R}.$$

3 四　边　形

3.1 平行四边形、矩形、菱形与正方形

1° 平行四边形的性质　对边相等;对角相等;对角线互相平分.

2° 矩形的性质　具有平行四边形的一切性质;四个角都是直角;对角线相等.

3° 菱形的性质　具有平行四边形的一切性质;四条边都相等;对角线互相垂直,且每一条对角线平分一组对角.

4° 正方形的性质　具有平行四边形、矩形、菱形的一切性质;对角线与边的夹角为45°.

3.2 梯　　形

1° 一般梯形的性质　一组对边平行,另一组对边不平行;中位线平行于底边且等于两底和的一半.

2° 等腰梯形的性质　具有一般梯形的性质;两腰相等;两底角相等;对角互补;对角线相等;以两底的中点连线为对称轴的对称图形.

3° 直角梯形的性质　具有一般梯形的性质;夹直角的腰垂直于底.

3.3 四边形度量计算公式

1. 平行四边形

设平行四边形如图 3-1 所示，则

1° 周长 l

$$l = 2(a+b).$$

2° 对角线 d_1, d_2

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2+b^2).$$

3° 边长 a

$$a = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2h} = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2b\sin\alpha}.$$

4° 面积 S

$$S = ah = ab\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi.$$

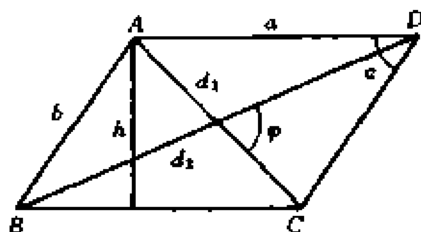


图 3-1

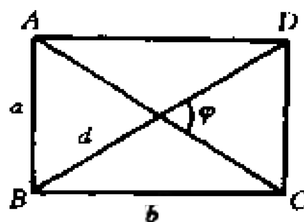


图 3-2

2. 矩形、菱形与正方形

(1)矩形　设矩形如图 3-2 所示，则

1° 周长 l

$$l = 2(a+b).$$

2° 对角线 d

$$d = \sqrt{a^2+b^2}.$$

3° 面积 S

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi.$$

(2)菱形　设菱形如图 3-3 所示，则

1° 周长 l

$$l = 4a.$$

2° 对角线 d_1, d_2

$$d_1 = 2a\cos\frac{\theta}{2}, \quad d_2 = 2a\sin\frac{\theta}{2}, \quad d_1 d_2 = 2a^2\sin\theta.$$

3° 面积 S

$$S = ah = a^2\sin\theta = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

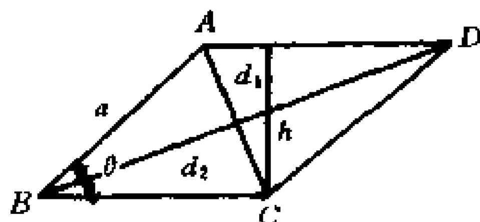


图 3-3

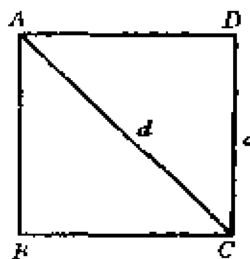


图 3-4

(3)正方形　设正方形如图 3-4 所示,则

1° 周长 l

$$l = 4a.$$

2° 对角线 d

$$d = \sqrt{2}a.$$

3° 边长 a

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

4° 面积 S

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

3. 梯形

设梯形如图 3-5 所示,则

1° 周长 l

$$l = a + b + c + d.$$

2° 边长 a,c

$$a = b + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}c,$$

$$c = (a - b)\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

3° 面积 S

$$S = \frac{a + b}{2}h = \frac{1}{2}(a + b)c\sin\alpha = \frac{1}{2}pq\sin\varphi.$$

4. 任意四边形

设任意四边形如图 3-6 所示,则

1° 周长 l

$$l = a + b + c + d.$$

2° 面积 S

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2\sin\varphi = \frac{1}{2}d_2(h_1 + h_2)$$

$$= \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd\cos\alpha},$$

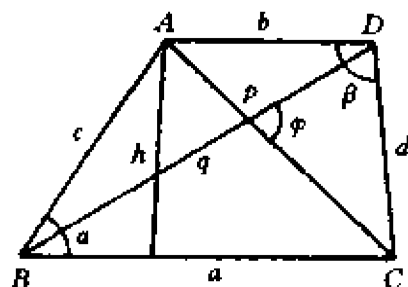


图3-5

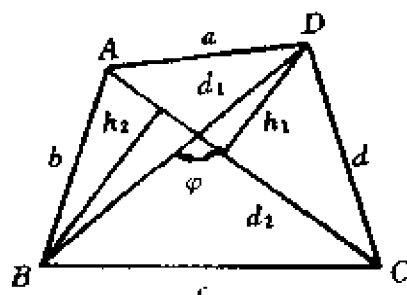


图3-6

其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$，$\alpha=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$ 或 $\alpha=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.

3.4 圆内接四边形与圆外切四边形

1. 圆内接四边形

圆内接四边形如图3-7所示.

1° 圆内接四边形的性质　对角互补；外角等于其内对角；两条对角线被其交点所分成的两条线段之积相等.

2° 圆内接四边形的判定　对角互补的四边形是圆内接四边形；一外角等于它的内对角的四边形是圆内接四边形；四顶点到某定点有等距离的四边形是圆内接四边形；两条对角线被其交点所分成的两条线段的积相等的四边形是圆内接四边形.

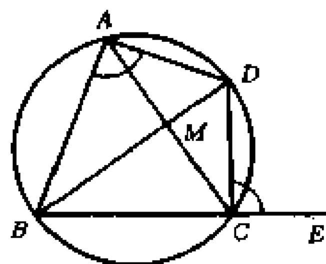


图3-7

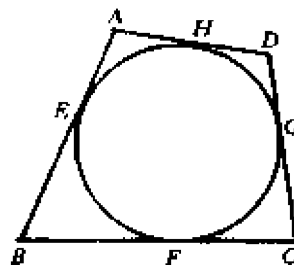


图3-8

2. 圆外切四边形

圆外切四边形如图3-8所示.

1° 圆外切四边形的性质　两组对边之和相等.

2° 圆外切四边形的判定　两组对边之和相等的四边形是圆外切四边形.

4 多边形与圆

4.1 多边形的性质与相似多边形

1. 多边形的性质

1° n 边形的内角和等于$(n-2)\cdot180°$；

2° n 边形的外角和等于 $360°$；

3° n 边形有 C_n^2-n 条对角线.

2. 相似多边形

1° 相似多边形的性质　相似多边形周长的比等于相似比；相似多边形面积的比等于相似比的平方；从两个相似多边形一对对应顶点所作的各对角线把两个多边形分成个数相同的排列顺序相同的相似三角形.

4.2 正多边形

1. 正多边形的性质

1° 各边相等，各角也相等；

2° 凡边数相同的正多边形都相似；

3° 每个正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，且两圆同心(此心即正多边形的中心)；

4° 正 n 边形的一个内角 $\alpha=\dfrac{(n-2)\cdot180°}{n}$，中心角为$\dfrac{360°}{n}$；

5° 正 n 边形的边长

$$a_n=2R\sin\frac{180°}{n}=2r\tan\frac{180°}{n},$$

其中 R、r 分别为外接圆、内切圆的半径，内切圆半径又称为正多边形的边心距；

6° 正 n 边形的面积

$$S=\frac{n}{2}a_nr=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360°}{n}.$$

正多边形外接圆半径与各量间关系如表 4-1 所示.

表 4-1

n	圆心角	边　长	周　长	面　积
3	$120°$	$\sqrt{3}R$	$2R\cdot2.59807621\cdots$	$\frac{3R^2}{4}\sqrt{3}\approx1.29990R^2$
4	$90°$	$\sqrt{2}R$	$2R\cdot2.82842712\cdots$	$2R^2$
5	$72°$	$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}R$	$2R\cdot2.93892626\cdots$	$\frac{5R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\approx2.3776R^2$
6	$60°$	R	$2R\cdot3$	$\frac{3R^2}{2}\sqrt{3}\approx2.5981R^2$
8	$45°$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}R$	$2R\cdot3.06146746\cdots$	$2R^2\sqrt{2}\approx2.8284R^2$
10	$36°$	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R$	$2R\cdot3.090169923\cdots$	$\frac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\approx2.9389R^2$

续表

n	圆心角	边　长	周　长	面　积
12	$30°$	$\sqrt{2-\sqrt{3}}R$	$2R\cdot 3.10582854\cdots$	$3R^2$
15	$24°$	$\frac{R}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$	$2R\cdot 3.11867536\cdots$	$\frac{15R^2}{8}\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}$ $\approx 3.0505R^2$
16	$22°30'$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}R$	$2R\cdot 3.12144515\cdots$	$4R^2\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx 3.0615R^2$
17	$21°10'35^{5}/17''$	$\approx 0.36749904R$	$2R\cdot 3.12374180\cdots$	$\approx 3.0706R^2$
20	$18°$	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}R$	$2R\cdot 3.12868930\cdots$	$\frac{5R^2}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}\approx 3.0902R^2$
24	$15°$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}R$	$2R\cdot 3.13262862$	$6R^2\sqrt{2-\sqrt{3}}\approx 3.1058R^2$
一般		$S_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-S_n^2}}$		

4.3　圆的基本性质与有关角

在平面上与定点的距离等于定长的点的轨迹叫圆.

1. 圆的确定与对称性

1° 过不在同一直线上的3个点可以确定一个圆.

2° 圆是轴对称图形,经过圆心的任一直线都是对称轴;圆也是中心对称图形,圆心是对称中心.

2. 直径、弦与弧之间的关系

(1)垂直于弦的直径平分这条弦,并且平分弦所对的两条弧.

(2)一条直线,如果它具有:

1° 经过圆心;

2° 垂直于弦;

3° 平分弦;

4° 平分弦所对的劣弧;

5° 平分弦所对的优弧

等5个性质中的任何两个性质时,这条直线就具有其余的3个性质.

3. 弦、弧、圆心角与弦心距之间的关系

1° 在同圆或等圆中,两个圆心角和它所对的两条弧、两条弦以及两个弦心距这4组量中,如果其中任意一组量相等,其他3组也都相等;如果其中任意一组不等,其他3组也不等.

2° 在弧(指劣弧)、弦和圆心角3组量中,如果任何一组量的一个量较大,其他两组的对应量也较大.

3° 在弦和弦心距这两组量中，任何一组量的一个量较大，则另一组的对应量反而较小.

4. **圆的有关角**

1° 圆心角的度数等于它所对的弧的度数.

2° 圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半.

3° 半圆上的圆周角是直角.

4° 同弧所对的圆周角相等.

5° 弦切角的度数等于它所夹的弧的度数的一半.

6° 弦切角等于同弧上的圆周角.

7° 圆内角的度数等于它所对的弧与它对顶角所对的弧的度数之和的一半.

8° 圆外角的度数等于它所截两条弧的度数之差的一半.

4.4 直线与圆、圆与圆

1. **位置关系及其性质**

直线与圆、圆与圆位置关系如表 4-2 所示.

2. **圆幂定理**

表 4-2

<table>
<tr><th>位置关系</th><th>直线与圆</th><th colspan="2">圆与圆</th></tr>
<tr><td rowspan="2">相离</td><td rowspan="2">$d_1 > R$</td><td>内含</td><td>1. $d_2 < R - r$ ($R > r$)
2. $d_2 = 0$，两圆同心</td></tr>
<tr><td>外离</td><td>1. $d_2 > R + r$
2. 有两外公切线，且长相等
3. 有两内公切线，且长相等</td></tr>
<tr><td rowspan="2">相切</td><td rowspan="2">1. $d_1 = R$
2. 切线垂直于过切点的半径
3. 过圆心垂直于切线的直线过切点
4. 从圆外一点引的两切线，其长相等，这点与圆心的连线平分两切线的夹角
5. 过半径的外端垂直于半径的直线是切线</td><td>外切</td><td>1. $d_2 = R + r$
2. 连心线过切点
3. 有两外公切线且长相等，有一内公切线</td></tr>
<tr><td>内切</td><td>1. $d_2 = R - r$ ($R > r$)
2. 连心线过切点
3. 有一外公切线</td></tr>
<tr><td>相交</td><td>1. 过圆心垂直于弦的直线平分这条弦及其所对的两条弧
2. 弦的垂直平分线过圆心
3. 两平行直线之间所夹的弦相等</td><td colspan="2">1. $R - r < d_2 < R + r$ ($R > r$)
2. 连心线垂直平分公共弦
3. 有两外公切线，其长相等</td></tr>
</table>

注：R，r 为半径；d_1 为圆心到直线的距离，d_2 为两圆圆心之间的距离.

1° 相交弦定理 圆的两弦 AB 和 CD 相交于 P，则 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$（见图4-1）.

2° 割线定理 从圆外一点 P 向圆引两条割线分别与圆相交于 A、B 和 C、D，则 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$（见图4-2）.

3° 切割线定理 从圆外一点 P 引圆的切线 PT 和割线 PAB，则 $PT^2 = PA \cdot PB$（见图4-3）.

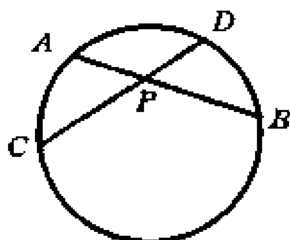


图4-1

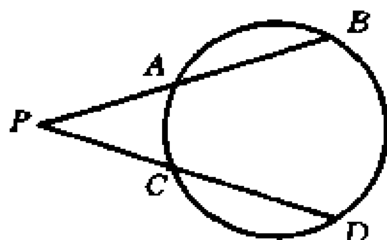


图4-2

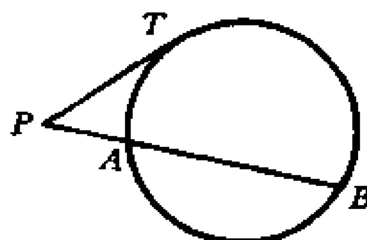


图4-3

4.5 圆的度量计算公式

设半径为 r，直径为 d，周长为 c，面积为 S，弧长为 s，弦长为 l，圆心角为 θ，拱高为 h.

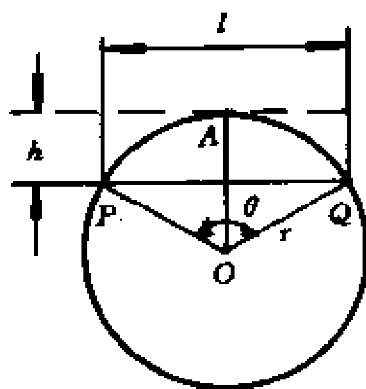


图4-4

1. 圆与圆弧

1° 圆（见图4-4）

$$d = 2r,$$

$$c = 2\pi r = \pi d,$$

$$S = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{c^2}{4\pi} = \frac{cd}{4}.$$

其中 S 为圆面积.

2° 圆弧

设 $\widehat{PAQ} = s$，$\widehat{PA} = \widehat{AQ}$，弦 $PA = l'$，θ 以弧度计，则

$$s = r\theta = \frac{d\theta}{2},$$

$$s \approx \frac{8l' - l}{3}（当 \theta = \pi 时，误差小于 1.25\%），$$

$$l = 2\sqrt{2hr - h^2} \quad 或 \quad l = 2r\sin\frac{\theta}{2}.$$

$$r = \frac{s}{\theta} = \frac{4h^2 + l^2}{8h} = \frac{l}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$h = r \mp \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}（当 \theta \leqslant \pi 时用“-”号，当 \theta > \pi 时用“+”号），$$

其中 l 为弦 PQ 的长，h 为弓形 PAQ 的高.

2. 扇形、弓形与月牙形

1° 扇形（见图4-5）

$$S=\frac{1}{2}sr=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{\pi\theta^\circ r^2}{360^\circ},$$

$$s=\sqrt{l^2+\frac{16}{3}h^2},$$

其中 S 是扇形面积，θ 和 θ° 分别表示以弧度和度为单位的圆心角.

图 4-5

2° 弓形(见图 4-6)

$$h=2r\sin^2\frac{\theta}{4}=\frac{1}{2}l\tan\frac{\theta}{4},$$

$$S=\frac{\pi r^2\theta^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}l\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta).$$

其中 S 是弓形面积.

3° 月牙形(见图 4-7)

$$S=r^2\left(\pi-\frac{\pi\theta^\circ}{180^\circ}+\sin\theta\right),$$

其中 S 为月牙形面积.

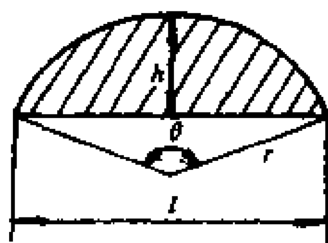


图 4-6

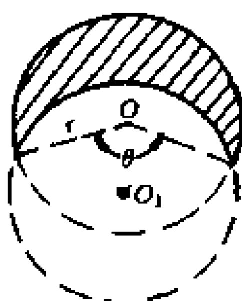


图 4-7

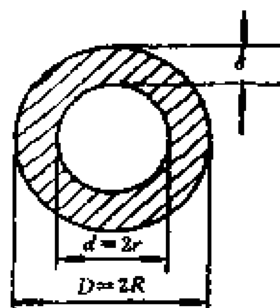


图 4-8

3. **环形**

环形如图 4-8 所示.

$$S=\pi(R^2-r^2)=2\pi\overline{R}\delta,$$

其中 S 为环形面积，R 为大圆半径，r 为小圆半径，$\overline{R}=\frac{1}{2}(R+r)$，$\delta=R-r$.

5 轨迹与作图

5.1 轨　迹

1. **点的轨迹**

具有某种性质的点的集合，叫做具有这种性质的点的轨迹.

轨迹上所有的点，都具有这种性质；具有这种性质的点都在轨迹上.

2. 基本轨迹定理

1° 和已知线段的两个端点的距离相等的点的轨迹，是这线段的垂直平分线.

2° 和已知角的两边的距离相等的点的轨迹，是这个角的平分线.

3° 和一个已知点的距离等于已知长的点的轨迹，是以已知点为圆心，已知长为半径的圆.

3. 求轨迹的一般步骤

1° 解　探求轨迹的形状和位置；按所探求的轨迹形状和位置确定所求轨迹.

2° 证明　证明所求出的图形上任意点，即轨迹上的任意点具有所要求的性质；证明具有所要求的性质的点都在图形上.

3° 讨论　补足与已求出轨迹同类的轨迹，或去掉不合要求的点；当条件特殊化时，研究轨迹的形状和位置的变化.

5.2 作　　图

1. 基本作图

基本作图如表 5-1 所示.

表 5-1

基本作图	已　知	作　法
1. n 等分已知线段 $x=\frac{a}{n}$	a	A, a, B, x, A_1, A_2, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n
2. 已知两直角边求作斜边 $x=\sqrt{a^2+b^2}$	a b	b, x, a
3. 已知斜边、一直角边，求作另一直角边 $x=\sqrt{c^2-a^2}$	a c	a, c, x
4. 求作两线段的比例中项 $x^2=ab$	a b	x, a, b
5. 求作三线段的第四比例项 $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$	a b c	a, b, c, x

2. 作图的步骤

1° 分析 先假定图形或图形上的点已经作出，寻求或发现作图方法，同时也可以求得作图可能的必要条件.

2° 作法 根据分析结果，在掌握基本作图的基础上，按作图规定正确作图，并叙述作图步骤.

3° 证明 证明所作图形为要求作的图形，并满足所有条件.

4° 讨论 讨论适合题意的解数以及无解或无限多解的情况.

3. 常见的作图法

1° 轨迹交截法 为了求得某一合符条件的点的位置，往往是先找出合符部分条件的点的轨迹，再求出合符另一部分条件的点的轨迹，两个轨迹的交点就是所求的点.这种方法多用于求点的作图.

2° 平移法 在作图分析中，可利用平行四边形的性质，将某一线段、某一部分图形平移到某一位置，构成作图的条件.这种作图方法称为平移法.此法常用于等长或定长线段的作图.

3° 对称法 与 2° 一样，也是一种移动法.这种移动主要是利用图形的对称性，便能找到作图的方法.此法常用于等长、等角与最大最小问题的作图.

4° 旋转法 在进行几何作图时，当直接作图发生困难时，可以先在适当位置作出其全同图形，然后再将所作全同图形旋转某一角度，从而得到所求图形.此法常用于等长、等角、等形方面的作图.

5° 放缩法 在几何作图时，当所求图形直接作图不太方便时，可以先在适当位置作出图形的相似形，然后再经放大或缩小，得到所作的图形.此法常用于图形的内接形作图.

6° 代数解析法 在某些几何作图中，常借助于代数式的求解来辅助作图任务的完成.

6 直线与平面

6.1 平　　面

1. 平面的概念

平面通常用一个平行四边形来表示，它是平坦、无厚度，可通向各方无限延伸的.

2. 平面的基本性质

(1)三条公理

1° 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

2° 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

3° 不共线的3点确定一个平面.

(2)确定平面的条件

1° 过不在同一直线上的3点.

2° 过一直线和此直线外的一点.

3° 过两相交直线.

4° 过两平行直线.

6.2　直线和平面的位置关系

1. 直线和平面的位置关系

直线和平面的位置关系如表6-1所示.

2. 两直线平行的判定法

表6-1

位置关系		直线和直线		直线和平面	平面和平面
重合(或直线在平面内)		共面直线	$a(b)$	α a	$\alpha(\beta)$
相交	斜交		b O a	l α O	β l α
	垂直		b a O	l α O	β α
平　　行			m n	a α	α β
异面直线			b O a α		

1° 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

2° 如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和交线平行.

3° 如果两条直线同时垂直于一个平面,那么这两条直线平行.

4° 如果两个平行平面同时和第三个平面相交,那么它们的交线平行.

5° 3 个平面两两相交于 3 条直线,如果其中两条平行,那么第三条也和它们平行.

3. 两直线垂直的判定法

1° 若一条直线垂直于一个平面,则必和平面内的任何一条直线垂直.

2° 如果一条直线和两条平行直线中的一条垂直,那么也和另一条垂直.

3° 如果一条直线平行于一个平面,那么这个平面的任何垂线都和这条直线垂直.

4° 三垂线定理　在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直.

5° 三垂线定理的逆定理　在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线垂直,那么它也和这条斜线在该平面内的射影垂直.

4. 直线和平面平行与垂直的判定法

1° 如果平面外一条直线和平面内一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行.

2° 两个平行平面中的一个平面内的直线,一定平行于另一个平面.

3° 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面.

4° 如果两条平行线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于这个平面.

5° 如果两个平面垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

6° 如果两个相交的平面都垂直于第三个平面,那么它们的交线也垂直于第三个平面.

5. 平面和平面平行与垂直的判定法

1° 如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面,那么这两个平面平行.

2° 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直.

6.3　直线和平面的度量关系

1. 夹角

1° 两条异面直线所成的角　过空间任一点,分别作两条异面直线的平行线,所得两相交直线夹的角叫做这两条异面直线所成的角.

2° 直线和平面所成的角　平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角,叫做这条直线和这个平面所成的角.

3° 二面角的平面角　以二面角的棱上任意一点为端点,在两个面内分别作垂直于棱的两条射线,这两条射线所成的角称作二面角的平面角.二面角的大小,可以用它的平面角度量.

2. **距离**

1° 两条异面直线的距离　和两条异面直线都垂直相交的直线称为两条异面直线的公垂线;两异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度称作两条异面直线的距离.

2° 直线和与它平行平面的距离　一条直线和一个平面平行,这条直线上任意一点到平面的距离,称作这条直线和与它平行平面的距离.

3° 两个平行平面的距离　和两个平行平面同时垂直的直线,称作两个平行平面的公垂线;它夹在这两个平行平面间的部分,称作这两个平行平面的公垂线段.公垂线段的长度称作两个平行平面的距离.

7　多面体与曲面体

7.1　多　面　体

符号:A 为全面积,A_c 为侧面积,A_d 为底面积,V 为体积.

1. **棱柱体**

1° 棱柱体的概念　有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的几何体称作棱柱体.

2° 棱柱体的性质　侧棱都相等,侧面是平行四边形;两个底面与平行于底面的截面是全等的多边形.

3° 棱柱体的分类　以底面多边形的边数为标准分类,棱柱体可分为三棱柱、四棱柱、五棱柱、…….以侧棱与底面是否垂直为标准分类,棱柱体可分为直棱柱、斜棱柱.底面为正多边形的直棱柱称作正棱柱.

4° 棱柱体的面积与体积公式

棱柱体的面积与体积公式如表 7-1 所示.

表 7-1

1. 一般棱柱体	斜棱柱体(左图) $A_c=\dfrac{(a+b+c+\cdots)h}{\sin\alpha}$, $V=A_dh$ 正棱柱体(右图) $A_c=(a+b+c+\cdots)h$, $V=A_dh$

续表

2. 楔体	$V=\frac{1}{6}(2a+a_1)bh$
3. 截头棱柱体	截头多边形棱柱体(左图) D,E 为两端多边形的重心，DE 距离为 l，$V=A_z l$ 截头三角形棱柱体(右图) $V=A_z l=\frac{1}{3}(a+b+c)\times A_z$. A_z 为正交截面积
4. 平行六面体，正六面体，立方体．	平行六面体 $A=2(ab\sin\alpha+bc\sin\gamma+ac\sin\beta)$, $V=A_d h=abc\sin\alpha\sin\beta$ 正六面体 $A=2(ab+bc+ac)$, $V=abc$, $d^2=a^2+b^2+c^2$. 立方体($a=b=c$ 的正六面体) $V=a^3$, $A=6a^2$, $d^2=3a^2$

2. 棱锥体

1° 棱锥体的概念　只有一个面是多边形，其余各面为共顶点的三角形所围成的几何体称作棱锥体．

2° 棱锥体的性质　若棱锥被平行于底面的平面所截，则截面与底面是相似多边形；截面与底面的面积之比等于截得棱锥的高与原棱锥的高的比．

3° 棱锥体的分类 以底面的边数为标准分类，棱锥可分为三棱锥、四棱锥、五棱锥、…….以底面是否是正多边形、且顶点在底面的射影是底面的中心为标准分类，棱锥可分为正棱锥与非正棱锥.

4° 棱锥体的面积与体积公式

棱锥体的面积与体积公式如表 7-2 所示.

表 7-2

1. 四面体	$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ (取行列式绝对值.) $V^2=\frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & f^2 & e^2 & a^2 & 1 \\ f^2 & 0 & d^2 & b^2 & 1 \\ e^2 & d^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
2. 棱锥体	一般棱锥体 $V=\frac{1}{3}A_d h$ 正棱锥体 $a=b=c=\cdots$，TO 通过底多角形的中心 $V=\frac{1}{3}A_d h$

3. **棱台体(平截头正棱锥体)**

1° 棱台体的概念 用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面和截面之间的部分称做棱台.

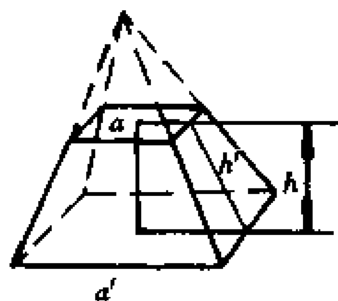


图 7-1

2° 正棱台的性质 侧棱相等.侧面是全等的等腰梯形；两底面及平行于底面的截面是相似多边形；两底面中心连线、相应的边心距和斜高组成一个直角梯形；两底面中心连线、侧棱和两底面相应的半径组成一个直角梯形.

3° 棱台体的面积与体积公式

棱台体如图 7-1 所示.

$$A_c=\frac{1}{2}(c+c')h',$$

其中 c、c' 是上、下底面的周长，h' 是斜高.

$$V=\frac{h}{3}\left(A_{\mathrm{d}}+A_{\mathrm{d}'}+\sqrt{A_{\mathrm{d}}A_{\mathrm{d}'}}\right),$$

其中 A_{d}、$A_{\mathrm{d}'}$ 是上、下底面的面积，h 是高.

4. 正多面体

1° 正多面体的概念　每个面都有相同边数的正多边形，在每个顶点都有相同数的棱，各棱的二面角以及每个顶点的面角都相等的凸多面体称做正多面体.

2° 正多面体的各个组成部分　正多面体只有 5 种：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体. 如表 7-3 所示.

表 7-3

名　称	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
直观图					
展开图					
界面	正三角形	正方形	正三角形	正五边形	正三角形
多面角	正三面角	正三面角	正四面角	正三面角	正五面角
面数	4	6	8	12	20
顶点数	4	8	6	20	12
棱数	6	12	12	30	30

3° 正多面体的性质　正多面体的各部分元素（所有的棱、面角、相邻两个面所成的二面角等）都各自相等；正多面体的中心到各个顶点的距离都相等，到各个面的距离也都相等；$F+V-E=2$，其中 F 为面数、V 为顶点数、E 为棱数，此为欧拉定理，对简单多面体（表面可以经过连续变形成为球面的多面体）均适用.

5. 拟柱体

1° 拟柱体的概念　所有的顶点都在两个平行平面内的多面体，称作拟柱体. 拟柱体如图 7-2 所示.

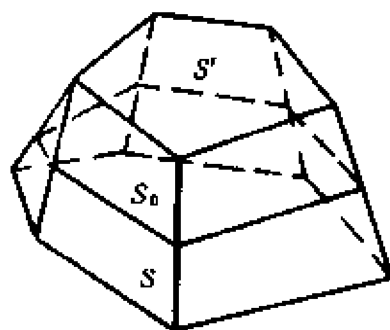


图 7-2

2° 拟柱体的体积公式

$$V=\frac{1}{6}h(S+4S_0+S'),$$

其中 S'、S 为上、下底面面积，S_0 为中截面面积.

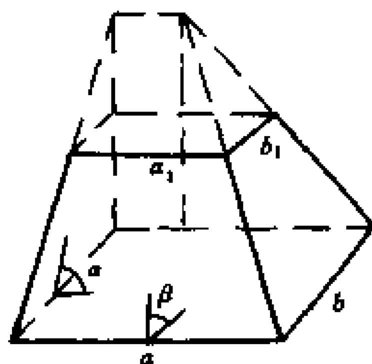


图 7-3

6. **方尖碑**

方尖碑也称截头方锥体，是拟柱体中的一种. 方尖碑如图 7-3 所示.

$$V=\frac{h}{6}[(2a+a_1)b+(2a_1+a)b_1]$$

$$=\frac{h}{6}[ab+(a+a_1)(b+b_1)+a_1b_1].$$

7.2 曲 面 体

符号：A 为全面积，A_c 为侧面积，A_d 为底面积，A_z 为与侧棱正交的截面积，h 为高，V 为体积.

1. **曲面柱体**

1° 圆柱体(见图 7-4)

$$A_c=2\pi Rh,$$
$$A=2\pi R(R+h),$$
$$V=\pi R^2h.$$

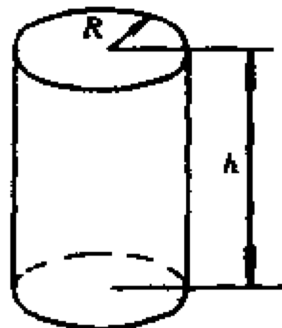


图 7-4

2° 曲面柱体(见图 7-5)

曲面柱体两底面平行.

$$A_c=cl,$$

其中 c 为截面周长.

$$V=A_dh.$$

3° 截头正圆柱(见图 7-6)

$$A_c=\pi R(h_1+h_2),$$

$$A=\pi R\left[h_1+h_2+R+\sqrt{R^2+\frac{(h_2-h_1)^2}{4}}\right],$$

$$V=\pi R^2+\frac{1}{2}(h_1+h_2).$$

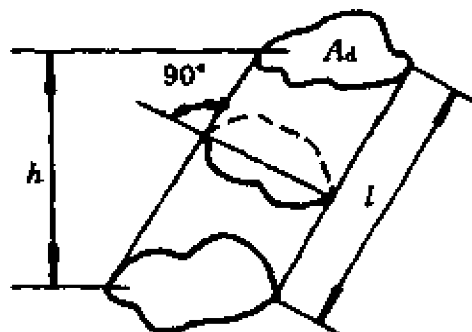


图 7-5

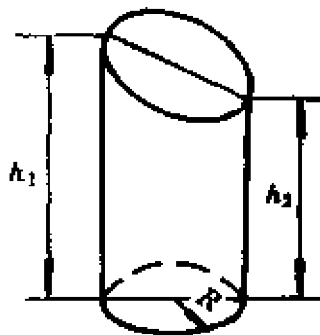


图 7-6

4° 蹄状体

正蹄状体(底部为半圆形)如图 7-7(a)所示.

$$V=\frac{2}{3}r^2h,\quad A_c=2rh,$$

$$\text{斜面面积}=\frac{1}{2}\pi r\sqrt{h^2+r^2},$$

$$\text{底面积}=\frac{\pi r^2}{2},$$

其中 r 为圆的半径.

一般蹄状体(底部大于或小于半圆形)如图 7-7(b)、(c)所示.

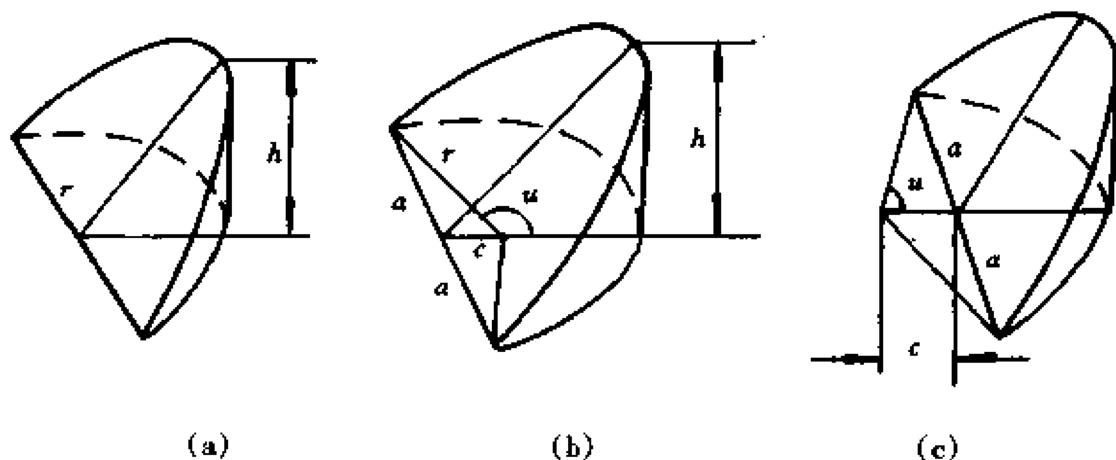


图 7-7

$$V=h\frac{\frac{2}{3}a^3\pm cB}{r\pm c}=\frac{ha\left(r^2-\frac{a^2}{3}\right)\pm r^2cu}{r\pm c},$$

$$A_c=h\frac{2ra\pm cs}{r\pm c}=\frac{2rh(a\pm cu)}{r\pm c},$$

其中 B 为底面积;s 为底的弧长;u 为 s 弧长的中心角的一半(用弧度计);底面积超过半圆时用 + 号,不及半圆时用 − 号.

2. **曲面锥体**

1° 圆锥体(见图 7-8)

$$A_c=\pi Rl=\pi R\sqrt{R^2+h^2},$$

$$A=\pi R(R+l),$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2h.$$

2° 锥体(见图 7-9)

$$V=\frac{1}{3}A_dh.$$

3° 截头正圆锥体(圆台体),如图 7-10 所示.

$$l=\sqrt{h^2+(R-r)^2},$$

$$A_c=\pi l(R+r),$$

$$V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr).$$

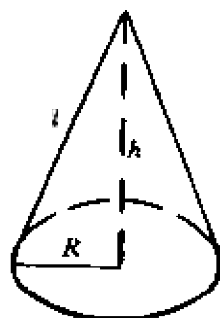


图 7-8

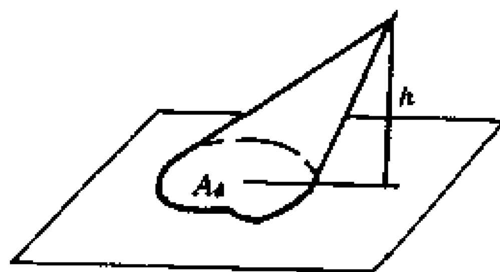


图 7-9

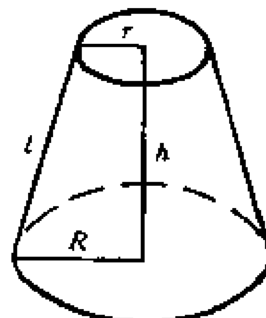


图 7-10

3. **球体**

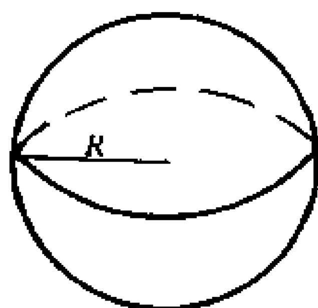


图 7-11

1° 球(见图 7-11)

$$A=4\pi R^2\approx 12.57R^2,$$

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3\approx 4.189R^3,$$

$$V=\frac{\pi d^3}{6}\approx 0.5236d^3,$$

$$d=2R.$$

2° 球冠与球扇形

球冠(见图 7-12)

$$a^2=h(2R-h),$$

$$A_c=2\pi Rh=\pi(a^2+h^2),$$

$$A=\pi(2Rh+a^2)=\pi(h^2+2a^2),$$

$$V=\frac{1}{6}\pi h(3a^2+h^2)=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h).$$

球扇形(见图 7-13)

$$A=\pi R(2h+a),$$

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

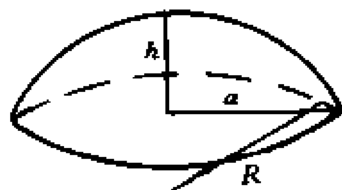


图 7-12

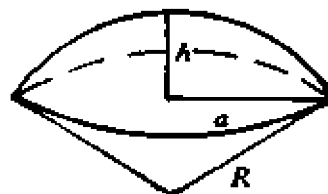


图 7-13

3° 球台(见图 7-14)

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2,$$
$$A_c = 2\pi Rh,$$
$$A = \pi(2Rh + a^2 + b^2),$$
$$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

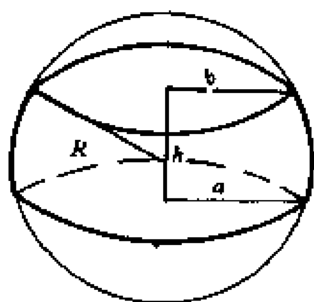


图 7-14

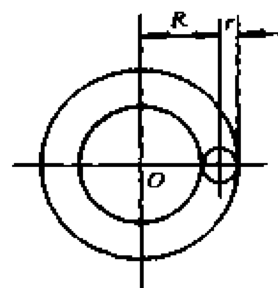


图 7-15

4. **复杂曲面体**

1° 圆环体(见图 7-15)

$$A = 4\pi^2 Rr \approx 39.48Rr,$$
$$V = 2\pi^2 Rr^2 \approx 19.74Rr^2,$$
$$A = \pi^2 Dd \approx 9.870Dd,$$
$$V = \frac{1}{4}\pi^2 Dd^2 \approx 2.467Dd^2.$$

其中 $D = 2R, d = 2r$.

2° 桶形体(见图 7-16)

桶边为圆弧时:

$$V = \frac{\pi}{12}h(2D^2 + d^2)$$
$$\approx 0.262h(2D^2 + d^2).$$

桶边为抛物线时:

$$V = \frac{\pi}{15}h\left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2\right)$$
$$\approx 0.05236h(8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

3° 圆楔体(见图 7-17)

$$V = \frac{1}{2}\pi R^2 h.$$

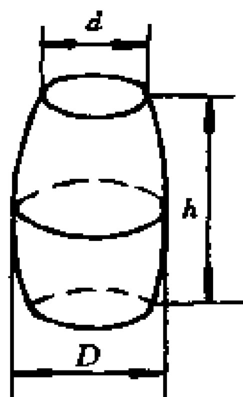


图 7-16

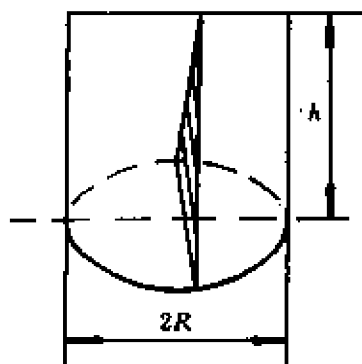


图 7-17

8　希尔伯特公理系统

在希尔伯特公理系统中有 5 组基本命题(公理):结合公理,顺序公理、合同公理,平行公理,连续公理.一切几何命题(定理)都是从这 5 组公理推证出来的.

8.1　结合公理

1° 对于任意两个不同的点 A 和 B,至少有一直线 a 连结 A 和 B.

2° 对于任意两个不同的点 A 和 B,至多有一直线 a 连结 A 和 B.

3° 任一条直线上至少存在着两个点;在平面内又至少存在着不在同一条直线上的 3 个点.

4° 任给不在同一条直线上的 3 个点 A,B,C,至少存在一个平面通过 A,B,C.又任一平面上至少有一个点.

5° 任给不在同一条直线上的 3 个点 A,B,C,至多存在一个平面通过 A,B,C.

6° 如果一条直线上的两个点落在同一个平面上,则该直线上的任何一点都落在该平面上.

7° 如果两个平面有一个公共点,则它们至少还有另一个公共点.

8° 至少存在着 4 个点,它们不在同一个平面上.

8.2　顺序公理

1° 如果 A,B,C 是直线 a 的 3 个不同的点,并且 B 在 A 与 C 之间,则 B 也在 C 和 A 之间.

2° 任给两点 A 和 C,则过 A 和 C 的直线上至少还存在一点 B,使得 C 在 A 和 B 之间.

3° 在直线上的任意 3 个点里,至多有一个点在另外两个点之间.

4° (Pasch 公理)任给不在同一条直线上的 3 个点 A,B,C,又直线 a 落在过 A,B,C 的平面 α 上,并且 a 不通过 A,B,C 中任一点,那么当 a 通过线段 AB 内部的点时,则 a 或者还通过线段 AC 内部的点,或者还通过线段 BC 内部的点.

8.3 合同公理

1° 如果 A, B 是直线 a 上的两个点，且 A' 是同一条或者另一条直线 a' 上的点，则在直线 a' 上的点 A' 的一侧，总可以找出点 B'，使线段 AB 合同于即等于线段 $A'B'$，记为 $AB \equiv A'B'$.

2° 如果线段 $A'B'$ 和 $A''B''$ 均合同于同一个线段 AB，则 $A'B'$ 合同于 $A''B''$，即当 $A'B' \equiv AB$ 且 $A''B'' \equiv AB$ 时，则也有 $A'B' \equiv A''B''$.

3° 如果 AB 和 BC 是直线 a 上的两个线段且无公共的内部的点，又 $A'B'$ 和 $B'C'$ 为同一条或另一条直线 a' 上的两个线段，它们也没有公共的内部的点. 若此时 $AB \equiv A'B'$ 且 $BC \equiv B'C'$，则必有 $AC \equiv A'C'$.

4° 设在平面 α 上给出 $\angle(h,k)$，在平面 α' 上给出直线 a'，且在平面 α' 上给出关于直线 a' 的完全确定的一侧；又设 h' 表示直线 a' 上从点 O' 出发的射线. 在此情形下，平面 α' 上存在一条且只有一条射线 k'，它具有下述性质：

$$\angle(h,k) = \angle(h',k')$$

这时 $\angle(h',k')$ 内点都在平面 α' 上关于直线 a' 的已确定的一侧. 又每个角都与自己合同，即 $\angle(h,k) = \angle(h,k)$.

5° 如果在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC = \angle B'A'C',$$

则

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C', \angle ACB \equiv \angle A'C'B'.$$

8.4 平行公理

过平面上任一已知直线外的任一点至多只能引一条直线与该已知直线平行.

8.5 连续公理

1° 阿基米德(Archimedes)公理　设 AB 和 CD 是任意两个线段，则在直线 AB 上存在着有限多个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，使得 A_1 在 A 和 A_2 之间，A_2 在 A_1 和 A_3 之间，等等，并且线段 $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ 都合同于线段 CD，而 B 在 A_{n-1} 和 A_n 之间. 如图 8-1 所示.



图 8-1

2° 康托尔(Cantor)公理　设在任意直线 a 上给了线段的无穷序列 $A_1B_1, A_2B_2, \cdots$，其中每个后面的线段都在前面一个线段的内部；再有，设不存在这样的线段，它能在所有这些线段的内部. 那么在直线 a 上就存在且只存在一个点 x，它落在所有这些线段 $A_1B_1, A_2B_2, \cdots$ 的内部. 如图 8-2 所示.

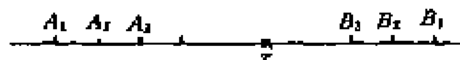


图 8-2

·经典数学卷·

附录 4

解析几何

编　者　赵静辉
审校者　叶明训

目　录

1 平面坐标系

1.1 直角坐标轴的平移与旋转

1. 平面坐标轴的平移(原点的变换)

设坐标轴的原点由 $O(0,0)$平移至 $O'(a,b)$,构成新坐标系 $x'O'y'$. P 为平面内任一点(见图 1-1),P 在原坐标系中的坐标为(x,y)、在新坐标系中的坐标为(x',y'),则

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases}$$

2. 坐标轴的旋转(坐标向量的变换)

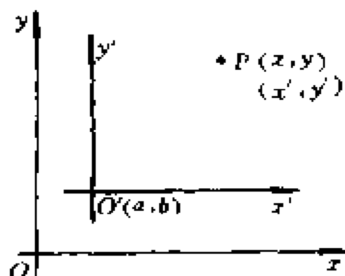


图 1-1

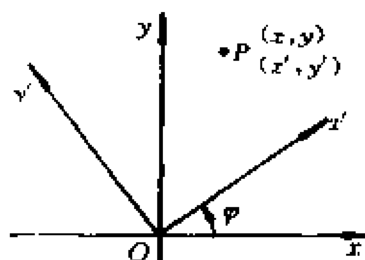


图 1-2

设新坐标轴 Ox', Oy' 是原坐标轴 Ox, Oy 绕原点按逆时针方向旋转同一个角度 φ 而成(见图 1-2),则 P 点在原坐标系下的坐标(x,y)与新坐标系下的坐标(x',y')之间的关系为

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

1.2 直角坐标与极坐标

以直角坐标系的原点 O 为极点,Ox 轴为极轴作极坐标系(见图 1-3),在极坐标系下,平面内任一点坐标为 $P=(\rho,\theta)$,其中 ρ 为极径,θ 为极角,则

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

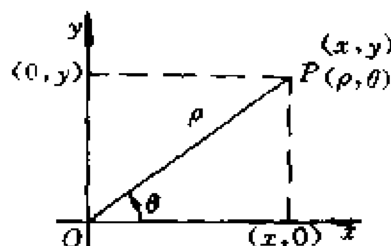


图 1-3

1.3　距离与定比分点

1. 距离

在直角坐标系下，平面上两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

在极坐标系下，平面上两点 $P_1(\rho_1,\theta_1)$，$P_2(\rho_2,\theta_2)$的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)}.$$

2. 定比分点

设有向线段 P_1P，PP_2 的数量为 m，n，则按 $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{m}{n}=\lambda$（$\lambda>0$ 内分，$\lambda<0$ 外分）分线段 P_1P_2 为两段（见图1-4），分点 P 的坐标为

$$\begin{cases} x=\dfrac{nx_1+mx_2}{n+m}=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{ny_1+my_2}{n+m}=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases}$$

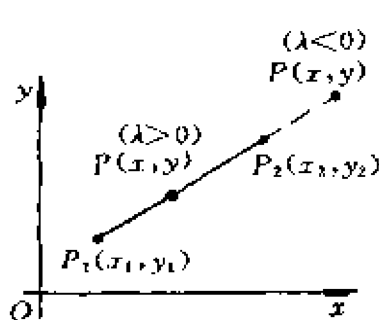


图 1-4

当 $\lambda=1$ 时，则得中点 P 的坐标为

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

1.4　重心与面积

1. 重心

质点系 $M_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$的重心坐标为

$$x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i},\quad y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i},$$

其中 m_i 是质点 M_i 的质量.

2. 三角形面积

以 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$为顶点的三角形的面积为

$$A=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

当右边行列式 >0 时，A 取“+”，当行列式 <0 时，A 取“−”，当 $A=0$ 时，表示 P_1，P_2，P_3 三点共线.

3. 多角形面积

以 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),\cdots,P_n(x_n,y_n)$ 为顶点的凸多角形的面积为

$$A=\pm\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+\cdots+(x_n-x_1)(y_n+y_1)].$$

其顶点或按逆时针编号或按顺时针编号.符号"±"的选定与前面三角形面积 A 的符号的选定相同,即保证 $A\geqslant 0$.

1.5　曲线与方程

1. 曲线方程

如果平面上一条曲线和一个二元方程 $F(x,y)=0$ 有以下关系:

1° 曲线上点的坐标满足这个方程;

2° 坐标适合这个方程的所有点都在这条曲线上.

则此方程称为曲线的方程,而这条曲线称为方程的曲线.

曲线与方程建立了对应关系后,就可以将曲线的几何问题转化为方程的代数问题,用代数方法来研究几何;反之,也可将研究方程的代数问题转化为研究曲线的几何问题.

2. 两曲线的交点

设两条曲线 C_1、C_2 的方程分别是

$$F_1(x,y)=0\quad 和\quad F_2(x,y)=0,$$

则两条曲线 C_1,C_2 的交点的坐标 $P(x_1,y_1)$ 就是方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y)=0,\\F_2(x,y)=0\end{cases}$$

的一组实数解(见图 1-5).

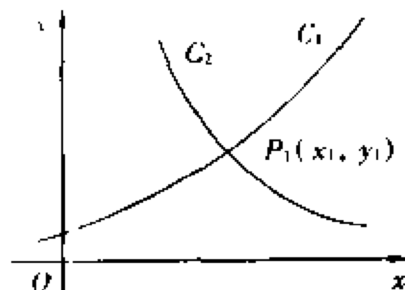


图 1-5

若方程组没有实数解,则这两个方程的曲线就没有交点.

2　直　　线

2.1　直线方程的几种形式

1. 点斜式

通过点 $P_0(x_0,y_0)$,斜率 $k=\tan\varphi$ 的直线(见图 2-1)方程为

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

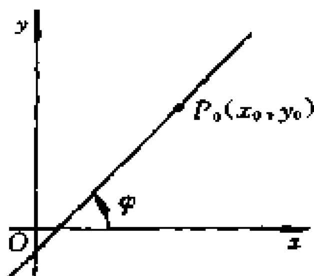


图 2-1

2. 两点式

通过点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 的直线方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

3. **斜截式**

斜率 $k=\tan\varphi$，在 y 轴上的截距为 c 的直线方程为

$$y=kx+c.$$

4. **截距式**

在 x 轴，y 轴上的截距分别为 a,b 的直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

5. **法线式**

从原点对直线 L 作法线，设法线长度为 p，法线与 x 轴正向的夹角为 α，则直线 L 的方程为

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

其中 $p\geqslant 0,0\leqslant\alpha<2\pi$.

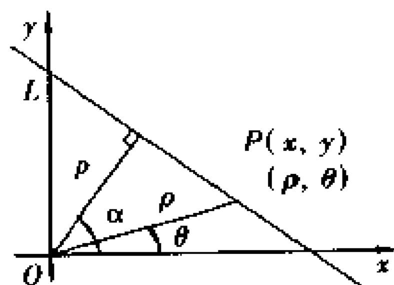


图 2-2

6. **极坐标式**

设 $P(\rho,\theta)$ 为直线 L 上任一点，p 为直线 L 上的法距(见图 2-2)，则 L 的极坐标方程为

$$\rho=\frac{p}{\cos(\alpha-\theta)}.$$

7. **参数式**

过点 $P_0(x_0,y_0)$，且倾角为 φ 的直线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\varphi=x_0+at,\\ y=y_0+t\sin\varphi=y_0+bt.\end{cases}$$

2.2 直线与二元一次方程的关系

1. **直线与二元一次方程的关系**

在平面直角坐标系中，任何一条直线的方程都是关于 x 和 y 的一次方程；反之，任何一个关于 x 和 y 的一次方程，在直角坐标系中的图像是一条直线.

2. **直线方程的一般形式**

直线方程的一般形式为

$$Ax+By+C=0,$$

其中 A,B 不同时为零.

假使 $A\neq 0$，那么

1° 若 $B=0$，则方程变为 $x+\frac{C}{A}=0$，表示过 x 轴上的点 $P(-\frac{C}{A},0)$ 且垂直于 x 轴的直线.

2° 若 $B\neq 0$，则方程可化为斜截式

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

若 $A\neq0,B\neq0,C\neq0$,则方程可化为截距式

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

2.3 点到直线的距离

直线外一点 $P(x_1,y_1)$到直线 $L:Ax+By+C=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

2.4 两直线间的关系

1. 两直线的交点与夹角

设两条不平行的直线 $L_1:A_1x+B_1y+C_1=0$, $L_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交于 $P(x,y)$,如图 2-3 所示,则交点坐标为

$$x=\frac{-\begin{vmatrix}C_1 & B_1\\ C_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},$$

$$y=\frac{-\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

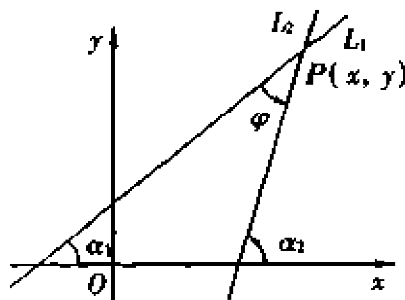


图 2-3

两直线 L_1 与 L_2 的夹角为

$$\tan\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2},$$

其中 k_1,k_2 为 L_1 与 L_2 的斜率,夹角 φ 应从第一条直线按逆时针方向量取.

2. 两直线平行

两直线平行的充要条件是

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}=0,\quad 即\quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

若$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, 则两直线重合.

3. 三直线相交于一点

3 条直线 $A_ix+B_iy+C_i=0\ (i=1,2,3)$交于一点的条件是

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=0.$$

4. **直线束**

过两直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线束(直线系)方程为

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

3 圆锥曲线(二次曲线)

3.1 圆

1. **圆的直角坐标方程**

圆心为(a,b),半径为 R 的圆(见图3-1)的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

称此方程为圆的标准方程.圆的一般方程为

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0\quad(F<D^2+E^2).$$

一般方程经过配方后可化为标准方程.

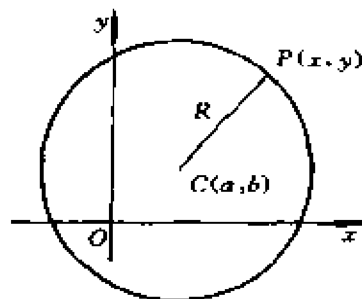


图3-1

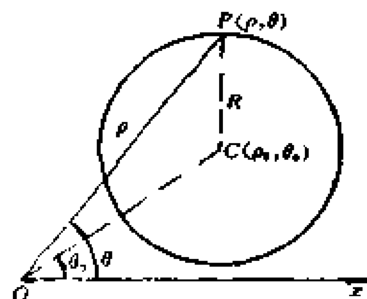


图3-2

2. **圆的极坐标方程**

圆心为(ρ_0,θ_0),半径为 R 的圆(见图3-2)的极坐标方程为

$$\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2=R^2.$$

若圆心在极点,则方程为 $\rho=R$.

如果圆的直径在极轴上,直径的左端是极点,则圆的方程为 $\rho=2R\cos\theta$.类似地若直径与极轴垂直,直径的下端是极点,则圆的方程为 $\rho=2R\sin\theta$.

如果极点在圆周上,圆心为(R,θ_1),则圆的方程为 $\rho=2R\cos(\theta-\theta_1)$.

3. **圆的参数方程**

圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+R\cos t,\\ y=y_0+R\sin t,\end{cases}$$

其中参数 t 为动径与 x 轴的夹角,圆心为(x_0,y_0),半径为 R.

4. 圆的切线方程

若圆的方程为一般式 $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0(F<D^2+E^2)$,则过圆上一点 $P(x_1,y_1)$ 的切线方程为

$$x_1x+y_1y+D(x+x_1)+E(y+y_1)+F=0.$$

5. 直线与圆相切

直线 $y=mx+b$ 与圆 $x^2+y^2=R^2$ 相切的条件为

$$b=\pm R\sqrt{1+m^2}.$$

6. 圆束方程

经过两圆交点的圆束方程是

$$(x^2+y^2+2D_1x+2E_1y+F_1)+\lambda(x^2+y^2+2D_2x+2E_2y+F_2)=0,$$

其中 $\lambda\neq-1$.

3.2 椭 圆

1. 椭圆的标准方程

椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

其中 $a\geqslant b$,$2a$ 为长轴,$2b$ 为短轴,$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$($c=\sqrt{a^2-b^2}$)为焦点,$2c$ 为焦距,中心在原点.如图 3-3 所示.

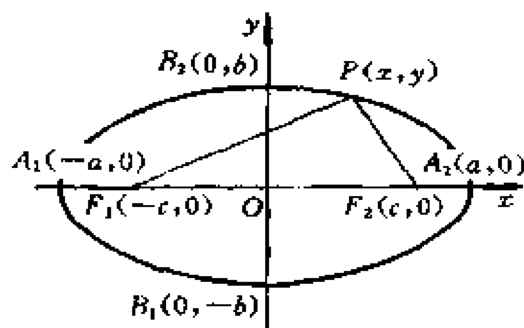


图 3-3

当 $a=b$,椭圆为圆 $x^2+y^2=a^2$,因此圆为椭圆的特殊情况.

2. 椭圆的几何特征

平面上一动点到两定点的距离之和等于定长,此动点的轨迹就是椭圆.这两个定点就是焦点 F_1、F_2,这个定长就是长轴 $2a$.

3. 椭圆的参数方程

椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\y=b\sin t,\end{cases}$$

其中 $0\leqslant t<2\pi$.

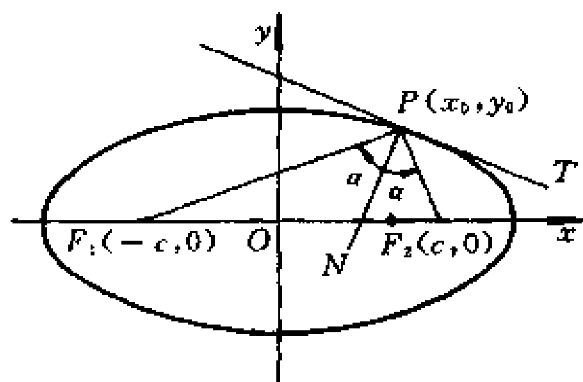


图 3-4

4. 椭圆的切线和法线

设 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的一点，则该点的切线 PT 的方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

过 $P(x_0,y_0)$ 作 PT 的垂线 PN，PN 为椭圆在点 $P(x_0,y_0)$ 的法线，法线 PN 的方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0/a^2}=\frac{y-y_0}{y_0/b^2}.$$

椭圆的法线平分这一点的两条焦点半径 PF_1，PF_2 所夹的角．如图 3-4 所示．

5. 椭圆的光学性质

从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，都集中在另一个焦点上．

3.3 双 曲 线

1. 双曲线的标准方程

中心在原点，实轴在 x 轴上，实轴长为 $2a$，虚轴长为 $2b$ 的双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

图 3-5 中的 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 是双曲线的焦点，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$．称 $2c$ 为焦距．

2. 双曲线的几何特征

平面上一动点到两个定点的距离之差的绝对值等于定长，这个动点的轨迹就是双曲线．这两个定点就是焦点 F_1，F_2，这个定长就是实轴长 $2a$．

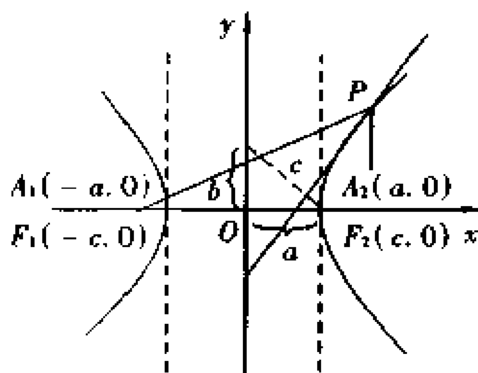


图 3-5

3. 双曲线的参数方程

图 3-5 所示双曲线的一种参数方程为

$$\begin{cases} x=a\sec\varphi, \\ y=b\tan\varphi, \end{cases}$$

其中 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3}{2}\pi$．另一种形式为

$$\begin{cases} x=a\cosh t, \\ y=b\sinh t. \end{cases}$$

4. 双曲线的切线和法线

过双曲线上某点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程和法线方程分别为

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

$$\frac{x_0(y-y_0)}{a^2}+\frac{y_0(x-x_0)}{b^2}=0.$$

双曲线的切线具有类似于椭圆的法线的性质,即经过双曲线上一点的切线,平分这一点的两条焦点半径所夹的角.

5. 双曲线的光学性质

如果光线从一个焦点 F_2 发出,经过靠近 F_2 的双曲线的一支反射后,光线就好像是从另一个焦点 F_1 发出的.如图 3-6 所示.

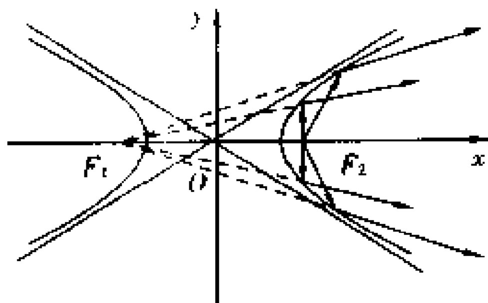


图 3-6

6. 双曲线的渐近线

中心在原点,边长为 $2a$,$2b$ 的矩形的对角线的延长线

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

是双曲线的两条渐近线.

3.4 抛 物 线

1. 抛物线的标准方程

以原点为顶点,以 x 轴为对称轴开口朝右的抛物线的标准方程为

$$y^2=2px \quad (p>0)$$

图 3-7 中的 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 是抛物线的焦点,直线 L: $x=-\frac{p}{2}$ 是抛物线的准线.

2. 抛物线的几何特征

平面内一动点到一个定点和一条定直线的距离相等,这个动点的轨迹就是抛物线.这个定点是抛物线的焦点 F,这条定直线 L 为准线,焦点到准线的距离等于 p.

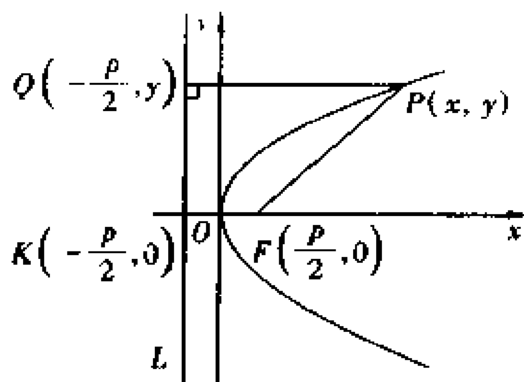


图 3-7

3. 抛物线的参数方程

图 3-7 所示的抛物线的参数方程为

$$\begin{cases}x=2pt^2,\\ y=2pt.\end{cases}$$

4. 抛物线的切线和法线

过抛物线上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线和法线的方程分别为

$$y_0y=p(x+x_0),$$

$$p(y-y_0)+y_0(x-x_0)=0.$$

经过抛物线上一点 P 作平行于对称轴的射线 PE,则过 P 的法线 PN 平分 PE 和 PF 所夹

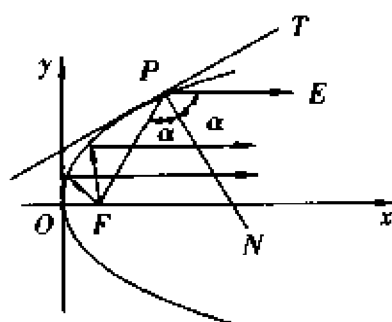


图 3-8

的角.如图 3-8 所示.

5. **抛物线的光学性质**

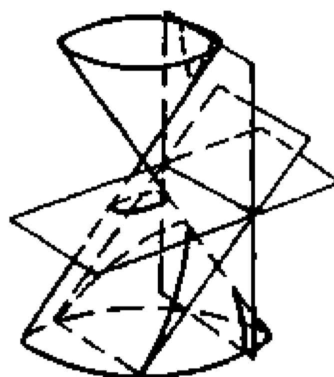
从抛物线的焦点发出的光,经过抛物线反射后成为一束平行光线射出.探照灯、汽车前灯和太阳能灶就是利用这一性质设计的.

3.5　圆锥曲线

1. **圆锥曲线的定义**

椭圆(包括圆)、双曲线、抛物线总称为圆锥曲线.椭圆与双曲线具有对称中心,称它们为有心圆锥曲线,抛物线无对称中心,称为无心圆锥曲线.

用一个不过圆锥顶点的平面去截圆锥的侧面,若截面与圆锥的母线平行,则交线为抛物线;若截面与母线不平行,则交线或为椭圆或为双曲线.如图 3-9 所示.


图 3-9

2. **圆锥曲线的几何特征**

平面上一个动点到一个定点(焦点)的距离与到一条定直线(准线)的距离之比为一个常数 e,这个动点的轨迹是圆锥曲线.当 $e<1$ 时是椭圆,$e=1$ 是抛物线,$e>1$ 是双曲线.称 e 为离心率.

1° 椭圆的准线为 $x=\pm\frac{a^2}{c}$,离心率 $e=\frac{c}{a}$.

2° 双曲线的准线为 $x=\pm\frac{a^2}{c}$,离心率 $e=\frac{c}{a}$.

3° 椭圆的离心率愈大,椭圆就愈扁平,而双曲线的离心率愈大,双曲线的张口就愈大.

3. **圆锥曲线的极坐标方程**

以圆锥曲线的焦点为极点 O,过 O 作准线的垂线,以此垂线的反向延长线为极轴,则圆锥曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta},$$

其中 e 为离心率,p 为焦点到同侧的准线的距离.

4. **圆锥曲线与二元二次方程**

圆锥曲线的方程是二元二次方程,反之二元二次方程的图像是圆锥曲线,因此称圆锥曲线为二次曲线.

一般二元二次方程为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\quad (A,B,C\text{ 不同时为 }0).$$

若 $B=0$,则

1° 当 $A\cdot C\neq 0$ 时,其图像或为椭圆(特殊情形收缩为一点),或为双曲线(特殊情形是两条相交直线).

2° 当 $A=0$ 或 $C=0$ 时，其图像是抛物线（特殊情形为两条平行直线）.

若 $B\neq 0$，则利用判别式 $\Delta=B^2-4AC$，有

1° 当 $\Delta=0$ 时，其图像为抛物线.

2° 当 $\Delta\neq 0$ 时，其图像是椭圆或双曲线.

经过坐标变换（坐标轴的平移或旋转），一般方程可化为标准方程.

4　空间坐标系与空间曲线和曲面

4.1　空间坐标系

1. 直角坐标系

过空间一定点 O 作 3 条互相垂直的数轴：x 轴、y 轴、z 轴，它们的正向符合右手法则，这样的 3 条坐标轴组成了一个空间直角坐标系. 点 O 称为坐标原点，由两条坐标轴所确定的平面称坐标面，坐标面有 xOy 面，yOz 面及 zOx 面. 如图 4-1 所示.

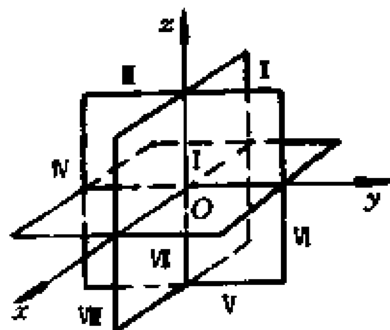


图 4-1

3 个坐标平面把空间分为 8 个卦限：按逆时针方向，xOy 面以上 4 部分命名为 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限（其中含 x 轴、y 轴、z 轴正半轴的那个卦限为第 1 卦限）；xOy 面以下 4 部分命名为 Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 卦限.

过空间任一点 M 作 3 个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，其交点的坐标 x,y,z 叫做点 M 的坐标，这样就建立了空间点 M 与有序实数组 (x,y,z) 的一一对应.

2. 空间两点间的距离

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，则 P_1，P_2 之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

3. 定比分点

设有向线段 P_1P_2 被分点 P 分为

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{m}{n}=\lambda\ (\lambda>0\text{ 内分},\lambda<0\text{ 外分}),$$

则 P 点的坐标为

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{n+m}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y=\frac{ny_1+my_2}{n+m}=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z=\frac{nz_1+mz_2}{n+m}=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

当 $\lambda=1$，得 P_1P_2 中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

4. 重心

设有一组质点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$，其质量分别为 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$，则这组质点的重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad \bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

4.2　空间向量的坐标法

1. 向量的坐标法

设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量（见图 4-2），$\boldsymbol{a}$ 在 3 条坐标轴上的投影 a_x,a_y,a_z 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},$$

这就建立了向量与有序数组的一一对应. 用起点和终点的坐标表示，则为

$$\boldsymbol{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

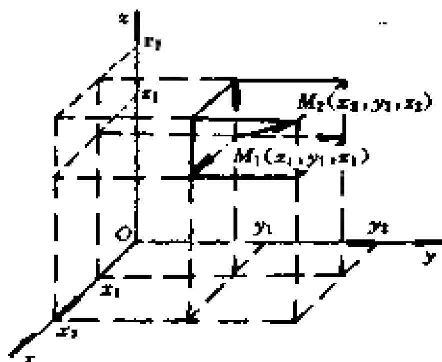


图 4-2

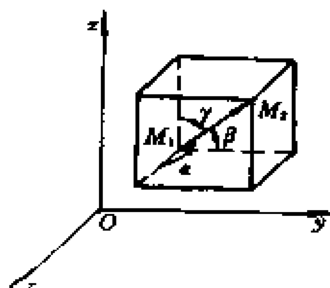


图 4-3

2. 向量的模和方向

1° 模　向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_1M_2}$ 的模（大小）为

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

2° 方向角　非零向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_1M_2}$ 与 3 条坐标轴的夹角 $\alpha,\beta,\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. 如图 4-3 所示.

3° 方向余弦　设 α,β,γ 为非零向量的方向角，则称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_1M_2}$ 的方向余弦. 用向量的坐标表示方向余弦的公式为

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

3 个坐标余弦有关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

3. **两向量的夹角**

设两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦分别为 l_1,m_1,n_1 和 l_2,m_2,n_2，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 φ 由下式确定

$$\cos\varphi=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2.$$

若 $\cos\varphi=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；若 $\cos\varphi=1$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

4.3 向量的数量积、向量积、混合积

1. **两向量的数量积(亦称内积)**

设两向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则它们的数量积(内积)是一个数量，用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

若用向量的坐标来表示数量积，则为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

2. **两向量的向量积(亦称外积)**

向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 的向量积(外积)是一个向量，用 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 表示. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 按这个顺序构成右手系.

用坐标表示 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-b_xa_y\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示与坐标轴 Ox,Oy,Oz 同方向的单位向量.

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0.$$

3. **三向量的混合积**

三向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$ 的混合积是一个数量，即

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix},$$

其几何意义是：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 的绝对值等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为边的平行六面体的体积.

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0.$$

4.4 直角坐标系的变换

1. 坐标轴的平移

若坐标方向不变，原点由(0,0,0)平移到(a,b,c)，则旧坐标(x,y,z)与新坐标(x',y',z')的关系为

$$\begin{cases} x=x'+a,\\ y=y'+b,\\ z=z'+c,\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases} x'=x-a,\\ y'=y-b,\\ z'=z-c.\end{cases}$$

2. 坐标轴的旋转

若原点不动，坐标轴旋转，设新坐标轴对旧坐标轴的方向余弦如表 4-1 所示，则

表 4-1

坐标轴	x'	y'	z'
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

$$\begin{cases} x=l_1x'+l_2y'+l_3z',\\ y=m_1x'+m_2y'+m_3z',\\ z=n_1x'+n_2y'+n_3z',\end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x'=l_1x+m_1y+n_1z,\\ y'=l_2x+m_2y+n_2z,\\ z'=l_3x+m_3y+n_3z.\end{cases}$$

4.5 柱面坐标与球面坐标

1. 柱面坐标

设$M(x,y,z)$为空间内一点，它在 xOy 面上的投影 P 的极坐标为(r,θ)，则(r,θ,z)叫做点 M 的柱面坐标（见图 4-4），其中

$$0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\quad -\infty<z<+\infty.$$

点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z.\end{cases}$$

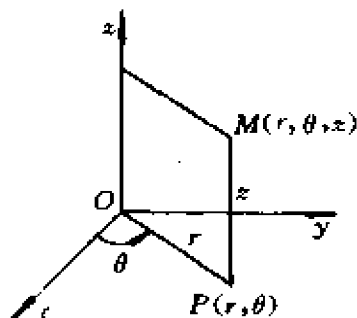


图 4-4

2. 球面坐标

设$M(x,y,z)$为空间内一点，r 为原点 O 与点 M 的距离，φ 为向量 $\boldsymbol{OM}$ 与 z 轴正向所夹的角，P 为 M 在 xOy 面上的投影，θ 为从正 z 轴来看自 x 轴正向按逆时针方向转到向量 $\boldsymbol{OP}$ 的角，则(r,φ,θ)叫做点 M 的球面坐标（见图 4-5），其中

$$0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi.$$

点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

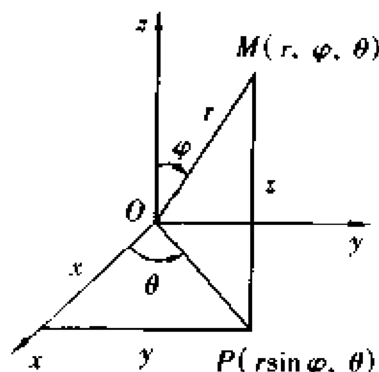


图 4-5

4.6 曲面与方程

1. 曲面方程

若曲面 S 与三元方程

$$F(x,y,z)=0$$

有以下关系：

1° 曲面 S 上任一点 M 的坐标满足这个方程；

2° 坐标适合这个方程的所有点都在这曲面上.

则 $F(x,y,z)=0$ 叫做曲面 S 的方程，而曲面 S 叫做该方程的图形. 如图 4-6 所示.

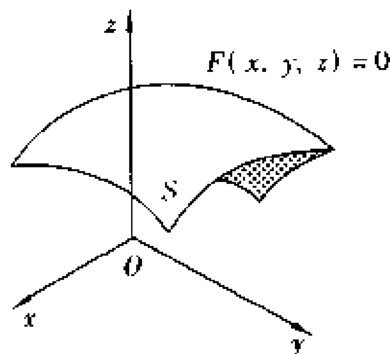


图 4-6

2. 几种特殊的曲面方程

1° 柱面方程　母线平行于坐标轴的柱面方程是一个二元方程. 方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，而 $F(y,z)=0$ 与 $F(x,z)=0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

例如，方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面，其准线是 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，而方程 $x-z=0$ 表示母线平行于 y 轴的平面（柱面），其准线是 xOz 面上的直线 $x-z=0$.

2° 旋转曲面方程　设 yOz 平面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周，所得旋转曲面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

而该曲线绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

其他情形可以类推.

例如，yOz 平面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕实轴 y 轴和虚轴 z 轴旋转一周所得双叶旋转双曲面和单叶旋转双曲面的方程为

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

3° 锥面方程　以原点为顶点的锥面方程是 x,y,z 的齐次方程；以 (a,b,c) 为顶点的锥面方程是 $x-a,y-b,z-c$ 的齐次方程.

例如 $x^2+y^2=\tan^2\theta z^2$ 是顶点在原点，顶角为 2θ 的圆锥面.

4.7 空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线可看作是两个曲面的交线，因此空间曲线的一般方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

例如，xOy 面上圆心在原点，半径为 R 的圆的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\z=0,\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\z=0.\end{cases}$$

2. 空间曲线的参数方程

将曲线 C 上动点的坐标 x,y,z 表示为参数 t 的函数，即

$$\begin{cases}x=f(t),\\y=g(t),\quad a\leqslant t\leqslant b\\z=h(t),\end{cases}$$

就是空间曲线 C 的参数方程.

例如，图4-7所示的空间螺线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta<+\infty.\\z=b\theta,\end{cases}$$

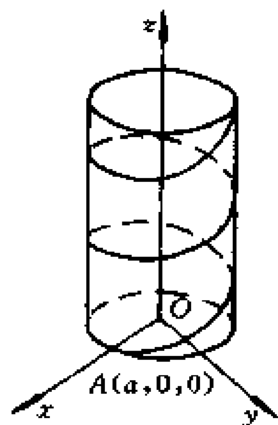


图 4-7

3. 空间曲线在坐标面上的投影

求空间曲线 C

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

在 xOy 面上的投影，只需从上述方程组中消去 z 得到 $f(x,y)=0$，方程

$$\begin{cases}f(x,y)=0,\\z=0\end{cases}$$

就是曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线的方程. 类似地，可得曲线 C 在 yOz 面上及 zOx 面上的投影曲线.

5　空间中的平面与直线

5.1　平面及其方程

1. 平面的点法式方程

过一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 且法向量为 $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$ 的平面(见图 5-1)方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

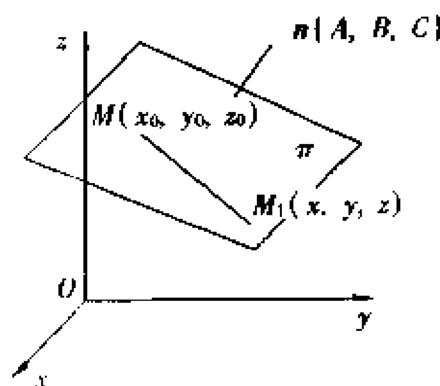


图 5-1

2. 平面的一般方程

任何一个 x, y, z 的一次方程的图形是平面;反之,任何一个平面的方程是 x, y, z 的一次方程.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A, B, C \text{ 不同时为 } 0)$$

称为平面的一般方程.其法向量 $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$.

当 $D = 0$,则平面通过原点;

当 $A = 0$,则平面平行于 x 轴;

当 $B = 0$,则平面平行于 y 轴;

当 $C = 0$,则平面平行于 z 轴;

当 $A = B = 0$,则平面垂直于 z 轴;

当 $B = C = 0$,则平面垂直于 x 轴;

当 $A = C = 0$,则平面垂直于 y 轴.

3. 平面的截距式方程

若平面与 3 个坐标轴的交点为 $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$, $P_3(0,0,c)$,如图 5-2 所示,则平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

称此方程为平面的截距式方程.

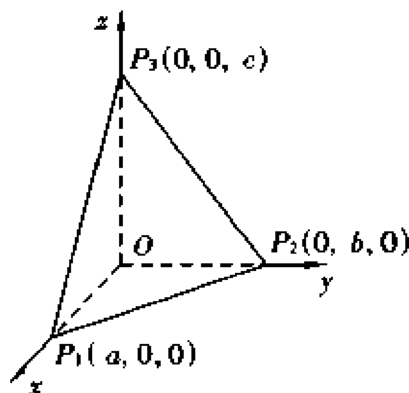


图 5-2

4. 点到平面的距离

设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外一点,则距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

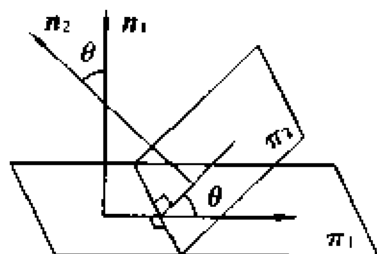


图 5-3

5. 两平面的夹角

称两非平行平面：$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0(i=1,2)$的法向量之间的夹角$\theta$为两平面间的夹角(见图5-3)，所以有

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

两平面垂直$\Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

两平面平行$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

6. 两平行平面的距离

两平行平面$Ax+By+Cz+D_i=0(i=1,2)$之间的距离为

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

7. 有轴平面束 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，这条直线叫做平面束的轴.以直线

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

为轴的有轴平面束方程为

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中l,m为不全为0的任意实数.

5.2 空间直线及其方程

1. 空间直线的一般方程

空间直线可看作两平面的交线，因此空间直线(见图5-4)方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

其中

$$A_1^2+B_1^2+C_1^2\neq0,$$

$$A_2^2+B_2^2+C_2^2\neq0,$$

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}.$$

此方程称为直线的一般方程.

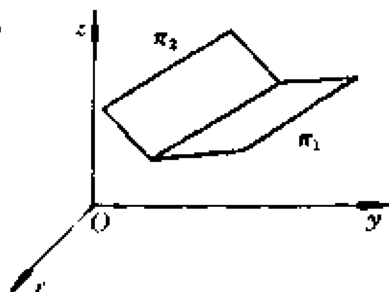


图 5-4

2. **空间直线的点向式(对称式)方程**

平行于某直线 L 的非零向量 $\{m,n,p\}$ 称为 L 的方向向量，m,n,p 称为 L 的一组方向数.

若直线 L 过 $M(x_0,y_0,z_0)$，且方向向量为 $\{m,n,p\}$. 如图 5-5 所示，则直线 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

称此方程为直线的点向式(或对称式)方程.

若 m,n,p 中有为零的数出现，例如，$p=0$，则应理解为

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n},\\ z=z_0,\end{cases}$$

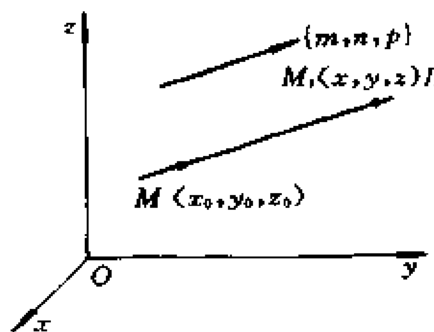


图 5-5

即直线位于

$$z=z_0$$

的平面上. 而

$$m=n=0,$$

则表示

$$\begin{cases}x=x_0,\\ y=y_0,\end{cases}$$

即直线与 z 轴平行.

3. **空间直线的参数方程**

过 $M(x_0,y_0,z_0)$ 且方向向量为 $\{m,n,p\}$ 的直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt.\end{cases}$$

4. **两直线的夹角**

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)叫做两直线的夹角.

设直线 L_1,L_2 的方向向量分别为 $\{m_1,n_1,p_1\}$，$\{m_2,n_2,p_2\}$，则 L_1 与 L_2 间的夹角为

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

$$L_1\perp L_2 \Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0,$$

$$\underset{(\text{或重合})}{L_1 /\!/ L_2} \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

5. **直线外一点到直线的距离**

设直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$为直线外一点，则 M_1 到该直线的距离为

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ p & m \end{vmatrix}^2}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

6. **两条异面直线的距离**

设两条异面直线 L_1,L_2 的方程为

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

则 L_1 与 L_2 之间的距离为

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

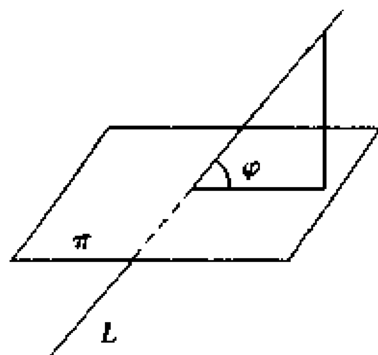


图 5-6

7. **直线与平面的夹角**

当直线与平面不垂直时，直线 L 与 L 在平面上的投影直线间的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$称为该直线 L 与平面的夹角(见图 5-6)．直线垂直于平面，则规定

$$\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

若直线的方向向量为$\{m,n,p\}$，平面的法向量为$\{A,B,C\}$，则

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

直线垂直于平面$\Longleftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

直线平行于平面(或直线在平面上)$\Longleftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

6 二次曲面

6.1 椭球面

1. 椭球面的标准方程

以原点为中心,3个半轴分别为 a,b,c 的椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

其坐标面是椭球面的对称平面,坐标轴是它的对称轴,与坐标轴的6个交点($\pm a$,0,0),(0,$\pm b$,0),(0,0,$\pm c$)是它的顶点.(参见第7章序号38.)

2. 旋转椭球面

当 $a=b$ 时,即方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的椭球面是由 xOz 面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$绕 z 轴旋转而成;其余情况类推.

3. 球面

当 $a=b=c=r$ 时,方程 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 表示中心在原点,半径为 r 的球面.因此球面是椭球面的特例.

4. 椭球面与平面的截线

椭球面包含在由6个面 $x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$ 所围的长方体内.在此范围内用任一平面截椭球面,截线均为椭圆.

旋转椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$用垂直于 z 轴(旋转轴)的平面 $z=h$($|h|<c$)去截,其截线为圆$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right),\\ z=h.\end{cases}$

6.2 双曲面

1. 单叶双曲面的标准方程

单叶双曲面的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中心在原点,关于各坐标面和各坐标轴对称,与 x 轴、y 轴分别交于($\pm a$,0,0),(0,$\pm b$,0),与 z 轴不相交.(参见第7章序号38.)

2. 单叶双曲面与平面的截线

用平行于 xOy 面的平面 $z=h$ 去截上述单叶双曲面,其截线为椭圆

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

用平行于 xOz 面的平面 $y=k$ 去截上述单叶双曲面,截线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2},\\ y=k.\end{cases}$$

当 $|k|<b$ 时,截线为实轴平行于 x 轴的双曲线;当 $|k|>b$ 时,截线为实轴平行于 z 轴的双曲线;当 $|k|=b$ 时,截线为两条直线,这两条直线交于 $(0,b,0)$ 或 $(0,-b,0)$.

用平行于 yOz 面的平面 $x=k$ 截单叶双曲面,情形与用平面 $y=k$ 所截完全类似.

3. **双叶双曲面的标准方程**

双叶双曲面的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

其中心在原点,关于各坐标面和各坐标轴对称,且与 x 轴,y 轴不交,但与 z 轴交于 $(0,0,\pm c)$.又因为 $z^2\geqslant c^2$,因此曲面分为上、下两叶.(参见第7章序号40).

4. **双叶双曲面与平面的截线**

用平行于 xOy 面的平面 $z=h(|h|\geqslant c)$ 截上述双叶双曲面,其截线为椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases}$$

当 $|z|=h$ 时,椭圆退缩为一点.

用两坐标面 $y=0$ 与 $x=0$ 分别截上述双叶双曲面,其截线分别为双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0.\end{cases}\quad 与 \quad \begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

用平行于 xOz 面和 yOz 面的平面 $y=h(|h|\neq b)$,$x=k(|k|\neq a)$ 截上述双叶双曲面,截线也为双曲线.

6.3 抛 物 面

1. **椭圆抛物面的标准方程**

椭圆抛物面的标准方程为

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$$

此曲面对称于 xOz 面和 yOz 面,z 轴为对称轴,$(0,0,0)$ 是顶点,由于 $z\geqslant 0$,因此曲面在 xOy 面上方.(参见第7章序号42.)

2. **椭圆抛物面与平面的截线**

用平行于 xOy 面的平面 $z=h(h>0)$ 截上述椭圆抛物面,截线为椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2h}+\dfrac{y^2}{b^2h}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

用平行于 xOz 面的平面 $y=k$ 截上述椭圆抛物面,截线为抛物线

$$\begin{cases} x^2 = a^2\left(z - \dfrac{k^2}{b^2}\right), \\ y = k. \end{cases}$$

当 $k=0$ 时,称截线 $\begin{cases} x^2 = a^2 z, \\ y = 0 \end{cases}$ 为主抛物线.

用平行于 yOz 面的平面 $x=k$ 截上述椭圆抛物面,情形与用平面 $y=k$ 所截类似.

3. 双曲抛物面的标准方程

双曲抛物面的标准方程为

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

此曲面(又称马鞍面)关于 xOz 面,yOz 面以及 z 轴对称,但无对称中心.(参见第 7 章序号 43.)

4. 双曲抛物面与平面的截线

用坐标平面 $y=0$ 和 $x=0$ 截上述双曲抛物面分别得抛物线

$$\begin{cases} x^2 = a^2 z, \\ y = 0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} y^2 = -b^2 z, \\ x = 0, \end{cases}$$

称此抛物线为双曲抛物面的主抛物线.

用坐标平面 xOy 截上述双曲抛物面,截线为两条相交于原点的直线

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{y}{b} = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

用平行于 xOy 面的平面 $z=h(h\neq 0)$ 截上述双曲抛物面,截线为双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2 h} - \dfrac{y^2}{b^2 h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

用平行于 xOz 面的平面 $y=k$ 截上述双曲抛物面,截线为抛物线

$$\begin{cases} x^2 = a^2\left(z + \dfrac{k^2}{b^2}\right), \\ y = k. \end{cases}$$

6.4 二次锥面与二次柱面

1. 二次锥面的标准方程

二次齐次方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

表示顶点在原点、以 z 轴为轴的二次锥面.(参见第 7 章序号 44.)

由移动直线所构成的曲面称为直纹面,锥面是直纹面.

2. 二次锥面是双曲面的渐近面

过 z 轴的任一平面 π 与单叶双曲面或双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

的截线是双曲线，而 π 与上述二次锥面相截截出两条直线，这两条直线恰为双曲线的渐近线，因此，称上述二次锥面是单叶双曲面或双叶双曲面的渐近面.

3. 二次柱面

二次柱面是直纹面，它有三种情形

1° 椭圆柱面（见图 6-1(a)）　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

2° 双曲柱面（见图 6-1(b)）　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

3° 抛物柱面（见图 6-1(c)）　$\frac{x^2}{a^2}-py=0.$

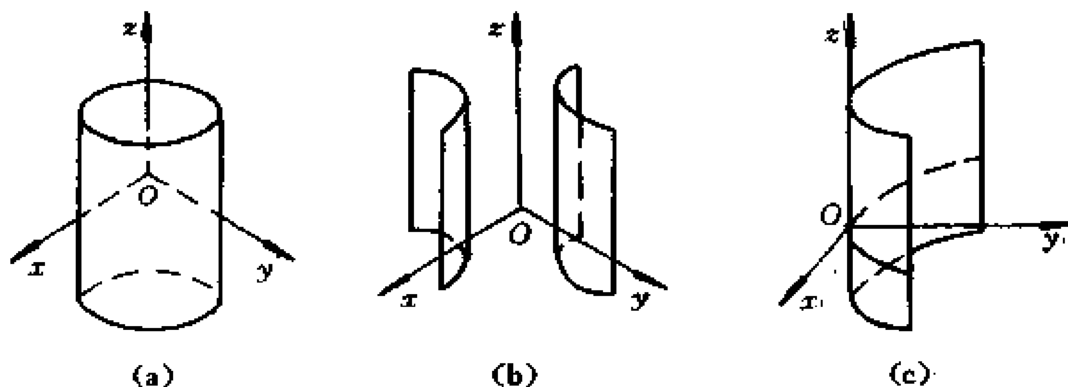


图 6-1

6.5　二次曲面的一般方程及其讨论

1. 二次曲面的一般方程

由 x,y,z 的一般实系数二次方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+$$
$$2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

所确定的曲面都称二次曲面.

2. 二次曲面的分类

按上述二次曲面方程中系数所取的一切可能值，二次曲面可分为 17 种标准形状，其中

1° 椭球面　2 种（实的和虚的）；

2° 双曲面　2 种（单叶的和双叶的）；

3° 抛物面　2 种（椭圆的和双曲的）；

4° 二次锥面　2 种（实的和虚的）；

5° 二次柱面 9 种(准线为 9 种二次曲线).

3. 二次曲面的判定

在二次曲面的一般方程中,为判定已知曲面为何种曲面,特引进下列记号:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

于是,有下列判定结果:

1° 椭球面 $I_2 > 0, I_1 I_3 > 0, I_4 < 0$;

2° 虚椭球面 $I_2 > 0, I_1 I_3 > 0, I_4 > 0$;

3° 点(或称虚母线二次锥面) $I_2 > 0, I_1 I_3 > 0, I_4 = 0$;

4° 单叶双曲面 $I_3 \neq 0, I_2 \leqslant 0$(或 $I_1 I_3 \leqslant 0$), $I_4 > 0$;

5° 双叶双曲面 $I_3 \neq 0, I_2 \leqslant 0$(或 $I_1 I_3 \leqslant 0$), $I_4 < 0$;

6° 二次锥面 $I_3 \neq 0, I_2 \leqslant 0$(或 $I_1 I_3 \leqslant 0$), $I_4 = 0$;

7° 椭圆抛物面 $I_3 = 0, I_4 < 0$;

8° 双曲抛物面 $I_3 = 0, I_4 > 0$;

9° 椭圆柱面 $I_3 = I_4 = 0, I_2 > 0, I_1 K_2 < 0$;

10° 虚椭圆柱面 $I_3 = I_4 = 0, I_2 > 0, I_1 K_2 > 0$;

11° 直线 $I_3 = I_4 = K_2 = 0, I_2 > 0$;

12° 双曲柱面 $I_3 = I_4 = 0, I_2 < 0, K_2 \neq 0$;

13° 一对相交平面 $I_3 = I_4 = K_2 = 0; I_2 < 0$;

14° 抛物柱面 $I_4 = I_3 = I_2 = 0, K_2 \neq 0$;

15° 一对平行平面 $I_3 = I_4 = I_2 = K_2 = 0, K_1 < 0$;

16° 一对虚平行平面 $I_3 = I_4 = I_2 = K_2 = 0, K_1 > 0$;

17° 一对重合平面 $I_3 = I_4 = I_2 = K_2 = K_1 = 0$.

7 各种重要图形与方程

序号	名称	图形	方程
1	三次抛物线		$y = ax^3$ $\rho^2 = \frac{1}{a}\sec^2\theta\tan\theta$
2	半三次抛物线		$y^2 = ax^3$ $\rho = \frac{1}{a}\tan^2\theta\sec\theta$
3	箕舌线		$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ $\begin{cases} x = 2a\cot\theta \\ y = 2a\sin^2\theta \end{cases}$
4	悬链线		$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ $= a\cosh\frac{x}{a}$
5	双纽线		$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$

续表

序号	名　　称	图　　形	方　　程
6	蚌线		$(y+a)^2(b^2-y^2)=x^2y^2$, $(b>a)$ $\rho=a\csc\theta+b$ 或 $\rho=a\csc\theta-b$ (极点为$(0,-a)$，极轴与 x 轴方向一致)
7	旋轮线(正常形)(摆线)		$x=a\arccos\frac{a-y}{a}\mp\sqrt{2ay-y^2}$ $\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$ 每段曲线，长度 $=8a$ 面积 $=3\pi a^2$
8	旋轮线		$x=2a\arcsin\sqrt{\frac{y}{2a}}\pm\sqrt{2ay-y^2}$ $\begin{cases}x=a(\theta+\sin\theta)\\y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$
9	长辐旋轮线		$x=a\theta-b\sin\theta$ $y=a-b\cos\theta$ $a<b$
10	短辐旋轮线		$x=a\theta-b\sin\theta$ $y=a-b\cos\theta$ $a>b$

续表

序号	名　　称	图　　形	方　　程
11	蔓叶线		$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$ $\rho = a(\sec\theta - \cos\theta)$ $= a\sin\theta\tan\theta$
12	抛物线		$x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ $x^2 - 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$
13	星形线		$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$
14	椭圆的渐屈线		$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ $\begin{cases} x = A\cos^3\theta, Aa = a^2 - b^2 \\ y = B\sin^3\theta, Bb = a^2 - b^2 \end{cases}$
15	心脏线		$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ $\rho = a(1 - \cos\theta)$

续表

序号	名　称	图　形	方　程
16	叶形线		$x^3+y^3-3axy=0$ $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ $\rho=\dfrac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$
17	双叶形线		$(x^2+y^2)^2=ax^2y$ $\rho=a\sin\theta\cdot\cos^2\theta$
18	蚶线		$(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$ $\rho=b+a\cos\theta$ $(P'A=AP=b)$ 图中 $a>b$
19	蚶线		和 18 相同，仅 $a<b$
20	绳结线		$y^2=x^2\dfrac{a-x}{a+x}$ $\rho=a\cos2\theta\sec\theta$

续表

序号	名　称	图　形	方　程
21	阿基米德螺线		$(x^2+y^2)=a^2(\arctan\frac{y}{x})^2$ $\rho=a\theta$　或　$\rho=-a(\theta\pm\pi)$
22	对数或等角螺线		$x^2+y^2=e^{2a(\arctan\frac{y}{x})}$ $\rho=-e^{a(\theta\pm\pi)}$ $\rho=e^{a(\theta\pm2\pi)}$等等 $\ln\rho=a\theta$ 或 $\ln(-\rho)=a(\theta+\pi)$等等
23	双曲或倒数型螺线		$(x^2+y^2)(\arctan\frac{y}{x})^2=a^2$ $\rho\theta=a$ 或 $\rho(\theta\pm\pi)=-a$ 或 $\rho(\theta\pm2\pi)=a$
24	抛物型螺线		$(\rho-a)^2=4ak\theta$
25	对数曲线		$y=\log_a x$

续表

序号	名　　称	图　　形	方　　程
26	指数曲线		$y=a^x$
27	概率曲线		$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$
28	蛇形线		$y=\frac{abx}{a^2+x^2}$ $\begin{cases}x=a\cot\theta\\y=b\sin\theta\cos\theta\end{cases}$
29	卵形线		$(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=c^4$ 图中表示 $a>c$ 的情况
30	卵形线		方程和 29 号曲线相同，仅式中 $a<c$

续表

序号	名称	图形	方程
31	圆外旋轮线		$x=(a+b)\cos\theta-b\cos\frac{a+b}{b}\theta$ $y=(a+b)\sin\theta-b\sin\frac{a+b}{b}\theta$
32	圆的渐开线		$\begin{cases}x=r\cos\theta+r\theta\sin\theta\\y=r\sin\theta-r\theta\cos\theta\end{cases}$
33	三叶玫瑰线		n 为奇数时，图形有 n 个叶片 $\rho=a\cos n\theta$ 图中 $n=3$，即 $\rho=a\cos3\theta$
34	四叶玫瑰线		n 为偶数时，图形有 $2n$ 个叶片 $\rho=a\sin n\theta$ 图中 $n=2$，即 $\rho=a\sin2\theta$
35	曳物线		$x=a\,\mathrm{arcsech}\frac{y}{a}-\sqrt{a^2-y^2}$ 或 $x=t-a\tanh\frac{t}{a}$，$y=a\,\mathrm{sech}\frac{t}{a}$ 当长度为 a 的切线 PT 的 T 点在 x 轴上移动时 P 点所成的轨迹

续表

序号	名称	图形	方程
36	抛射轨道线		$y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ $\begin{cases} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = (v_0\sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$ 其中：v_0 = 初速，m/s g = 重力加速度 = 9.8m/s² t = 时间，s α = 仰射角
37	球面		$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
38	椭球面		$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
39	单叶双曲面		$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
40	双叶双曲面		$\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

续表

序号	名　称	图　形	方　程
41	椭圆柱面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
42	椭圆抛物面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$
43	双曲抛物面		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$
44	椭圆锥面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

索 引

使用说明：1. 本索引收录了本卷正文中用黑体排印的大部分术语。

2. 术语依第一字的读音按汉语拼音字母表顺序排列。如果拼音相同，根据音调，按阴平、阳平、上声、去声、轻声的次序排列。如果音和音调也相同，按总笔画数排列。

3. 以符号、数字或字母起首的术语，按符号、数字、拉丁字母、希腊字母的顺序，分别集中排在以汉字起首的术语前面，其中字母依首写字母按字母的顺序排列。

4. 以数学家译名为首的术语（例如，傅里叶变换），依译名按汉字的排法排列。

5. 术语后面的数字，表示该术语出现在本书中的页码。

以拉丁字母起首的术语

以希腊字母起首的术语

以汉字起首的术语

A

B

C

D

E

H

J

K

M

N

O

P

S

T

W

X

Y

Z

图书在版编目(CIP)数据

现代数学手册·经典数学卷/《现代数学手册》编纂委员会
武汉:华中科技大学出版社,2000年12月
ISBN 7-5609-2172-8

Ⅰ.现…
Ⅱ.现…
Ⅲ.①数学-手册 ②古典数学-手册
Ⅳ.O 1-62

现代数学手册·经典数学卷 《现代数学手册》编纂委员会

责任编辑:周芬娜 李立鹏 余健棠 封面设计:刘卉
责任校对:蔡晓瑚 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社 武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012
经销:新华书店湖北发行所

录排:湖北省新华印刷厂
印刷:湖北省新华印刷厂

开本:880×1230 1/32 印张:33.5 插页:6 字数:1 280 000
版次:2000年12月第1版 印次:2000年12月第1次印刷 印数:1—8 000
ISBN 7-5609-2172-8/O·205 定价:90.00元